КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Н.Р. ХУСНУТДИНОВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Уравнение колебаний струны

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ 2009

УДК 517.91

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета физического факультета
Казанского государственного университета

Рецензенты – д.ф.-м.н., профессор А.В. Аминова,
д.ф.-м.н., профессор Л.А. Нефедьев (ТГГПУ)

Н.Р. Хуснутдинов. Уравнения математической физики. Уравнение колебаний струны. Учебно-методическое пособие – Казань, 2009. – 44с.

Цель настоящего учебно-методического пособия состоит в оказании помощи студентам физического факультета при изучении раздела "Уравнение колебаний струны" в курсе "Уравнения математической физики". В нем содержатся 25 вариантов для самостоятельной работы студентов. Имеется достаточный теоретический материал, приведены решения наиболее типичных задач.

1 УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Расположим струну вдоль оси x и обозначим отклонение точки x струны в момент времени t через $u(x,t)$. Предположим, что на струну действует внешняя сила, плотность которой на единицу массы струны $\mathcal{G}(x,t)$ $[\mathcal{G} = \textit{м}/\textit{сек}^2]$. Тогда отклонение струны $u(x,t)$ $[u = \textit{м}]$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathcal{G},$$

где параметр v, имеющий размерность скорости, выражается через силу натяжения струны T $[T = \textit{кг} \cdot \textit{м}/\textit{сек}^2]$ и ее линейную плотность ρ $[\rho = \textit{кг}/\textit{м}]$ следующим образом: $v^2 = T/\rho$. Это уравнение справедливо при следующих предположениях. Колебания струны являются

плоскими: все точки струны всегда находятся в одной плоскости, причем струна расположена вдоль оси x, а отклонение струны происходит вдоль оси u,

поперечными: каждая точка струны перемещается в направлении, перпендикулярном оси x, т.е. в направлении оси u,

малыми по амплитуде: пренебрегаем степенями отклонения выше первой $u^n \approx 0$, для $n \geq 2$.

Если внешняя сила не равна нулю, т.е. $\mathcal{G} \neq 0$, то это уравнение описывает вынужденные колебания струны, а уравнение колебаний называется неоднородным. В противном случае уравнение называется однородным и описывает свободные колебания струны.

Для решения уравнения колебания струны, т.е. для нахождения в явном виде закона колебания $u(x,t)$ необходимо задать начальные и граничные (краевые) условия. Поскольку в уравнение, описывающее колебания струны, входит вторая производная по времени, то необходимо задавать начальное значение и начальную производную по времени от $u(x,t)$. Таким образом, начальные условия имеют следующий вид:

$$u(x,0) = f(x),\ u'_t(x,0) = u'_t(x,t)_{t=0} = F(x). \tag{1}$$

Граничные условия делятся на два типа – однородные и неоднородные. Если струна имеет бесконечную длину, то граничные условия не накладываются.

Однородные. Если эти условия выполнены для двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, то они выполнены и для любой их линейной комбинации $\alpha u_1(x,t) + \beta u_2(x,t)$. Мы рассмотрим следующие типы однородных граничных условий.

1. Струна имеет конечную длину l и закреплена на концах в точках с координатами $x = 0$ и $x = l$. Условия имеют вид

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \tag{2a}$$

   и называются условиями Дирихле.

2. Угол наклона струны на концах фиксирован:

$$u'_x(0,t) = 0,\ u'_x(l,t) = 0. \tag{2b}$$

   Такие условия называются условиями Неймана.

3. Можно рассмотреть комбинацию условий (2a) и (2b). Левый край струны закреплен, а на правом фиксирован нулевой угол наклона:

$$u(0,t) = 0,\ u'_x(l,t) = 0, \tag{2c}$$

   и, наоборот, правый край струны закреплен, а на левом фиксирован угол наклона, равный нулю:

$$u'_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \tag{2d}$$

Неоднородные. Такие граничные условия нарушают условие предыдущего пункта. Мы рассмотрим следующие типы неоднородных граничных условий.

1. Струна имеет конечную длину l, но концы струны в точках с координатами $x = 0$ и $x = l$ движутся по заданным законам в направлении, перпендикулярном оси x. Условия имеют вид

$$u(0,t) = \phi(t),\ u(l,t) = \psi(t). \tag{3a}$$

2. Концы струны движутся с заданным законом угла наклона в направлении, перпендикулярном оси x:

$$u'_x(0,t) = \alpha(t),\ u'_x(l,t) = \beta(t). \tag{3b}$$

3. Рассмотрим также комбинацию условий (3a) и (3b). Левый край струны движется, а на правом задан закон изменения угла наклона:

$$u(0,t) = \phi(t),\ u'_x(l,t) = \beta(t), \tag{3c}$$

и, наоборот, правый край струны движется, а на левом задан закон изменения угла наклона:

$$u'_x(0,t) = \alpha(t),\ u(l,t) = \psi(t). \tag{3d}$$

2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

2.1 Свободные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2a).

Свободные колебания струны описываются однородным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

Представим вначале функцию двух переменных $u(x,t)$ в виде произведения двух функций одной переменной:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставим это выражение в уравнение колебания струны (4), затем разделим обе части на $X(x) \cdot T(t)$. Получим равенство

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Выражение слева является функцией только переменной t, а справа – функцией только переменной x. Равенство функций двух независимых переменных возможно только в том случае, если обе эти

функции равны постоянной величине λ. Таким образом, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{T''}{v^2 T} = \lambda, \tag{5a}$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda. \tag{5b}$$

На данном этапе нам ничего не известно о константе λ. Она может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Общее решение уравнения (5b) имеет следующий вид:

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}. \tag{6}$$

Наше решение должно удовлетворять граничным условиям (2a). Это дает линейную систему из двух уравнений на константы c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{l\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-l\sqrt{\lambda}} &= 0. \end{cases}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда главный определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{l\sqrt{\lambda}} & e^{-l\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-l\sqrt{\lambda}} - e^{l\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{7}$$

Если λ является положительной величиной, то решением этого уравнения является только тривиальное, $\lambda = 0$. Это, в свою очередь, приводит к тривиальному решению $X = 0$. Если же $\lambda < 0$, то ситуация меняется. Обозначим $\lambda = -\mu^2$. Тогда уравнение (7) преобразуется к виду

$$\sin(\mu l) = 0.$$

Решение этого уравнения, называемое спектром, имеет вид $\mu = 0, \pm\frac{\pi}{l}, \pm\frac{2\pi}{l}, \ldots$ и при этом $c_2 = -c_1$. Подставляя спектр в уравнение (6), получаем

$$X(x) = 2ic_1 \sin(\mu x).$$

Отсюда видно, что $\mu = 0$ приводит к тривиальному решению $X = 0$. Поэтому это значение надо исключить. Отрицательные и положительные значения μ приводят к решениям, которые отличаются только знаком, и поэтому достаточно рассматривать только положительные значения μ. Таким образом, получаем спектр и собственную функцию

$$\mu = \frac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, 3, \dots,$$
$$X(x) = 2ic_1 \sin(\frac{\pi n x}{l}).$$

Подставим теперь полученное значение $\lambda = -\mu^2 = -\pi^2 n^2/l^2$ в (5a). Получим уравнение

$$T'' - \left(\frac{v\pi n}{l}\right)^2 T = 0,$$

решение которого имеет вид

$$T(t) = c_3 \cos(\frac{v\pi n t}{l}) + c_4 \sin(\frac{v\pi n t}{l}).$$

Обозначим $\alpha_n = 2ic_1c_3$ и $\beta_n = 2ic_1c_4$. Тогда получаем частное решение, соответствующее значению $\lambda = -\pi^2 n^2/l^2$,

$$u_n(x,t) = \left[\alpha_n \cos(\frac{v\pi n t}{l}) + \beta_n \sin(\frac{v\pi n t}{l})\right] \sin(\frac{\pi n x}{l}).$$

Для каждого n это выражение является решением уравнения колебания струны, носит название моды и удовлетворяет однородным граничным условиям (2a). При $n = 1$ мода называется основным тоном, частота колебаний которого $\omega_1 = v\pi/l$, а при $n > 1$ – обертоном частоты $\omega_n = n\omega_1 = nv\pi/l$. Поскольку по определению однородных граничных условий линейная комбинация решений снова является решением, удовлетворяющим тем же граничным условиям, то можно представить общее решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right] \sin(\frac{\pi n x}{l}). \qquad (8)$$

Чтобы найти константы α_n и β_n необходимо использовать начальные условия (1). Это дает два соотношения

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{\pi n x}{l}) = f(x),$$

$$u'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{v\pi n}{l} \sin(\frac{\pi n x}{l}) = F(x).$$

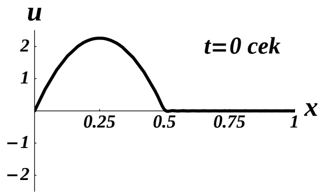

Рис. 1: Начальная форма $f(x)$ струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$. Начальная скорость каждой точки струны отсутствует $F(x) = 0$.

Приведенные выше формулы являются рядами Фурье по синусам, и поэтому получаем

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\frac{\pi n x}{l}) dx, \qquad (9a)$$
$$\beta_n = \frac{2}{v\pi} \int_0^l F(x) \sin(\frac{\pi n x}{l}) dx. \qquad (9b)$$

Таким образом, решение нашей задачи имеет вид (8), в котором константы даются формулами (9).

