Известия вузов. Математика
2008, № 10, с. 79–83
http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Л.Е. ШУВАЛОВА

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В работе рассмотрен общий проекционный метод решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения и его использование в методах ортогональных многочленов, подобластей, коллокации.

Ключевые слова: метрическое пространство, норма, аппроксимация.

УДК: 517.968 : 519.642

Abstract. In this paper we consider a general projection method for the solution of a nonlinear singular integral equation and its applications in the method of orthogonal polynomials, the subdomains method, and the collocation method.

Keywords: metric space, norm, approximation.

1. Введение. Пусть X, Y — весовые пространства Лебега, $X = \overset{0}{L}_2(p) = \Big\{x \in L_2(p) : \int\limits_{-1}^{1} p(t)x(t)dt = 0\Big\}$, $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $Y = L_2(q)$, $q(t) = \sqrt{1-t^2}$ с нормами соответственно $\|x\|_X = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} p(t)|x(t)|^2\,dt}$, $\|y\|_Y = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} q(t)|y(t)|^2\,dt}$. Основным объектом исследования, как и в ([1], с. 77), является операторное уравнение

$$K(x) \equiv Sx + \lambda Th(x) = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{1.1}$$

где операторы $S : X \to Y$ и $T : X \to Y$ заданы соотношениями

$$Sx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau, \quad Th(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau,x(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau,$$

причем сингулярный интеграл Sx понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу. Здесь $y(t)$ и $h(t,\tau,u)$ — известные функции в своих областях определения, λ — числовой параметр, $x(t)$ — искомая функция.

Поступила 13.05.2007, краткое сообщение 25.04.2008

Будем считать, что функция $h(t,\tau,u)$ при любых $(t,\tau)\in[-1,1]^2$ и $-\infty<u_1,u_2<+\infty$ удовлетворяет условиям

$$|h(t,\tau,u_1)-h(t,\tau,u_2)|\le M|u_1-u_2|,\quad h(t,\tau,0)=0. \tag{1.2}$$

Ниже понадобится установленная в ([1], с. 79) теорема существования и единственности решения уравнения (1.1).

Лемма. *Пусть функция $h(t,\tau,u)$ удовлетворяет условиям* (1.2). *Тогда при $|\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{M}$ задача* (1.1) *имеет единственное решение $x^*\in X$ при любой правой части $y\in Y$ и*

$$\|x^*\|_X\le(1-q)^{-1}\|y\|_Y,\quad q=|\lambda|\frac{M}{\sqrt{2}}.$$

2. Общий проекционный метод. Обозначим через H_n множество всех алгебраических многочленов степени не выше n и введем следующую пару конечномерных подпространств $X_n\subset X, Y_n\subset Y$: $X_n=H_n^0=H_n\cap X$, $Y_n=H_{n-1}$, с той же нормой, что и в пространствах X и Y, а через P_n обозначим аддитивный и однородный оператор, отображающий пространство Y в подпространство Y_n, где $n\in N$. Теперь уравнение (1.1) будем решать с помощью общего проекционного метода, согласно которому приближенное решение $x_n(t)\in X_n$:

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kT_k(t)\in X_n,\quad T_k(t)=\cos k\arccos t,\quad -1<t<1,\quad n\in N, \tag{2.1}$$

определяется как точное решение операторного уравнения

$$K_n(x_n)\equiv P_nK(x_n)\equiv P_nSx_n+P_nTh(x_n)=P_ny\quad (x_n\in X_n,\quad P_ny\in Y_n). \tag{2.2}$$

Отметим, что при соответствующем выборе операторов $P_n:Y\to Y_n$ из (2.2) можно получить системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) многих известных проекционных методов решения задачи (1.1). Следуя ([2], с. 95–136; [3], с. 515–566), дадим теоретическое обоснование схемы (2.1)–(2.2).

Пусть $P_n^{(1)}\equiv P_n^{(1)}(Y,Y_n)$ — множество всех линейных проекционных операторов, отображающих Y в Y_n и ограниченных по норме в совокупности. Поскольку $P_n^2=P_n$ и $Sx_n\in Y_n$ для любого $x_n\in X_n$, то $P_nSx_n=Sx_n$. Кроме того, с учетом результата (напр., [2], гл. II), что оператор $S:X\to Y$ непрерывно обратим и $\|S\|_{X\to Y}=\|S^{-1}\|_{Y\to X}=1$, уравнение (2.2) эквивалентно операторному уравнению вида

$$x_n=B_n(x_n),\quad x_n\in X_n,\quad B_n(x_n)\equiv S^{-1}P_ny-\lambda S^{-1}P_nTh(x_n),\quad B_n:X_n\to X_n. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Пусть функция $h(t,\tau,u)$ удовлетворяет условиям* (1.2), *а $P_n\in P_n^{(1)}$, $\|P_n\|_{Y\to Y_n}\le c_1$, $c_1\in R^+$; кроме того, числовой параметр λ такой, что $|\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{Mc_1}$.*

