УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 157, кн. 1 Физико-математические науки *2015*

УДК 517.957

О РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

И.Б. Бадриев, Г.З. Гарипова,
М.В. Макаров, В.Н. Паймушин, Р.Ф. Хабибуллин

Аннотация

Дана обобщенная постановка для задачи об определении напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем при наличии ограничений и проведено исследование ее корректности. Обобщенная постановка сформулирована в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Доказана теорема существования и единственности решения. Предложен итерационный метод решения задачи и исследована его сходимость.

Ключевые слова: трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, седловая точка, теорема разрешимости, теорема единственности, итерационный метод.

Введение

Задача об определении напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем при наличии ограничений на уровень формирующихся в заполнителе поперечных касательных напряжений представляет особый интерес, поскольку, как отмечается в [1], трехслойные панели с тонкими прочными композитными обшивками и легким заполнителем, благодаря своим уникальным свойствам, широко используются во многих отраслях техники. Главной особенностью таких конструкций является сочетание высокой изгибной жесткости и прочности с небольшой массой и хорошей способностью поглощать энергию при ударных воздействиях. Кроме того, трехслойные конструкции позволяют обеспечить хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства [2], а также обладают высокой технологичностью и вибростойкостью. Это и определяет их широкое применение в аэрокосмической технике, судостроении, транспортном машиностроении, а также в строительстве.

В настоящей работе рассматривается физически нелинейная и геометрически линейная задача о равновесии трехслойной пластины, составленной из двух несущих слоев и расположенного между ними трансверсально-мягким заполнителя, связанного с несущими слоями клеевым соединением. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения линейной модели Кирхгофа – Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям в поперечном направлении. Кроме того, задача рассматривается при ограничении, соответствующем идеальной упруго-пластической модели для заполнителя. Обобщенная постановка формулируется в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Исследуются свойства этого функционала – слабая полунепрерывность снизу, выпуклость и коэрцитивность относительно перемещений,

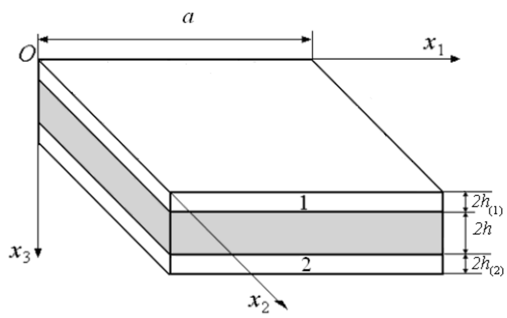

Рис. 1. Трехслойная пластина

слабая полунепрерывность сверху, вогнутость и антикоэрцитивность относительно касательного напряжения в заполнителе. Доказывается также слабая замкнутость множества ограничений на касательного напряжения в заполнителе. На основе этих свойств доказывается теорема разрешимости с использованием общих результатов о существовании седловых точек [3]. Для решения задачи предложен итерационный метод и исследована его сходимость. На каждом шаге процесса необходимо решить линейную задачу теории упругости и найти проекцию на выпуклое замкнутое множество.

Отметим, что при отсутствии ограничений задача о равновесии трехслойной оболочки с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически как линейной, так и нелинейной, постановке была рассмотрена в [4]. Задача формулировалась в форме отыскания стационарных точек некоторого функционала, исследована ее разрешимость и построены сеточные аппроксимации. В [5] рассматривалась задача о равновесии трехслойной пластины, где был предложен двухслойный алгоритм ее решения, основанный на опускании нелинейности на нижний слой, приведены и проанализированы результаты численных экспериментов. В работах [6–9] исследованы обобщенные постановки задач теории мягких сетчатых оболочек при наличии ограничений, а также методы их численного решения.

1. Постановка задачи

Рассматривается одномерная по пространственным координатам задача об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины, состоящей из двух внешних несущих слоев и расположенного между ними трансверсально-мягкого заполнителя, связанного с несущими слоями при помощи клеевого соединения (см. рис. 1). Для описания задачи используются соотношения [10, 11], основанные на применении к несущим слоям уравнений модели Кирхгофа–Лява, к заполнителю – уравнений теории упругости, упрощенных в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям в поперечном направлении.

Пусть a – длина пластины, $2h$, $2h_{(k)}$ – толщины заполнителя и k-го слоя соответственно (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X^1_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k-го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k-го слоя соответственно, $T^{11}_{(k)}$, $M^{11}_{(k)}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k-м слое соответственно, $H_{(k)} = h + h_{(k)}$.