Пример 1. Рассмотрим струну длиной l, закрепленную в точках $x = 0$ и $x = l$, и рассмотрим следующие начальные условия

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} \frac{x(\frac{l}{2} - x)}{h}, & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} \le x \le 0 \end{cases},$$
$$F(x) = u'_t(x,0) = 0.$$

Начальная форма струны изображена на Рис. 1. По формулам (9) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{x(\frac{l}{2} - x)}{h} \sin(\frac{\pi n x}{l}) dx \\ &= \frac{l^2}{h\pi^3 n^3} \left\{4 - 4\cos(\frac{\pi n}{2}) - \pi n \sin(\frac{\pi n}{2})\right\}, \\ \beta_n &= \frac{2}{v\pi} \int_0^l F(x) \sin(\frac{\pi n x}{l}) dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в (8), получаем закон колебания струны с такими начальными данными

$$u(x,t) = \frac{l^2}{h\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{4 - 4\cos(\frac{\pi n}{2}) - \pi n \sin(\frac{\pi n}{2})\right\}$$

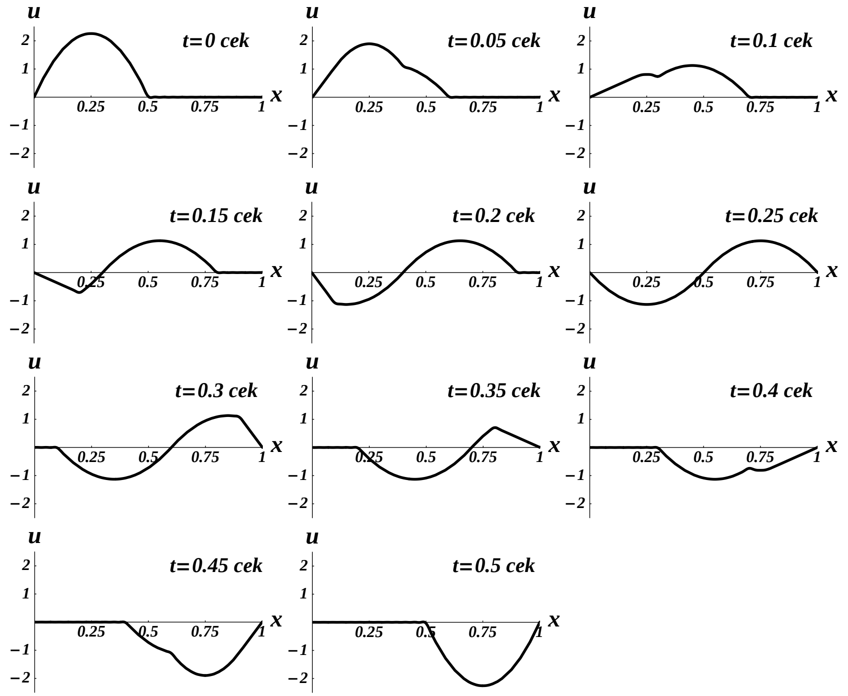

Рис. 2: На рисунках изображена форма струны в различные моменты времени. Струна закреплена на концах, внешние силы отсутствуют. Выбраны следующие значения параметров: $v = 2\text{м}/\text{сек},\ l = 1\text{м},\ h = (4-\pi)/\pi^3\text{м}$.

$$
\begin{aligned}
&\times \quad \cos(\omega_n t)\sin(\frac{\pi n x}{l}) \\
&= \quad \frac{l^2}{h\pi^3}\Big\{(4-\pi)\cos(\omega_1 t)\sin(\frac{\pi x}{l}) + \cos(\omega_2 t)\sin(\frac{2\pi x}{l}) \\
&+ \quad \frac{4+3\pi}{27}\cos(\omega_3 t)\sin(\frac{3\pi x}{l}) + \ldots\Big\}.
\end{aligned}
$$

На рисунке 2 изображено движение струны в течении полупериода. При дальнейшем увеличении t форма струны будет меняться в обратном порядке, и в момент $t = 1\text{сек}$ струна вернется в исходное положение. Линейная частота колебаний такой струны $\nu = 1\text{Гц}$. Это видно из того, что основной тон струны $\omega_1 = \pi v/l = 2\pi$.

2.2 Свободные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2b).

Рассмотрим далее второй тип однородных граничных условий (2b), называемых обычно условиями Неймана. Форма решения (6) не изменится. Но поскольку тип граничных условий изменился, то это приведет к изменению системы уравнений на постоянные c_1 и c_2. Мы получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
c_1 - c_2 &= 0, \\
c_1 e^{l\sqrt{\lambda}} - c_2 e^{-l\sqrt{\lambda}} &= 0.
\end{cases}
$$

Условие существования нетривиального решения

$$
\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{l\sqrt{\lambda}} & -e^{-l\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = -e^{-l\sqrt{\lambda}} + e^{l\sqrt{\lambda}} = 0
$$

имеет тот же вид, что и в предыдущем параграфе, и поэтому $\mu = 0, \pm\frac{\pi}{l}, \pm\frac{2\pi}{l}, \ldots$, но изменилась связь между константами: $c_2 = c_1$. Последнее приводит к тому, что форма решения изменится

$$
X(x) = 2c_1\cos(\mu x).
$$

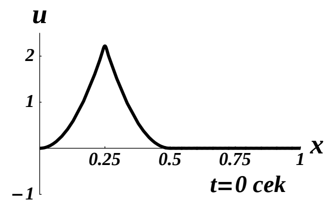

Рис. 3: Начальная форма $f(x)$ струны, касательная к которой в точках $x = 0$ и $x = l$ равна нулю. Начальная скорость каждой точки струны отсутствует $F(x) = 0$.

Теперь нельзя отбрасывать решение с $\mu = 0$, поскольку это решение является нетривиальным. Вследствие четности функции косинус, можно рассматривать только положительные значения μ. Итак, спектр в этом случае начинается с нуля

$$
\mu = \frac{\pi n}{l},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots,
$$

а собственные функции имеют вид

$$
X(x) = 2c_1\cos(\frac{\pi n x}{l}).
$$

Таким образом, получаем решение задачи ($\omega_n = \pi n v/l$)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\omega_n t + \beta_n\sin\omega_n t\right] \\
\times\cos(\frac{\pi n x}{l}), \qquad (11)
\end{aligned}
$$

где α_n и β_n находятся как коэффициенты разложения в ряд Фурье по косинусам ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx, \tag{12a}$$

$$\beta_n = \frac{2}{v\pi}\int_0^l F(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx. \tag{12b}$$

Пример 2. Рассмотрим струну длиной l, касательная к которой в точках $x = 0$ и $x = l$ равна нулю, и рассмотрим следующие начальные условия:

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{h}, & 0 \le x \le \frac{l}{4} \\ \frac{(x-\frac{l}{2})^2}{h}, & \frac{l}{4} \le x \le \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases},$$

$$F(x) = u'_t(x,0) = 0.$$

Начальные условия должны быть такими, чтобы касательная на концах струны была равна нулю и в начальный момент времени. Начальная форма струны изображена на Рис. 3. По формулам (12) получаем:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^{l/4}\frac{x^2}{h}\cos(\frac{\pi n x}{l})dx + \frac{2}{l}\int_{l/4}^{l/2}\frac{(x-\frac{l}{2})^2}{h}\cos(\frac{\pi n x}{l})dx$$

$$= \frac{8l^2}{h\pi^3 n^3}\cos(\frac{\pi n}{4})\left\{\frac{\pi n}{4} - \sin(\frac{\pi n}{4})\right\},$$

$$\alpha_0 = \frac{l^2}{48h},$$

$$\beta_n = \frac{2}{v\pi}\int_0^l F(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx = 0.$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в (11), получаем закон колебания струны с такими начальными данными

$$u(x,t) = \frac{l^2}{96h} + \frac{8l^2}{h\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos(\frac{\pi n}{4})\left\{\frac{\pi n}{4} - \sin(\frac{\pi n}{4})\right\}$$

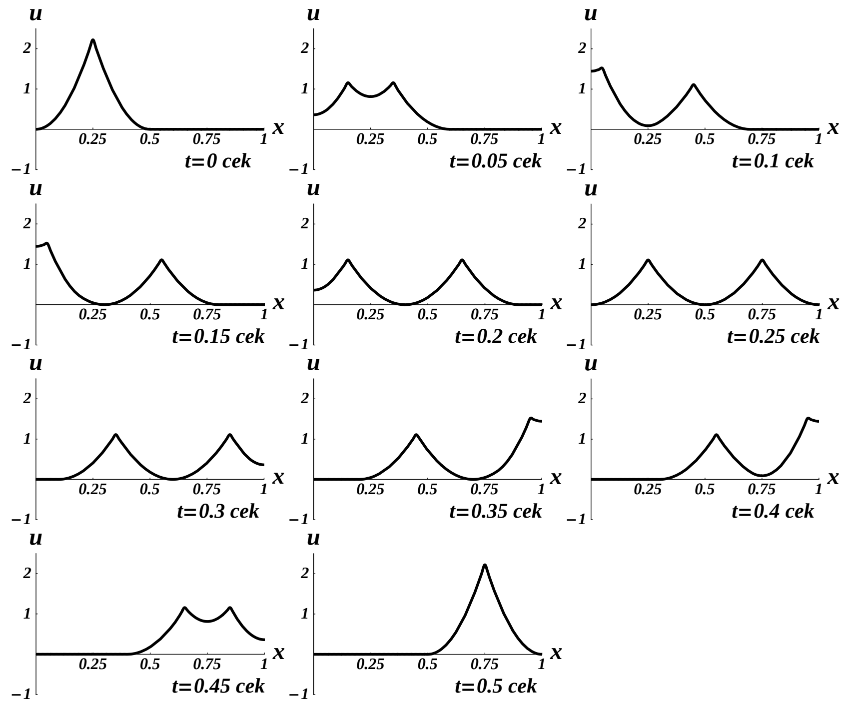

Рис. 4: На рисунках изображена форма струны в различные моменты времени. Концы струны свободно движутся, причем угол наклона концов струны равен нулю во все моменты времени; внешние силы отсутствуют. Выбраны следующие значения параметров: $v = 2$*м/сек*, $l = 1$*м*, $h = (4-\pi)/\pi^3$*м*.