Тогда при всех натуральных n аппроксимирующие уравнения (2.2) *однозначно разрешимы и приближенное решение x_n^* удовлетворяет неравенству*

$$\|x_n^*\|_{X_n}\le\frac{c_1\|y\|_Y}{1-q_1},\quad q_1=|\lambda|\frac{Mc_1}{\sqrt{2}}<1. \tag{2.4}$$

Доказательство основывается на том, что нелинейный оператор $B_n:X_n\to X_n$, определенный в (2.3), является сжимающим оператором в пространстве X с коэффициентом сжатия q_1.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *приближенные решения сходятся со скоростью, определяемой неравенством*

$$\|x^*-x_n^*\|\le\frac{2c_1}{1-q_1}E_{n-1}(Sx^*)_Y,$$

где $E_n(f)_Y$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in Y$ элементами из Y_n, а величина q_1 определена в (2.4).

Пусть теперь $P_n \in P_n^{(2)} \equiv P_n^{(2)}(Y, Y_n)$ есть множество линейных проекционных операторов из Y в Y_n, причем $P_n : Y \to Y_n$ неограничены, а $P_n : C \to Y$ ограничены по норме в совокупности, здесь $C = C[-1,1]$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой $\|f\|_C = \max\limits_{-1\le t\le 1} |f(t)|$.

Теорема 2.3. *Пусть функция $h(t,\tau,u)$ удовлетворяет условиям* (1.2), *а $P_n \in P_n^{(2)}$, $\|P_n\|_{Y\to C} \le c_2$, $c_2 \in R^+$, и $y(t), S(x^*;t) \in C[-1,1]$. Если $|\lambda| < \frac{\sqrt{2}}{Mc_2}$, то*

а) *уравнение* (2.2) *имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $P_n y \in Y_n \subset Y$, причем приближенное решение удовлетворяет неравенству*

$$\|x_n^*\|_{X_n} \le \frac{c_2\|y\|_C}{1-q_2}, \quad q_2 = |\lambda| \frac{Mc_2}{\sqrt{\pi}} < 1;$$

б) *приближенные решения сходятся со скоростью, определяемой неравенством*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \frac{2c_2}{1-q_2} E_{n-1}(Sx^*)_C,$$

где $E_n(f)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C[-1,1]$ алгебраическими многочленами степени не выше n.

Доказательство теоремы 2.3 ведется теми же методами, что и доказательство теорем 2.1, 2.2, но с учетом неограниченности оператора $P_n : Y \to Y_n$.

Из приведенных выше теорем единым способом следуют сходимость и оценка погрешности известных проекционных методов. Рассмотрим краткое изложение ряда результатов по конкретным приближенным методам решения уравнения (1.1).

3. Метод ортогональных многочленов. Приближенное решение уравнения (1.1) будем искать в виде многочлена (2.1). Неизвестные коэффициенты α_k, $k = \overline{1,n}$, определяются из условий $(r_n, U_{j-1})_Y = 0$, $j = \overline{1,n}$, $r_n \equiv y - K(x_n)$, где $(u,\nu)_Y$ — скалярное произведение в пространстве Y. Отсюда получаем СНАУ

$$\alpha_j + \lambda c_{j-1}^U \left(Th\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(\tau) \right) \right) = c_{j-1}^U(y), \quad j = \overline{1,n}; \tag{3.1}$$

здесь $c_{j-1}^U(f) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f(t) U_{j-1}(t)\,dt$ — коэффициенты Фурье–Чебышева, $U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$ — полиномы Чебышева второго рода степени $n (n \in N)$. Для вычислительной схемы метода ортогональных многочленов (1.1), (2.1), (3.1) имеют место следующие результаты.

Теорема 3.1. *Пусть $h(t,\tau,u)$ удовлетворяет условиям* (1.2). *Если $|\lambda| < \sqrt{2}/M$, то*

а) *СНАУ* (3.1) *имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ при любых $n \in N$, а приближенное решение x_n^* удовлетворяет неравенству*

$$\|x_n^*\|_{X_n} \le \frac{\|y\|_Y}{1-q}, \quad q = |\lambda| \frac{M}{\sqrt{2}} < 1;$$

б) *приближенные решения сходятся при* $n \to \infty$ *к точному решению* $x^*(t)$ *в среднем со скоростью, определяемой неравенством*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \frac{1}{1-q} E_{n-1}(Sx^*)_Y.$$

Доказательство следует из теорем 2.1 и 2.2. В качестве оператора проектирования берется оператор Фурье (напр., [2], с. 121) $P_n(f;t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{j-1}^U(f) U_{j-1}(t)$,

$$\|f - P_n f\|_Y = E_{n-1}(f)_Y, \quad \|P_n\|_{Y \to Y_n} = 1.$$

4. Метод подобластей. Пусть неизвестные коэффициенты α_k, $k = \overline{1,n}$, многочлена (2.1) определяются из условий

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_n(t)\,dt = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad r_n(t) \equiv y - K(x_n), \tag{4.1}$$