Края несущих слоев пластины предполагаем жестко закрепленными, так что выполняются условия

$$u^{(k)}(x) = 0, \quad w^{(k)}(x) = 0, \quad dw^{(k)}/dx(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = a.$$

Задача рассматривается в геометрически линейной постановке, то есть предполагаем, что

$$T^{11}_{(k)} = B_{(k)}\,\frac{du^{(k)}}{dx}, \quad M^{11}_{(k)} = D_{(k)}\,\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}, \quad k = 1, 2,$$

где $B_{(k)} = 2h_{(k)}E^{(k)}/(1-\nu^{(k)}_{12}\nu^{(k)}_{21})$ – жесткость k-го слоя на растяжение-сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu^{(k)}_{12}$, $\nu^{(k)}_{21}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k-го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)}h^2_{(k)}/3$ – изгибная жесткость k-го слоя.

Обозначим через $U = \left(w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}\right)$ вектор перемещений точек срединной поверхности k-го слоя. Введем в рассмотрение функционалы

$$\Phi_k(U) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[B_{(k)}\left(\frac{du^{(k)}}{dx}\right)^2 + D_{(k)}\left(\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}\right)^2\right]dx-$$
$$-\int\limits_0^a \left(X^1_{(k)}u^{(k)} + X^3_{(k)}w^{(k)} + M^1_{(k)}\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)dx, \quad k = 1, 2,$$

где $M^1_{(k)}$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k-го слоя.

В силу вариационного принципа Лагранжа положение равновесия изолированных пластин характеризуется точкой минимума функционала Φ_1 и Φ_2. Рассматривая исследуемую задачу в контактной постановке, в соответствии с результатами [10–13] введем в рассмотрение контактные реактивные усилия взаимодействия q^1, представляющие собой касательные напряжения в заполнителе, постоянные по его толщине. Это требует введения дополнительных функционалов, учитывающих потенциальную энергию деформации заполнителя (поперечного сдвига и обжатия), а также работу неуравновешенных контактных усилий q^1:

$$\Phi_0(U) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a c_3\left(w^{(2)} - w^{(1)}\right)^2 dx,$$

$$\Phi_3(U, q^1) = \int\limits_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)}\,\frac{dw^{(k)}}{dx} + \left(u^{(2)} - u^{(1)}\right)\right] q^1\,dx,$$

$$\Phi_4(q^1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[\frac{2h}{G_{13}}\,\left(q^1\right)^2 + \frac{h^3}{3\,E_3}\,\left(\frac{dq^1}{dx}\right)^2\right]dx,$$

где G_{13}, E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_3 = E_3/(2h)$. Для q^1 предполагаем выполненными граничные условия

$$q^1(0) = q^1(a) = 0.$$

Считая, что зависимость между касательным напряжением q^1 и деформацией поперечного сдвига соответствует идеальной упруго-пластической модели, задачу рассмотрим при ограничении

$$\left|\,q^1(x)\right| \le q^1_*, \quad 0 < x < a, \tag{1}$$

где q^1_* – заданное предельное значение напряжения в заполнителе.

Условие (1) означает недопущение разрушения конструкции.

Обозначим через $V_k = \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(0,a)$ – пространства Соболева со скалярными произведениями

$$(u,v)_k = \int\limits_0^a \frac{d^k u(x)}{dx^k}\,\frac{d^k v(x)}{dx^k}\,dx,$$

через V_q – пространство Соболева функций, имеющих компактный носитель на $(0,a)$ и первую обобщенную производную, суммируемую с квадратом, со скалярным произведением

$$(u,v)_q = \frac{2h}{G_{13}} \int\limits_0^a u(x)\,v(x)\,dx + \frac{h^3}{3E_3}\int\limits_0^a \frac{du(x)}{dx}\,\frac{dv(x)}{dx}\,dx;$$

положим $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$, $K = \{q^1 \in V_q : \left| q^1(x)\right| \le q^1_*,\ 0 < x < a\}$.

Введем в рассмотрение функционал $L : V \times V_q \to R_1$ по формуле

$$L(U,q^1) = \Phi_0(U) + \Phi_1(U) + \Phi_2(U) + \Phi_3(U,q^1) - \Phi_4(q^1). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что функционалы Φ_0, Φ_1, Φ_2 корректно определены на V, функционалы Φ_3, L – на $V \times V_q$, функционал Φ_4 – на V_q. Скалярное произведение в V будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_V$.