$$\times \quad \cos(\omega_n t)\cos(\frac{\pi n x}{l}).$$

На рисунке 4 изображено движение струны в течении полупериода. При дальнейшем увеличении t форма струны будет меняться в обратном порядке, и в момент $t = 1$*сек* струна вернется в исходное положение. Линейная частота колебаний такой струны $\nu = 1$*Гц*.

Из рисунка видно, что угол наклона касательной на концах струны равен нулю во все моменты времени. Вид колебаний струны с такими граничными условиями отличается от колебаний струны с закрепленными концами. Струна в процессе колебаний всегда остается в верхней полуплоскости. Это связано с тем, что концы струны остаются свободными и "не заставляют" струну переворачиваться.

2.3 Свободные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2c), (2d).

Рассмотрим, наконец, смешанный тип граничных условий (2c) и (2d). На одном конце задано условие Дирихле, а на другом условие Неймана. Условие существования нетривиального решения имеет вид (верхний знак соответствует условию (2c), а нижний условию (2d))

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm 1 \\ e^{l\sqrt{\lambda}} & \mp e^{-l\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = \mp e^{-l\sqrt{\lambda}} \mp e^{l\sqrt{\lambda}} = 0.$$

Решения этого уравнения отличаются от предыдущих случаев. Действительно, положим $\lambda = -\mu^2$, и тогда получим уравнение для нахождения спектра

$$\cos(\mu l) = 0,$$

решение которого имеет следующий вид:

$$\mu = \frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2}),\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и $c_2 = \mp c_1$. Это приводит к тому, что для граничных условий (2c) получаем решение

$$X(x) = 2ic_1 \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right], \tag{14}$$

а для условий (2d), соответственно,

$$X(x) = 2c_1 \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right]. \tag{15}$$

Легко видеть, что при замене $n \to -1 - n$ функции (14) только меняют знак, а функции (15) остаются неизменными. По этой причине можно рассматривать только неотрицательные значения n, и спектр имеет следующий вид:

$$\mu = \frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2}),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, получаем следующее решение задачи колебания струны с граничными условиями (2c):

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_{n+\frac{1}{2}} t) + \beta_n \sin(\omega_{n+\frac{1}{2}} t)\right] \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right],$$

где $\omega_{n+\frac{1}{2}} = \frac{v\pi}{l}(n + \frac{1}{2})$, и

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right] dx, \tag{16a}$$

$$\beta_n = \frac{2}{v\pi}\int_0^l F(x) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right] dx. \tag{16b}$$

В случае граничных условий (2d) получаем

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_{n+\frac{1}{2}} t) + \beta_n \sin(\omega_{n+\frac{1}{2}} t)\right] \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right],$$

где

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right] dx,$$

$$\beta_n = \frac{2}{v\pi}\int_0^l F(x) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n + \frac{1}{2})\right] dx.$$

В отличие от предыдущих случаев частота основного тона при $n = 0$ равна $v\pi/2l$, т.е. в два раза меньше. Период колебаний соответственно в два раза больше. Для демонстрации этого рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим струну длиной l, закрепленную в точке $x = 0$, и касательная к которой в точке $x = l$ равна нулю, и рассмотрим такие же начальные условия как и в примере 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{h}, & 0 \le x \le \frac{l}{4} \\ \frac{(x-\frac{l}{2})^2}{h}, & \frac{l}{4} \le x \le \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}, \\ F(x) &= u'_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

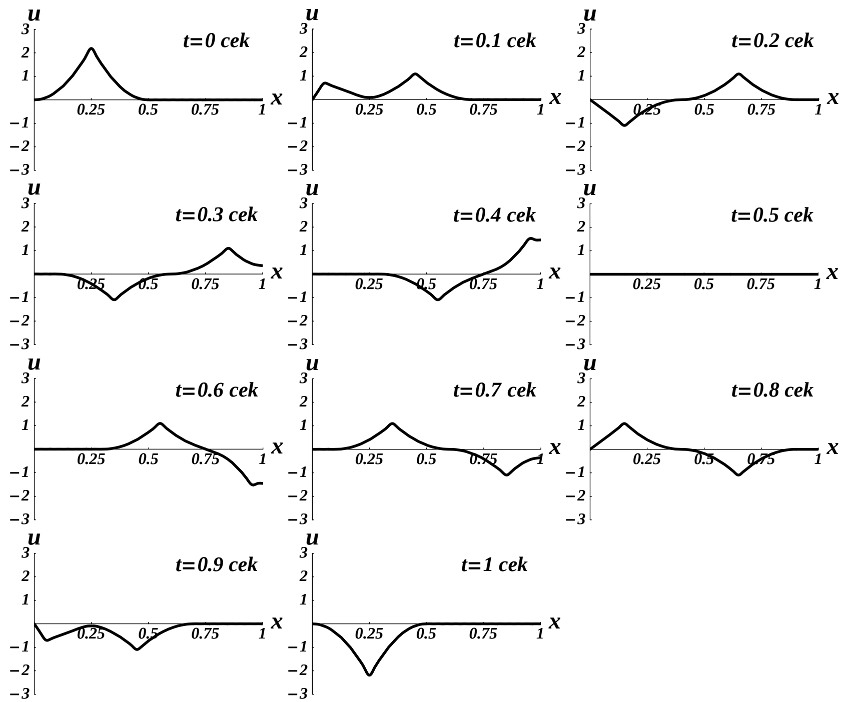

Рис. 5: На рисунках изображена форма струны в различные моменты времени. Левый конец струны закреплен, а правый свободно движется, причем угол наклона правого конца равен нулю во все моменты времени; внешние силы отсутствуют. Выбраны следующие значения параметров: $v = 2\text{м/сек},\ l = 1\text{м},\ h = (4-\pi)/\pi^3\text{м}$.

Начальная форма струны изображена на Рис. 3. По формулам (16) получаем:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{l}\int_0^{l/4}\frac{x^2}{h}\sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right]dx \\
&+ \frac{2}{l}\int_{l/4}^{l/2}\frac{(x-\frac{l}{2})^2}{h}\sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right]dx \\
&= \frac{8l^2}{h\pi^3(n+\frac{1}{2})^3}\left\{\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})-\sin\left[\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})\right]\right\}\sin\left[\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})\right],
\end{aligned}
$$

$$
\beta_n = \frac{2}{v\pi}\int_0^l F(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx = 0.
$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в (11), получаем закон колебания струны с такими начальными данными

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{8l^2}{h\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})\right]}{(n+\frac{1}{2})^3}\left\{\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})-\sin\left[\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})\right]\right\} \\
&\times \cos(\omega_{n+\frac{1}{2}}t)\sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right].
\end{aligned}
$$

На рисунке 5 изображено движение струны в течении полупериода. При дальнейшем увеличении t форма струны будет меняться в обратном порядке, и в момент $t = 2\text{сек}$ струна вернется в исходное положение. Линейная частота колебаний такой струны $\nu = 1/2\text{Гц}$.

2.4 Вынужденные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2а).

В данном случае необходимо решить неоднородное уравнение

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathcal{G}
$$

с ненулевой правой частью. В случае свободных колебаний (8) такие граничные условия приводили к собственным функциям $\sin(\frac{\pi n x}{l})$. По этой причине разложим вынуждающую силу в ряд по этим собственным функциям

$$
\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(t)\sin(\frac{\pi n x}{l}),
$$

где

$$
\gamma_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathcal{G}(x,t)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx, \tag{18}
$$

и представим наше решение в виде следующего ряда:

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\sin(\frac{\pi n x}{l}) \tag{19}
$$

с неизвестными функциями $c_n(t)$. Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка ($\omega_n = nv\pi/l$)

$$c_n''(t) + \omega_n^2 c_n(t) = \gamma_n(t). \tag{20}$$

Чтобы решить это уравнение необходимо задать начальные условия, т.е. необходимо задать $c_n(0)$ и $c_n'(0)$. Для этого рассмотрим начальные условия

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\sin(\frac{\pi n x}{l}) = f(x), \\ u_t'(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0)\sin(\frac{\pi n x}{l}) = F(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем величину начальных данных

$$c_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx = \alpha_n, \tag{21a}$$

$$c_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx = \frac{v\pi}{l}\beta_n. \tag{21b}$$

Коэффициенты α_n и β_n являются коэффициентами такой же краевой задачи (9), но для свободных колебаний струны.