где t_j — некоторая система узлов из $[-1,1]$. Условия (4.1) эквивалентны СНАУ

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{T_k(t_j) - T_k(t_{j-1})}{k} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \int_{-1}^{1} \frac{h\Big(t, \tau, \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(\tau)\Big)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = \int_{t_{j-1}}^{t_j} y(t)dt, \;\; j = \overline{1,n}. \tag{4.2}$$

Для вычислительной схемы метода подобластей (1.1), (2.1), (4.2) имеет место

Теорема 4.1. *Пусть узлы* t_j *определены по любой из формул*

$$t_j = \cos\frac{j\pi}{n}; \quad t_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi, \quad j = \overline{0,n}. \tag{4.3}$$

Кроме того, $y(t) \in C[-1,1]$ *и* $Th(x;t) \in C[-1,1]$; *функция* $h(t,\tau,u)$ *удовлетворяет условиям* (1.2), *а числовой параметр* λ *такой, что* $|\lambda| < \frac{2\sqrt{2}}{\pi M}$. *Тогда при всех* $n \in N$ *СНАУ* (4.2) *однозначно разрешима и приближенное решение удовлетворяет неравенству*

$$\|x_n^*\|_{X_n} \le \frac{\pi \|y\|_Y}{2(1-q_3)}, \quad q_3 = |\lambda| \frac{M\pi}{2\sqrt{2}} < 1. \tag{4.4}$$

Погрешность решения оценивается выражением

$$\|x^* - x_n^*\| \le \frac{\pi}{2(1-q_3)} E_{n-1}(Sx^*)_Y. \tag{4.5}$$

Доказательство выводится из теорем 2.1 и 2.2. Оператор проектирования задается в виде $P_n(f;t) = \frac{d}{dt} L_n\Big(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau;\, t\Big)$, где $L_n(\phi;t)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\phi(t) \in C[-1,1]$ по узлам (4.3). Учитывая аппроксимативные свойства оператора подобластей (напр., [4]) $\|f - P_n f\|_Y \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}(f)_Y$, $\|P_n\|_{Y \to Y_n} \le \frac{\pi}{2}$, получаем оценки (4.4)(4.5).

5. Метод коллокации. Пусть неизвестные коэффициенты α_k, $k = \overline{1,n}$, многочлена (2.1) определяются из условий

$$r_n(t_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad r_n(t) \equiv y - K(x_n), \tag{5.1}$$

где t_j — некоторая система из n узлов на сегменте $[-1, 1]$. Условия (5.1) эквивалентны СНАУ вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_{k-1}(t_j) + \lambda Th\biggl(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(\tau);\, t_j\biggr) = y(t_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{5.2}$$

Для вычислительной схемы метода коллокации (1.1), (2.1), (5.2) справедлива

Теорема 5.1. *Пусть узлы t_j определены по формуле*

$$t_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{5.3}$$

Кроме того, $y(t) \in C[-1, 1]$, $S(x^*; t) \in C[-1, 1]$ и $Th(x; t) \in C[-1, 1]$; функция $h(t, \tau, u)$ удовлетворяет условиям (1.2)*, а числовой параметр λ такой, что $|\lambda| < \frac{2}{M\sqrt{\pi}}$. Тогда*

а) *СНАУ* (5.2) *имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $P_n y \in Y_n \subset Y$, $P_n \in P_n^{(2)}$, причем приближенное решение удовлетворяет неравенству*

$$\|x_n^*\|_{X_n} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\|y\|_C}{1-q}, \quad q = |\lambda| \frac{M}{\sqrt{2}} < 1; \tag{5.4}$$

б) *приближенные решения сходятся со скоростью, определяемой неравенством*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \frac{\sqrt{2\pi}}{1-q} E_{n-1}(Sx^*)_C. \tag{5.5}$$

Доказательство следует из теоремы 2.3. В качестве оператора проектирования берется оператор $P_n : Y \to Y_n$, который ставит в соответствие любой функции $f(t) \in C[-1, 1]$ ее интерполяционный полином Лагранжа степени не выше $n - 1$, построенный по узлам коллокации (5.3). Используя результаты по аппроксимативным свойствам этого оператора (напр., [2], с. 119) $\|f - P_n f\|_Y \le \sqrt{2\pi} E_{n-1}(f)_C$, $\|P_n\|_{C \to Y_n} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, получим оценки (5.4) и (5.5).

Литература

[1] Шувалова Л.Е. *Квадратурный метод решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 6. – С. 77–81.

[2] Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I-*го рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 288 с.

[3] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

[4] Ермолаева Л.Б. *Решение интегральных уравнений методом подобластей* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 9. – С. 37–49.

Л.Е. Шувалова

старший преподаватель, кафедра математики и информатики,
Нижнекамский химико-технологический институт,
423570, г. Нижнекамск, ул. Строителей, д. 47,

e-mail: shyvalovale@yandex.ru

L.E. Shuvalova

Senior lecturer, Chair of Mathematics and Information Science,
Nizhnekamsk Chemical-engineering Institute,
47 Stroitelei str., Nizhnekamsk, 423570 Russia,

e-mail: shyvalovale@yandex.ru