Под обобщенным решением задачи об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем будем понимать такую функцию $(\widehat{U},\widehat{q}^{\,1}) \in V \times K$, что

$$L(\widehat{U},\widehat{q}^{\,1}) = \inf_{U\in V}\ \sup_{q^1\in K} L(U,q^1). \tag{3}$$

2. Исследование разрешимости задачи

Исследование разрешимости задачи будем проводить на основе общих результатов о существовании седловых точек [3]. Предварительно установим ряд свойств функционалов, входящих в определение (2) функционала L.

Лемма 1. *Функционалы Φ_j, $j = 0,1,2,4$, являются выпуклыми и слабо полунепрерывными снизу, функционалы Φ_j, $j = 1,2,4$, – строго выпуклыми.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функции φ_j, $j = 1,2,3$, определяемые формулами $\varphi_1(\xi_1) = \xi_1^2$, $\varphi_2(\xi_1) = -\xi_1$, $\varphi_3(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1-\xi_2)^2$. Эти функции являются непрерывными, функция φ_2 – выпуклой, а функция φ_1 – строго выпуклой.

Проверим, что φ_3 также является выпуклой функцией. Действительно, пусть $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $\eta = (\eta_1,\eta_2)$, $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)$ – произвольные вектора из R^2, $\alpha \in (0,1)$. В силу очевидного неравенства $b^2 - d^2 \ge 2d(b-d)$ имеем

$$(\xi_1-\xi_2)^2 - (\zeta_1-\zeta_2)^2 \ge 2(\zeta_1-\zeta_2)(\xi_1-\xi_2-(\zeta_1-\zeta_2)) = 2(\zeta_1-\zeta_2)(\xi_1-\zeta_1-(\xi_2-\zeta_2))$$

и

$$(\eta_1-\eta_2)^2 - (\zeta_1-\zeta_2)^2 \ge 2\,(\zeta_1-\zeta_2)\,(\eta_1-\zeta_1-(\eta_2-\zeta_2))\,.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\alpha\,(\xi_1-\xi_2)^2 + (1-\alpha)\,(\eta_1-\eta_2)^2 \ge (\zeta_1-\zeta_2)^2 + \\
&\quad + 2\,(\zeta_1-\zeta_2)\,(\alpha\,(\xi_1-\zeta_1) - \alpha\,(\xi_2-\zeta_2) + (1-\alpha)\,(\eta_1-\zeta_1) - (1-\alpha)\,(\eta_2-\zeta_2)) = \\
&\qquad = (\zeta_1-\zeta_2)^2 + 2\,(\zeta_1-\zeta_2)\,(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\eta_1 - \zeta_1 - \alpha\xi_2 - (1-\alpha)\eta_2 + \zeta_2)\,.
\end{aligned}$$

Полагая $\zeta_i = \alpha\xi_i + (1-\alpha)\eta_i$, получим, что функция φ_3 является выпуклой.

Имеем, что

$$\Phi_k(U) = \frac{B_{(k)}}{2}\,\Phi_k^1\left(\frac{du^{(k)}}{dx}\right) + \frac{D_{(k)}}{2}\,\Phi_k^1\left(\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}\right) + \Phi_k^2\left(u^{(k)}, w^{(k)}, \frac{dw^{(k)}}{dx}\right),\ k=1,2,$$

где

$$\Phi_k^1(y) = \int\limits_0^a \varphi_1(y)dx, \quad y \in Y_2 = L_2(0,a), \quad k=1,2,$$

$$\Phi_k^2(y,v,z) = \int\limits_0^a \Big(X_{(k)}^1\, y(x) + X_{(k)}^3\, v(x) + M_{(k)}^1\, z(x)\Big)\, dx, \quad y,\ v,\ z \in Y_2, \quad k=1,2.$$

В силу строгой выпуклости функции φ_1 функционалы Φ_k^1 также будут строго выпуклыми, функционалы Φ_k^2 являются линейными. Поэтому функционалы Φ_1, Φ_2 является строго выпуклым. Кроме того, Φ_1, Φ_2 непрерывны, а значит, слабо полунепрерывны снизу [3].

Далее,

$$\Phi_0(U) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a c_3\,\varphi_3\left(w^{(1)}, w^{(2)}\right) dx,$$

в силу выпуклости и непрерывности φ_3 функционал Φ_0 будет выпуклым и слабо полунепрерывным снизу.