Таким образом, процедура решения задачи в этом случае следующая. Вычисляем вначале коэффициенты разложения внешней силы (18) в ряд по синусам. Затем находим начальные данные по формулам (21) и решаем уравнения (20) с этими начальными данными. Подставляем затем полученные решения в (19). Это и есть искомый закон колебания струны.

Во всей этой процедуре затруднение вызывает решение уравнения (20). Оно представляет собой обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Из общей теории таких уравнений следует, что общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения, которое мы обозначим через $c_n^{ч}(t)$. Таким образом, общее решение уравнения (20) имеет вид

$$c_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t) + c_n^{ч}(t). \tag{22}$$

Используя начальные данные, легко получаем

$$A_n = c_n(0) - c_n^{ч}(0), \tag{23a}$$

$$B_n = \frac{c_n'(0) - {c'}_n^{ч}(0)}{\omega_n}. \tag{23b}$$

Проблема состоит только в том, чтобы найти частное решение. Существует общая теория нахождения частного решения таких уравнений как в общем случае, так и для частных видов внешней силы, используя которую, можно найти частное решение. Из этой теории следует, если вынуждающая сила содержит периодическую часть вида

$$\gamma_n(t) = \delta(t)\sin(\omega t) \quad \textit{или} \quad \gamma_n(t) = \delta(t)\cos(\omega t),$$

то необходимо различать два случая: совпадает или не совпадает частота внешней силы ω с основной частотой $\omega_1 = \frac{v\pi}{l}$ или одним из обертонов $\omega_n = \frac{v\pi n}{l}$. Если такого совпадения нет, то закон колебания струны является периодической функцией. Если же частота внешней силы совпадает или с основной частотой, или с частотами обертонов, то возникает явление резонанса и амплитуда соответствующей частоты растет линейно со временем. Поскольку уравнение колебания струны выведено при условии малости амплитуды колебаний, то резонансный рост амплитуды колебаний можно рассматривать только на малых временах, когда амплитуда не возрастает слишком сильно.

Пример 4. Рассмотрим струну длиной l, закрепленную в точках $x = 0$ и $x = l$ и находящуюся в поле силы тяжести. Тогда плотность силы будет совпадать с ускорением свободного падения $\mathcal{G} = -g$. Рассмотрим начальные условия как и в примере 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) = \begin{cases} \frac{x(\frac{l}{2}-x)}{h}, & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} \le x \le 0 \end{cases}, \\ F(x) &= u_t'(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Начальная форма струны изображена на Рис. 1. По формуле (18) находим Фурье-компоненты плотности силы:

$$\gamma_n = -\frac{2}{l}\int_0^l g\sin(\frac{\pi n x}{l})dx = -\frac{2g}{\pi n}(1-(-1)^n),$$

и по формулам (21) вычисляем начальные данные для решения уравнения (20):

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \frac{2}{l}\int_0^{l/2} \frac{x(\frac{l}{2}-x)}{h}\sin(\frac{\pi n x}{l})dx \\ &= \frac{l^2}{h\pi^3 n^3}\left\{4-4\cos(\frac{\pi n}{2})-\pi n\sin(\frac{\pi n}{2})\right\}=\alpha_n, \\ c_n'(0) &= \frac{2}{l}\int_0^{l} F(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx=\beta_n\frac{v\pi}{l}=0. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты γ_n разложения в ряд Фурье являются константами, то частное решение легко находится

$$c_n^{ч}=\frac{\gamma_n}{\omega_n^2}=-\frac{2gl^2}{v^2\pi^3 n^3}(1-(-1)^n).$$

Из формул (23) получаем

$$\begin{aligned} A_n &= c_n(0)-c_n^{ч}(0), \\ B_n &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в (8), получаем закон колебания струны с такими начальными данными

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{l^2}{h\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{4-4\cos(\frac{\pi n}{2})-\pi n\sin(\frac{\pi n}{2})\right\} \\ &\times \cos(\omega_n t)\sin(\frac{\pi n x}{l}) \\ &- \frac{2gl^2}{v^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\left\{1-\cos(\omega_n t)\right\}\sin(\frac{\pi n x}{l}). \end{aligned}$$

На рисунке 6 изображено движение струны в течении полупериода. При дальнейшем увеличении t форма струны будет меняться в обратном порядке, и в момент $t=1$*сек* струна вернется в исходное положение. Линейная частота колебаний такой струны $\nu=1$*Гц*.

Колебания струны в поле тяжести отличаются от свободных колебаний струны с закрепленными концами (см. Рис. 2). Видно, что

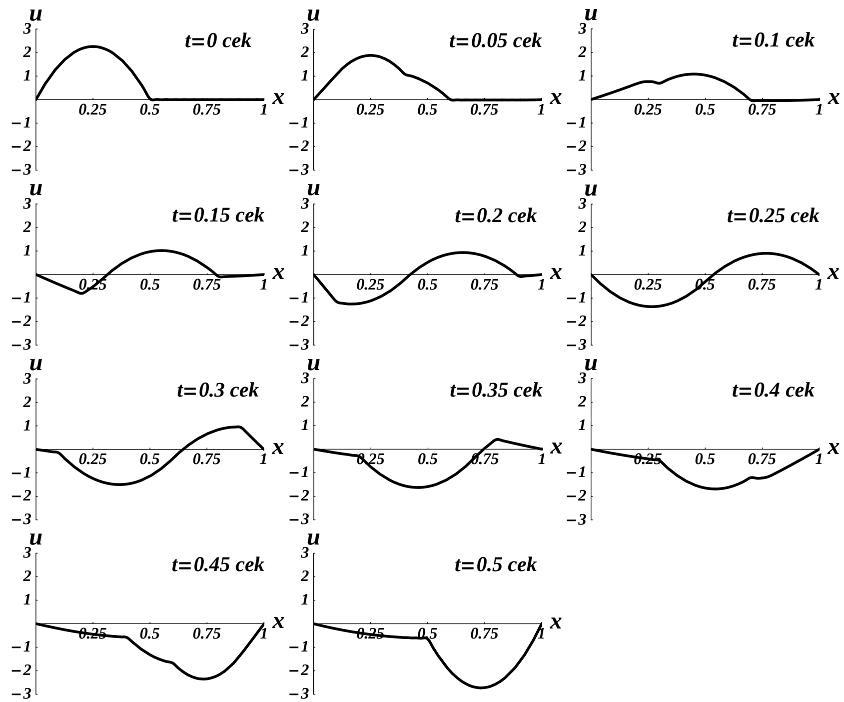

Рис. 6: Форма струны в различные моменты времени. Струна закреплена на концах и находится в поле силы тяжести. Выбраны следующие значения параметров: $v=2$*м/сек*, $l=1$*м*, $h=(4-\pi)/\pi^3$*м* и ускорение свободного падения $g=9.8$*м/сек*^{2}.

струна как бы "провисает". Это особенно наглядно видно из формы струны в конце полупериода, когда она целиком сдвигается вниз, оставаясь закрепленной на концах.

Пример 5. Рассмотрим струну длиной l, закрепленную в точках $x=0$ и $x=l$ и находящуюся в поле периодической силы, частота которой совпадает с основным тоном струны. Плотность силы выберем в следующем виде: $\mathcal{G}=-g\sin(\omega_1 t)=-g\sin(\frac{v\pi t}{l})$, т.е. сила действует одновременно на каждую точку струны. Рассмотрим начальные условия как и в примере 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) = \begin{cases} \frac{x(\frac{l}{2}-x)}{h}, & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} \le x \le 0 \end{cases}, \\ F(x) &= u'_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Начальная форма струны изображена на Рис. 1. По формуле (18) находим спектр плотности силы:

$$\gamma_n = -\frac{2}{l}\int_0^l g\sin(\omega_1 t)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx = \delta_n \sin(\omega_1 t),$$

где $\delta_n = -\frac{2g}{\pi n}(1-(-1)^n)$ и по формулам (21) вычисляем начальные данные для решения уравнения (20):

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \frac{2}{l}\int_0^{l/2} \frac{x(\frac{l}{2}-x)}{h}\sin(\frac{\pi n x}{l})dx \\ &= \frac{l^2}{h\pi^3 n^3}\left\{4 - 4\cos(\frac{\pi n}{2}) - \pi n \sin(\frac{\pi n}{2})\right\} = \alpha_n, \\ c'_n(0) &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx = \beta_n \frac{v\pi}{l} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение для определения коэффициентов c_n имеет вид

$$c''_n(t) + \omega_n^2 c_n(t) = \delta_n \sin(\omega_1 t). \tag{26}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (22) и представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Для нахождения частного решения этого уравнения необходимо различать два случая: совпадает или не совпадает частота внешней силы с основной частотой $\omega_1 = \frac{v\pi}{l}$ или одним из обертонов $\omega_n = \frac{v\pi n}{l}$. В данном случае частота внешней силы ω_1 совпадает с основной частотой и поэтому уравнение при $n = 1$ необходимо решать отдельно.

Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что частное решение этого уравнения при $n \neq 1$ необходимо искать в виде

$$c_n^ч(t) = D_n \sin(\omega_1 t),$$

а при $n = 1$

$$c_1^ч(t) = D_1 t\cos(\omega_1 t).$$

Тогда из уравнения (26) получаем

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\delta_n}{\omega_n^2 - \omega_1^2} = -\frac{2gl^2(1-(-1)^n)}{v^2\pi^3 n}\frac{1}{n^2-1}, \\ D_1 &= -\frac{\delta_1}{2\omega_1} = \frac{2gl}{v\pi^2}. \end{aligned}$$

Используя полученные частные решения, находим

$$\begin{aligned} c_n &= \alpha_n \cos(\omega_n t) + \frac{2gl^2(1-(-1)^n)}{v^2\pi^3 n^2(n^2-1)}\left\{\sin(\omega_n t) - n\sin(\omega_1 t)\right\}, \\ c_1 &= \alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{2gl^2}{v^2\pi^3}\left\{\omega_1 t\cos(\omega_1 t) - \sin(\omega_1 t)\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в (8), получаем закон колебания струны с такими начальными данными

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{l^2}{h\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{4 - 4\cos(\frac{\pi n}{2}) - \pi n\sin(\frac{\pi n}{2})\right\}\cos(\omega_n t)\sin(\frac{\pi n x}{l}) \\ + \frac{2g}{\pi\omega_1^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2(n^2-1)}\left\{\sin(\omega_n t) - n\sin(\omega_1 t)\right\}\sin(\frac{\pi n x}{l}) \\ + \frac{2g}{\pi\omega_1^2}\left\{\omega_1 t\cos(\omega_1 t) - \sin(\omega_1 t)\right\}. \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что амплитуда колебаний растет линейно со временем. Это явление называется резонансом.

На рисунке 7 изображено движение струны в течении двух с половиной периодов. Линейная частота колебаний такой струны $\nu = 1$*Гц*. Из рисунка видно, что амплитуда струны растет со временем и за один период колебаний вырастает почти вдвое.

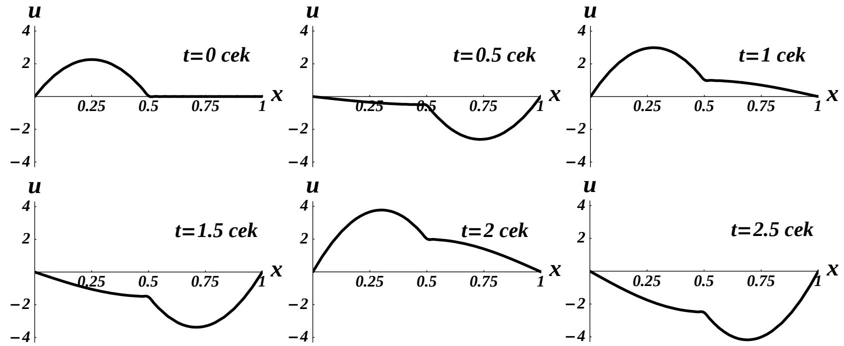

Рис. 7: Форма струны в течении двух с половиной периодов. Струна закреплена на концах и находится в поле периодической силы, частота которой совпадает с основным тоном. Выбраны следующие значения параметров: $v = 2 м/сек$, $l = 1 м$, $h = (4-\pi)/\pi^3 м$ и $g = 9.8 м/сек^2$.

2.5 Вынужденные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2b).

В отличие от предыдущего случая свободные колебания описываются собственными функциями $\cos(\frac{\pi n x}{l})$. Поэтому представим вынуждающую силу в виде ряда по этим собственным функциям

$$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cos(\frac{\pi n x}{l}),$$

где

$$\gamma_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathcal{G}(x,t)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx, \tag{27}$$

и представим наше решение в виде следующего ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\cos(\frac{\pi n x}{l}) \tag{28}$$

с неизвестными функциями $c_n(t)$. Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$c_n''(t) + \omega_n^2 c_n(t) = \gamma_n(t). \tag{29}$$

Чтобы решить это уравнение необходимо задать начальные условия, т.е. необходимо задать $c_n(0)$ и $c_n'(0)$. Для этого рассмотрим начальные условия

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\cos(\frac{\pi n x}{l}) = f(x), \\ u_t'(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0)\cos(\frac{\pi n x}{l}) = F(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем величину начальных данных

$$c_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx, \tag{30a}$$

$$c_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})dx. \tag{30b}$$

Таким образом, процедура решения задачи в этом случае следующая. Вычисляем вначале коэффициенты (27) разложения внешней силы в ряд по синусам. Затем находим начальные данные по формулам (30) и решаем уравнения (29) с этими начальными данными. Подставляем затем полученные решения в (28). Это и есть искомый закон колебания струны.

Из общей теории обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами следует, что общее решение неоднородного уравнения (29) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения, которое мы обозначим через $c_n^{ч}(t)$. Таким образом, общее решение уравнения (29) имеет вид

$$c_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t) + c_n^{ч}(t).$$

Используя начальные данные, легко получаем

$$\begin{aligned} A_n &= c_n(0) - c_n^{ч}(0), \\ B_n &= \frac{c_n'(0) - c_n'^{ч}(0)}{\omega_n}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем пункте необходимо различать случай совпадения частоты внешней силы с частотой основного тона или какого-либо обертона.

2.6 Вынужденные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2c).

В этом случае свободные колебания описываются следующими собственными функциями $\sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right]$. Представим вынуждающую силу в виде ряда по этим собственным функциям

$$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right],$$

где

$$\gamma_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathcal{G}(x,t) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] dx, \qquad (31)$$

и представим наше решение в виде следующего ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] \qquad (32)$$

с неизвестными функциями $c_n(t)$. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка ($\omega_{n+\frac{1}{2}} = \frac{v\pi}{l}[n+\frac{1}{2}]$)

$$c_n''(t) + \omega^2_{n+\frac{1}{2}} c_n(t) = \gamma_n(t). \qquad (33)$$

Чтобы решить это уравнение необходимо задать начальные условия, т.е. необходимо задать $c_n(0)$ и $c_n'(0)$. Для этого рассмотрим начальные условия

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] = f(x), \\ u_t'(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] = F(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем величину начальных данных

$$c_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] dx, \qquad (34a)$$

$$c_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] dx. \qquad (34b)$$

Таким образом, процедура решения задачи в этом случае следующая. Вычисляем вначале коэффициенты разложения (31) внешней силы в ряд по синусам. Затем находим начальные данные по формулам (34) и решаем уравнения (33) с этими начальными данными. Подставляем затем полученные решения в (32). Это и есть искомый закон колебания струны.

Из общей теории обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами следует, что общее решение неоднородного уравнения (33) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения, которое мы обозначим через $c_n^ч(t)$. Таким образом, общее решение уравнения (33) имеет вид

$$c_n(t) = A_n \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] + B_n \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] + c_n^ч(t).$$

Используя начальные данные, легко получаем

$$\begin{aligned} A_n &= c_n(0) - c_n^ч(0), \\ B_n &= \frac{c_n'(0) - c'^ч_n(0)}{\omega_{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем пункте необходимо различать случай совпадения частоты внешней силы с частотой основного тона или какого-либо обертона.

2.7 Вынужденные колебания струны конечной длины. Однородные граничные условия (2d).

В этом случае свободные колебания описываются следующими собственными функциями: $\cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right]$. Представим вынуждающую силу в виде ряда по этим собственным функциям

$$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right],$$

где

$$\gamma_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathcal{G}(x,t) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] dx, \qquad (35)$$

и представим наше решение в виде следующего ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] \qquad (36)$$

с неизвестными функциями $c_n(t)$. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка

$$c_n''(t) + \omega^2_{n+\frac{1}{2}} c_n(t) = \gamma_n(t). \qquad (37)$$

Чтобы решить это уравнение необходимо задать начальные условия, т.е. необходимо задать $c_n(0)$ и $c_n'(0)$. Для этого рассмотрим начальные условия

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] = f(x), \\ u_t'(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] = F(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем величину начальных данных

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] dx, & (38a) \\ c_n'(0) &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] dx. & (38b) \end{aligned}$$

Таким образом, процедура решения задачи в этом случае следующая. Вычисляем вначале коэффициенты (35) разложения внешней силы в ряд по синусам. Затем находим начальные данные по формулам (38), и решаем уравнения (37) с этими начальными данными. Подставляем затем полученные решения в (36). Это и есть искомый закон колебания струны.

Из общей теории обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами следует, что общее решение неоднородного уравнения (37) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и любого

частного решения неоднородного уравнения, которое мы обозначим через $c_n^ч(t)$. Таким образом, общее решение уравнения (37) имеет вид

$$c_n(t) = A_n \cos\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] + B_n \sin\left[\frac{\pi x}{l}(n+\frac{1}{2})\right] + c_n^ч(t).$$

Используя начальные данные, легко получаем

$$\begin{aligned} A_n &= c_n(0) - c_n^ч(0), \\ B_n &= \frac{c_n'(0) - c'^ч_n(0)}{\omega_{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем пункте необходимо различать случай совпадения частоты внешней силы с частотой основного тона или какого-либо обертона.

2.8 Вынужденные колебания струны конечной длины. Неоднородные граничные условия (3а).

В этом случае с помощью замены функции задачу можно свести к решенной в предыдущем разделе. Действительно, сделаем замену искомой функции

$$u(x,t) = w(x,t) + U(x,t) \qquad (39)$$

и подберем функцию $U(x,t)$ так, чтобы новая функция $w(x,t)$ удовлетворяла бы однородным граничным условиям (2а). Легко видеть, что функция

$$U(x,t) = \phi(t) + [\psi(t) - \phi(t)]\frac{x}{l}$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно

$$\begin{aligned} w(0,t) &= u(0,t) - U(0,t) = \phi(t) - \phi(t) = 0, \\ w(l,t) &= u(l,t) - U(l,t) = \psi(t) - \psi(t) = 0, \end{aligned}$$

т.е. функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям. Рассмотрим далее, каким начальным условиям удовлетворяет функция $w(x,t)$. Получаем

$$w(x,0) = u(x,0) - U(x,0) = f(x) - \phi(0) - [\psi(0) - \phi(0)]\frac{x}{l},$$
$$w'_t(x,0) = u'_t(x,0) - U'_t(x,0) = F(x) - \phi'(0) - [\psi'(0) - \phi'(0)]\frac{x}{l}.$$

Новая функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны, но с измененной вынуждающей силой

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{G} - U''_{tt}(x,t).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} f_a(x) &= f(x) - \phi(0) - [\psi(0) - \phi(0)]\frac{x}{l}, \\ F_a(x) &= F(x) - \phi'(0) - [\psi'(0) - \phi'(0)]\frac{x}{l}, \\ \mathcal{G}_a(x,t) &= \mathcal{G}(x,t) - \phi''(t) - [\psi''(t) - \phi''(t)]\frac{x}{l}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны с плотностью вынуждающей силы $\mathcal{G}_a$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{G}_a.$$

Решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$w(x,0) = f_a(x),$$
$$w'_t(x,0) = F_a(x),$$

и однородным граничным условиям

$$w(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0. \qquad (40)$$

Поэтому достаточно решить задачу с однородными граничными условиями (40), получить выражение для $w(x,t)$, а затем по формуле (39) вычислить искомую функцию $u(x,t)$.

2.9 Вынужденные колебания струны конечной длины. Неоднородные граничные условия (3b).

Сделаем замену искомой функции

$$u(x,t) = w(x,t) + U(x,t)$$

и подберем функцию $U(x,t)$ так, чтобы новая функция $w(x,t)$ удовлетворяла бы однородным граничным условиям (2b). Легко видеть, что функция

$$U(x,t) = \alpha(t)x + [\beta(t) - \alpha(t)]\frac{x^2}{2l}$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно

$$\begin{aligned} w'_x(0,t) &= u'_x(0,t) - U'_x(0,t) = \alpha(t) - \alpha(t) = 0, \\ w'_x(l,t) &= u'_x(l,t) - U'_x(l,t) = \beta(t) - \beta(t) = 0, \end{aligned}$$

т.е. функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (2b).

Обозначим

$$\begin{aligned} f_b(x) &= f(x) - \alpha(0)x - [\beta(0) - \alpha(0)]\frac{x^2}{2l}, \\ F_b(x) &= F(x) - \alpha'(0)x - [\beta'(0) - \alpha'(0)]\frac{x^2}{2l}, \\ \mathcal{G}_b(x,t) &= \mathcal{G}(x,t) - \alpha''(t)x - [\beta''(t) - \alpha''(t)]\frac{x^2}{2l}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны с плотностью вынуждающей силы $\mathcal{G}_b$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{G}_b.$$

Решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$w(x,0) = f_b(x),$$
$$w'_t(x,0) = F_b(x),$$

и однородным граничным условиям

$$w'_x(0,t) = 0, \; w'_x(l,t) = 0. \tag{41}$$

Поэтому достаточно решить задачу с однородными граничными условиями (41), получить выражение для $w(x,t)$, а затем по формуле (39) вычислить искомую функцию $u(x,t)$.

2.10 Вынужденные колебания струны конечной длины. Неоднородные граничные условия (3c).

Сделаем замену искомой функции

$$u(x,t) = w(x,t) + U(x,t)$$

и подберем функцию $U(x,t)$ так, чтобы новая функция $w(x,t)$ удовлетворяла бы однородным граничным условиям (2c). Легко видеть, что функция

$$U(x,t) = \phi(t) + \beta(t)\frac{x^2}{2l}$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно

$$\begin{aligned} w(0,t) &= u(0,t) - U(0,t) = \phi(t) - \phi(t) = 0, \\ w'_x(l,t) &= u'_x(l,t) - U'_x(l,t) = \beta(t) - \beta(t) = 0, \end{aligned}$$

т.е. функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (2c).

Обозначим

$$\begin{aligned} f_c(x) &= f(x) - \phi(0) - \beta(0)\frac{x^2}{2l}, \\ F_c(x) &= F(x) - \phi'(0) - \beta'(0)\frac{x^2}{2l}, \\ \mathcal{G}_c(x,t) &= \mathcal{G}(x,t) - \phi''(t) - \beta''(t)\frac{x^2}{2l}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны с плотностью вынуждающей силы $\mathcal{G}_c$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{G}_c.$$

Решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= f_c(x), \\ w'_t(x,0) &= F_c(x), \end{aligned}$$

и однородным граничным условиям

$$w(0,t) = 0, \; w'_x(l,t) = 0. \tag{42}$$

Поэтому достаточно решить задачу с однородными граничными условиями (42), получить выражение для $w(x,t)$, а затем по формуле (39) вычислить искомую функцию $u(x,t)$.

2.11 Вынужденные колебания струны конечной длины. Неоднородные граничные условия (3d).

Сделаем замену искомой функции

$$u(x,t) = w(x,t) + U(x,t)$$

и подберем функцию $U(x,t)$ так, чтобы новая функция $w(x,t)$ удовлетворяла бы однородным граничным условиям (2d). Легко видеть, что функция

$$U(x,t) = \psi(t) - \alpha(t)\frac{(x-l)^2}{2l}$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно

$$\begin{aligned} w'_x(0,t) &= u'_x(0,t) - U'_x(0,t) = \alpha(t) - \alpha(t) = 0, \\ w(l,t) &= u(l,t) - U(l,t) = \psi(t) - \psi(t) = 0, \end{aligned}$$

т.е. функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (2d).

Обозначим

$$\begin{aligned} f_d(x) &= f(x) - \psi(0) + \alpha(0)\frac{(x-l)^2}{2l}, \\ F_d(x) &= F(x) - \psi'(0) + \alpha'(0)\frac{(x-l)^2}{2l}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_d(x,t) \quad = \quad \mathcal{G}(x,t) - \psi''(t) + \alpha''(t)\frac{x^2}{2l}.$$

Таким образом, функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны с плотностью вынуждающей силы $\mathcal{G}_d$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{G}_d.$$

Решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$w(x,0) = f_d(x),$$
$$w'_t(x,0) = F_d(x),$$

и однородным граничным условиям

$$w'_x(0,t) = 0, \ w(l,t) = 0. \tag{43}$$

Поэтому достаточно решить задачу с однородными граничными условиями (43), получить выражение для $w(x,t)$, а затем по формуле (39) вычислить искомую функцию $u(x,t)$.

3 ТЕКСТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Найти закон колебания струны длины l, расположенной на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент струне придана форма кривой $f(x) = U(x,0)$, а затем струна отпущена с начальной скоростью $F(x) = U'_t(x,0)$. Струна закреплена на концах, внешние силы отсутствуют. Выписать частоту и амплитуду основного тона и первых трех обертонов.
2. Найти закон колебания струны длины l, расположенной на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент струне придана форма кривой $f(x) = U(x,0)$, а затем струна отпущена с начальной скоростью $F(x) = U'_t(x,0)$. Угол наклона концов струны равен нулю $U'_x(0,t) = U'_x(l,t) = 0$, внешние силы отсутствуют. Выписать частоту и амплитуду основного тона и первых трех обертонов.
3. Найти закон колебания струны длины l, расположенной на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент струне придана форма кривой $f(x) = U(x,0)$, а затем струна отпущена с начальной скоростью

$F(x) = U'_t(x,0)$. Струна закреплена на концах, и на нее постоянно действует внешняя сила, с плотностью на единицу массы $\mathcal{G}(x,t)$. Выписать частоту и амплитуду основного тона и первых трех обертонов.
4. Найти закон колебания струны длины l, расположенной на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент струне придана форма кривой $f(x) = U(x,0)$, а затем струна отпущена с начальной скоростью $F(x) = U'_t(x,0)$. Струна закреплена на концах, и на нее резонансно действует внешняя сила, с плотностью на единицу массы $\mathcal{G}(x,t)$. Выписать частоту и амплитуду основного тона и первых трех обертонов.
5. Найти закон колебания струны длины l, расположенной на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент струне придана форма кривой $f(x) = U(x,0)$, а затем струна отпущена с начальной скоростью $F(x) = U'_t(x,0)$. Концы струны движутся по законам $U(0,t) = \phi(t)$, $U(l,t) = \psi(t)$, внешние силы отсутствуют. Выписать частоту и амплитуду основного тона и первых трех обертонов.

ВАРИАНТ №1

1. $F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} \frac{x(l/4-x)}{h}\ , & 0 \le x \le l/4 \\ 0\ , & l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{l}\ , & 0 \le x \le l/2 \\ \frac{3(x-l)^2}{l}\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{x}{l}\ ,\ F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l)(l/4-x)}{h}\ , & l/4 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(e^{\frac{x}{2l}} - \frac{3x^2}{4l^2}\right)\cos\frac{\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{l}, & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l)^2}{3l}, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{-\frac{\pi vt}{l}} - 1\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-\frac{l}{4})(\frac{3l}{4}-x)}{h}, & l/4 \le x \le 3l/4 \\ 0, & 3l/4 \le x \le l \end{cases}$

ВАРИАНТ №2

1. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = (x-l)\sin\frac{2\pi x}{l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/2 \\ \frac{16(x-l)^2}{l}\ , & l/2\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{x^2}{l^2}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x^2}{h}\sin\frac{\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G}=g\frac{x}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}\ ,\ F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 3l/4 \\ \frac{64(x-l)^2}{l}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), & 3l/4\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\frac{vt}{l}e^{-2\pi vt/l} \\ \phi=0\end{matrix}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=|x-\frac{l}{2}|\sin\frac{2\pi x}{l}.$

ВАРИАНТ №3

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/4 \\ \frac{(x-l)(l/4-x)}{h}\ , & l/4\le x\le l \end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} -\frac{3x^2}{l}\ , & 0\le x\le l/3 \\ -\frac{3(x-l)^2}{4l}\ , & l/3\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=ge^{x/l}\ ,\ F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/2 \\ \frac{(x-l)(l/2-x)}{h}\ , & l/2\le x\le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}-\frac{6x^2}{l^2}\right)\sin\frac{3\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} -\frac{3x^2}{l}, & 0\le x\le l/5 \\ -\frac{3(x-l)^2}{16l}, & l/5\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{-3\pi vt/l} \\ \psi=0\end{matrix}\ , F(x)=0, f(x)=\begin{cases} \frac{x(3l/4-x)}{h}, & 0\le x\le 3l/4 \\ 0, & 3l/4\le x\le l \end{cases}.$

ВАРИАНТ №4

1. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x^2}{h}\sin\frac{\pi x}{l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le 3l/4 \\ \frac{64(x-l)^2}{l}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\ , & 3l/4\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=ge^{2x/l}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{2l}.$

4. $\mathcal{G}=g\frac{4x}{l}\cos\frac{2\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} -\frac{l}{3}(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/2 \\ -\frac{4}{3l}(x-l)^2, & l/2\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\left(e^{\pi vt/l}-1\right) \\ \phi=0\end{matrix}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{4l}.$

ВАРИАНТ №5

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/2 \\ \frac{(x-l)(l/2-x)}{h}\ , & l/2\le x\le l \end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} \frac{3x^2}{l}\ , & 0\le x\le l/4 \\ \frac{(x-l)^2}{3l}\ , & l/4\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{2x}{l}+4\right), F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(3l/4-x)}{h}, & l/4\le x\le 3l/4 \\ 0, & 3l/4\le x\le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{3x}{l}-e^{-\frac{x}{l}}\right)\sin\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0\le x\le l/6 \\ \frac{3}{25l}(x-2)^2, & l/6\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\frac{vt}{l}e^{-\frac{\pi vt}{l}} \\ \psi=0\end{matrix}\ , F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 3l/4 \\ \frac{(x-l)(3l/4-x)}{h}, & 3l/4\le x\le l \end{cases}$

ВАРИАНТ №6

1. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{2l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/3 \\ \frac{9(x-l)^2}{2l}\ , & l/3\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{4x}{l}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=|x-\frac{l}{2}|\sin\frac{2\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G}=g\frac{x}{3l}\cos\frac{3\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} -\frac{l}{3}(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/2 \\ -\frac{4}{3l}(x-l)^2, & l/2\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{2\pi vt/l} \\ \phi=0\end{matrix}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{4l}.$

ВАРИАНТ №7

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(3l/4-x)}{h}\ , & l/4\le x\le 3l/4 \\ 0\ , & 3l/4\le x\le l \end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} -\frac{3x^2}{l}\ , & 0\le x\le l/5 \\ -\frac{3(x-l)^2}{16l}\ , & l/5\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{2x^2}{l^2}\ ,\ F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} \frac{x(3l/4-x)}{h}\ , & 0\le x\le 3l/4 \\ 0\ , & 3l/4\le x\le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(1 - e^{-\frac{2x}{l}}\right)\sin\frac{\pi v t}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0 \le x \le l/7 \\ \frac{1}{12l}(x-l)^2, & l/7 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{\frac{3\pi v t}{l}} - 1\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}$ $, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(l/2-x)}{h}, & l/4 \le x \le l/2 \\ 0, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

ВАРИАНТ №8

1. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = |x - \frac{l}{2}|\sin\frac{2\pi x}{l}.$

2. $F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} -\frac{l}{3}(1 - \cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/2 \\ -\frac{4}{3l}(x-l)^2\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(e^{x/l} + 1\right)\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{4l}.$

4. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{l^2}\sin\frac{\pi v t}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} -\frac{l}{5}(1 - \cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{9}{40l}(x-l)^2 & l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\left(e^{-\pi v t/l} - e^{\pi v t/l}\right) \\ \phi = 0 \end{matrix}$ $,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{2\pi x}{l}.$

ВАРИАНТ №9

1. $F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} \frac{x(3l/4-x)}{h}\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ 0\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2\ , & 0 \le x \le l/6 \\ \frac{3}{25l}(x-2)^2 & l/6 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = ge^{-2x/l}\ ,\ F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ \frac{(x-l)(3l/4-x)}{h}\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{3x}{l} - e^{-\frac{x}{l}}\right)\cos\frac{3\pi v t}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{3}{49l}(x-l)^2, & l/8 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{-\frac{\pi v t}{2l}} - e^{\frac{\pi v t}{2l}}\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}$ $, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{2}-x)}{h}, & l/8 \le x \le l/2 \\ 0, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

ВАРИАНТ №10

1. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{4l}.$

2. $F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} 4l(1 - \cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{64}{9l}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(x-l)^2 & l/4 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right)\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{4l}.$

4. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{l^2}\sin\frac{2\pi v t}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 4l(1 - \cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/5 \\ \frac{25}{4l}(1 - \cos\frac{\pi}{5})(x-l)^2, & l/5 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{vt}{l}e^{\pi v t/2l} \\ \phi = 0 \end{matrix}$ $,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{l}.$

ВАРИАНТ №11

1. $F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ \frac{(x-l)(3l/4-x)}{h}\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2\ , & 0 \le x \le l/7 \\ \frac{1}{12l}(x-l)^2\ , & l/7 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{x}{3l}\ ,\ F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(l/2-x)}{h}\ , & l/4 \le x \le l/2 \\ 0\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x^2}{l^2} + e^{\frac{x}{l}}\right)\cos\frac{2\pi v t}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0 \le x \le l/9 \\ \frac{3}{64l}(x-l)^2, & l/9 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{-\frac{\pi v t}{3l}} \\ \psi = 0 \end{matrix}$ $, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{4}-x)}{h}, & l/8 \le x \le l/4 \\ 0, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

ВАРИАНТ №12

1. $f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{4l}.$

2. $F(x) = 0\ ,\ f(x) = \begin{cases} -\frac{l}{5}(1 - \cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{9}{40l}(x-l)^2 & l/3 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{6l^2}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{2\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{6l^2}\sin\frac{3\pi v t}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} -7l(1 - \cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{63}{18l}(x-l)^2, & l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{vt}{l}e^{\pi v t/3l} \\ \phi = 0 \end{matrix}$ $,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = |x - \frac{l}{2}|\sin\frac{\pi x}{l}.$

ВАРИАНТ №13

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l/4)(l/2-x)}{h}\ , & l/4\le x\le l/2\\ 0\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} \frac{3}{l}x^2\ , & 0\le x\le l/8\\ \frac{3}{49l}(x-l)^2\ , & l/8\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}+e^{-\frac{x}{l}}\right), F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{2}-x)}{h}, & l/8\le x\le l/2\\ 0, & l/2\le x\le l\end{cases}$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}+3\right)^2\cos\frac{\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0\le x\le l/2\\ \frac{1}{7l}(x-l)^2, & l/2\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{array}{l}\phi=g\frac{vt}{l}\left(e^{-\frac{\pi vt}{l}}-e^{\frac{\pi vt}{l}}\right)\\ \psi=0\end{array}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} \frac{x(\frac{l}{8}-x)}{h}, & 0\le x\le l/8\\ 0, & l/8\le x\le l\end{cases}$

ВАРИАНТ №14

1. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{2\pi x}{l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/5\\ \frac{25}{4l}(1-\cos\frac{\pi}{5})(x-l)^2\ , & l/5\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=ge^{x/4l}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G}=g\frac{3x}{2l}\sin\frac{\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/6\\ \frac{9}{25l}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-l)^2, & l/6\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{array}{l}\psi=g\left(e^{-2\pi vt/l}-e^{2\pi vt/l}\right)\\ \phi=0\end{array}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=(x-l)\sin\frac{\pi x}{2l}.$

ВАРИАНТ №15

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-l/8)(l/2-x)}{h}\ , & l/8\le x\le l/2\\ 0\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} \frac{3}{l}x^2\ , & 0\le x\le l/9\\ \frac{3}{64l}(x-l)^2\ , & l/9\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(1-\frac{4x}{l}\right)^2, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{4}-x)}{h}, & l/8\le x\le l/4\\ 0, & l/4\le x\le l\end{cases}$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}+e^{-\frac{x}{l}}\right)\cos\frac{3\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0\le x\le l/3\\ \frac{1}{28l}(x-l)^2, & l/3\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{array}{l}\phi=g\frac{vt}{l}e^{\frac{2\pi vt}{l}}\\ \psi=0\end{array}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-l)(\frac{l}{8}-x)}{h}, & l/8\le x\le l\end{cases}$

ВАРИАНТ №16

1. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} -7l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/3\\ -\frac{63}{18l}(x-l)^2\ , & l/3\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{3x}{2l}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=|x-\frac{l}{2}|\sin\frac{\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G}=ge^{\frac{x}{l}}\cos\frac{\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} -\frac{l}{6}(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 2l/3\\ -\frac{9}{4l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{array}{l}\psi=g\left(e^{-3\pi vt/l}-e^{3\pi vt/l}\right)\\ \phi=0\end{array}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=x\sin\frac{2\pi x}{l}.$

ВАРИАНТ №17

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-l/8)(l/4-x)}{h}\ , & l/8\le x\le l/4\\ 0\ , & l/4\le x\le l\end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} \frac{1}{7l}x^2\ , & 0\le x\le l/2\\ \frac{1}{7l}(x-l)^2\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{3x^2}{4l^2}\ ,\ F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} \frac{x(l/8-x)}{h}\ , & 0\le x\le l/8\\ 0\ , & l/8\le x\le l\end{cases}.$

4. $\mathcal{G}=g\left(e^{\frac{x}{l}}+1\right)\cos\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0\le x\le l/4\\ \frac{1}{63l}(x-l)^2, & l/4\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{array}{l}\phi=g\frac{vt}{l}e^{\frac{4\pi vt}{l}}\\ \psi=0\end{array}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} \frac{x(x-\frac{3l}{8})}{h}, & 0\le x\le 3l/8\\ 0, & 3l/8\le x\le l\end{cases}$

ВАРИАНТ №18

1. $f(x)=0\ ,\ F(x)=|x-\frac{l}{2}|\sin\frac{\pi x}{l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/6\\ \frac{9}{25l}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-l)^2\ , & l/6\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{2x^2}{l^2}+e^{x/l}\right)$, $f(x)=0$, $F(x)=(x-l)\sin\frac{\pi x}{2l}$.

4. $\mathcal{G}=ge^{\frac{2x}{l}}\sin\frac{\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/7\\ \frac{49}{9l}(1-\cos\frac{\pi}{7})(x-l)^2, & l/7\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\left(e^{-\pi vt/2l}-e^{\pi vt/2l}\right)\\ \phi=0\end{matrix}$, $f(x)=0$, $F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{2l}$.

ВАРИАНТ №19

1. $F(x)=0$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x(l/8-x)}{h}\ , & 0\le x\le l/8\\ 0\ , & l/8\le x\le l\end{cases}$.

2. $f(x)=0$, $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{7l}x^2\ , & 0\le x\le l/3\\ \frac{1}{28l}(x-l)^2\ , & l/3\le x\le l\end{cases}$.

3. $\mathcal{G}=g\left(1-e^{-\frac{2x}{l}}\right), F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-l)(\frac{l}{8}-x)}{h}, & l/8\le x\le l\end{cases}$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{3x^2}{l^2}-\frac{x}{l}\right)\cos\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases}\frac{1}{7l}x^2, & 0\le x\le 2l/3\\ \frac{4}{7l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\frac{vt}{l}e^{\frac{\pi vt}{2l}}\\ \psi=0\end{matrix}$ $, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 3l/8\\ \frac{(x-l)(x-\frac{3l}{8})}{h}, & 3l/8\le x\le l\end{cases}$

ВАРИАНТ №20

1. $f(x)=0$, $F(x)=(x-l)\sin\frac{\pi x}{2l}$.

2. $F(x)=0$, $f(x)=\begin{cases}-\frac{l}{6}(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le 2l/3\\ -\frac{9}{4l}(x-l)^2\ , & 2l/3\le x\le l\end{cases}$.

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}-\frac{6x^2}{l^2}\right)$, $f(x)=0$, $F(x)=x\sin\frac{2\pi x}{l}$.

4. $\mathcal{G}=g\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\cos\frac{3\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}2l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 2l/3\\ \frac{27}{l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\frac{vt}{l}e^{-\pi vt/3l}\\ \phi=0\end{matrix}$, $f(x)=0$, $F(x)=(x-l)\sin\frac{2\pi x}{l}$.

ВАРИАНТ №21

1. $F(x)=0$, $f(x)=\begin{cases}0\ , & 0\le x\le l/8\\ \frac{(x-l)(l/8-x)}{h}\ , & l/8\le x\le l\end{cases}$.

2. $f(x)=0$, $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{7l}x^2\ , & 0\le x\le l/4\\ \frac{1}{63l}(x-l)^2\ , & l/4\le x\le l\end{cases}$.

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}-1\right)$, $F(x)=0$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x(x-3l/8)}{h}\ , & 0\le x\le 3l/8\\ 0\ , & 3l/8\le x\le l\end{cases}$.

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}-1\right)\sin\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases}4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 2l/3\\ \frac{54}{l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\left(e^{-\frac{\pi vt}{4l}}-e^{\frac{\pi vt}{4l}}\right)\\ \psi=0\end{matrix}$ $, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l)(\frac{l}{4}-x)}{h}, & l/4\le x\le l\end{cases}$

ВАРИАНТ №22

1. $f(x)=0$, $F(x)=x\sin\frac{2\pi x}{l}$.

2. $F(x)=0$, $f(x)=\begin{cases}4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/7\\ \frac{49}{9l}(1-\cos\frac{\pi}{7})(x-l)^2\ , & l/7\le x\le l\end{cases}$.

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}+3\right)^2$, $f(x)=0$, $F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{2l}$.

4. $\mathcal{G}=g\frac{3x^2}{4l^2}\sin\frac{3\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/2\\ \frac{16(x-l)^2}{l}, & l/2\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{\pi vt/4l}\\ \phi=0\end{matrix}$, $f(x)=0$, $F(x)=\frac{x^2}{h}\sin\frac{\pi x}{l}$.

ВАРИАНТ №23

1. $F(x)=0$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x(x-3l/8)}{h}\ , & 0\le x\le 3l/8\\ 0\ , & 3l/8\le x\le l\end{cases}$.

2. $f(x)=0$, $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{7l}x^2\ , & 0\le x\le 2l/3\\ \frac{4}{7l}(x-l)^2\ , & 2l/3\le x\le l\end{cases}$.

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{3x}{l}-e^{-\frac{x}{l}}\right), F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 3l/8\\ \frac{(x-l)(x-\frac{3l}{8})}{h}, & 3l/8\le x\le l\end{cases}$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{2x}{l}+4\right)\cos\frac{\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases}-\frac{3x^2}{l}, & 0\le x\le l/3\\ -\frac{3(x-l)^2}{4l}, & l/3\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\frac{vt}{l}\left(e^{-\frac{\pi vt}{l}}-e^{\frac{\pi vt}{l}}\right)\\ \psi=0\end{matrix}$ $, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le l/2\\ \frac{(x-l)(\frac{l}{2}-x)}{h}, & l/2\le x\le l\end{cases}$

ВАРИАНТ №24

1. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{2l}.$

2. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} -2l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le 2l/3 \\ -\frac{27}{l}(x-l)^2\ , & 2l/3\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{2l}+e^{2x/l}\right)\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=(x-l)\sin\frac{2\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G}=ge^{-\frac{2x}{l}}\sin\frac{2\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 3l/4 \\ \frac{64(x-l)^2}{l}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), & 3l/4\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\left(e^{\pi vt/l}-e^{-\pi vt/2l}\right) \\ \phi=0\end{matrix}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{2l}.$

ВАРИАНТ №25

1. $F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\le x\le 3l/8 \\ \frac{(x-l)(x-3l/8)}{h}\ , & 3l/8\le x\le l \end{cases}.$

2. $f(x)=0\ ,\ F(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le 2l/3 \\ \frac{54}{l}(x-l)^2\ , & 2l/3\le x\le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(e^{\frac{x}{2l}}-\frac{3x^2}{4l}\right), F(x)=0, f(x)=\begin{cases} \frac{x(\frac{l}{4}-x)}{h}, & 0\le x\le l/4 \\ 0, & l/4\le x\le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G}=ge^{\frac{x}{4l}}\sin\frac{3\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{3x^2}{l}, & 0\le x\le l/4 \\ \frac{(x-l)^2}{3l}, & l/4\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\left(e^{-\frac{4\pi vt}{l}}-e^{\frac{\pi vt}{2l}}\right) \\ \psi=0\end{matrix}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} \frac{x(\frac{l}{4}-x)}{h}, & 0\le x\le l/4 \\ 0, & l/4\le x\le l \end{cases}$

Список литературы

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1973

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. Наука, 1971

[3] Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М. Наука, 1969

[4] Очан Ю.С. Методы математической физики. М. Высшая школа, 1965

[5] Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. М. Наука, 1970

[6] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М. Наука, 1971