Наконец,

$$\Phi_4(q^1) = \frac{1}{2}\,\left\|q^1\right\|_q^2, \tag{4}$$

поэтому функционал Φ_4 будет строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу. □

Лемма 2. *Функционал Φ_3 является билинейным и непрерывным по обоим аргументам.*

Доказательство. Справедливость утверждения леммы вытекает непосредственно из определения функционала Φ_3. При этом в силу теоремы Рисса – Фишера существует линейный непрерывный оператор $C : V \to V_q$ такой, что

$$\Phi_3(U, q^1) = (CU, q^1)_q = (U, C^* q^1)_V, \tag{5}$$

где $C^* : V_q \to V$ – сопряженный к C линейный непрерывный оператор. При этом оператор C – липшиц-непрерывный оператор с постоянной $\gamma > 0$, определяемой неравенствами вложения V_2 в V_1, V_2 и V_1 в Y_2. □

Обозначим $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2$. При этом с учетом (4) и (5) определяемый формулой (1) функционал L запишется в виде

$$L(U, q^1) = \Phi(U) + (CU, q^1)_q - \frac{1}{2}\,\left\|q^1\right\|_q^2. \tag{6}$$

Лемма 3. *Множество K является слабо замкнутым.*

Доказательство. Пусть $\{q_n^1\} \subset K$, $q_n^1 \to q_0^1$ в V_1 при $n \to +\infty$. Тогда $q_n^1 \to q_0^1$ в Y_2, а значит, существует подпоследовательность $\{q_{n_m}^1\}$, сходящаяся к q_0^1 почти всюду на $(0,a)$ (см. [14, с. 157]). Поэтому $|q_0^1(x)| \le q_*^1$ почти всюду на $(0,a)$ и $q_0^1 \in K$, то есть K – замкнутое множество. Кроме того, очевидно, что K выпукло, а значит, оно слабо замкнуто [3]. □

Напомним, что функционал F называется коэрцитивным [3], если $F(z) \to +\infty$ при $\|z\| \to +\infty$.

Лемма 4. *Функционалы* Φ *и* Φ_4 *являются коэрцитивными в* V *и* V_q *соответственно.*

Доказательство. Имеем, что $\Phi_0 \geq 0$,

$$\Phi_1(U) + \Phi_2(U) = \sum_{k=1}^{2} \frac{B_{(k)}}{2} \left\| u^{(k)} \right\|_1^2 + \sum_{k=1}^{2} \frac{D_{(k)}}{2} \left\| w^{(k)} \right\|_2^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \Phi_k^2 \left(u^{(k)}, w^{(k)}, \frac{dw^{(k)}}{dx} \right) \geq \frac{1}{2} \min \left\{ B_{(1)}, B_{(2)}, D_{(1)}, B_{(2)} \right\} \left\| U \right\|_V^2 -$$

$$- d \max \left\{ \|X_{(1)}^1\|_{Y_2}, \|X_{(2)}^1\|_{Y_2}, \|X_{(1)}^3\|_{Y_2}, \|X_{(2)}^3\|_{Y_2}, \|M_{(1)}^1\|_{Y_2}, \|M_{(2)}^1\|_{Y_2} \right\} \left\| U \right\|_V,$$

где $d > 0$ – постоянная, определяемая неравенствами вложения V_2 в V_1, V_2 и V_1 в Y_2. Поэтому $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2$ – коэрцитивный функционал.

Поскольку $\Phi_4(q^1) = \|q^1\|_q^2/2$, то функционал Φ_4 также коэрцитивен. □

Теорема 1. *Задача* (3) *имеет единственную седловую точку* $(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \in V \times K$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что $0 \in K$. Из лемм 1, 2, 4 вытекает, что функционал L удовлетворяет следующим условиям:

$\forall\, U \in V$ функционал $q^1 \to L(U, q^1)$ является вогнутым и полунепрерывным сверху,

$\forall\, q^1 \in K$ функционал $U \to L(U, q^1)$ является выпуклым и полунепрерывным снизу,

$$\lim_{\|U\|_V \to +\infty} L(U, 0) = \lim_{\|U\|_V \to +\infty} \left[\Phi_0(U) + \Phi_1(U) + \Phi_2(U) \right] = +\infty,$$

$$\lim_{\|q^1\|_q \to +\infty} L(0, q^1) = \lim_{\|q^1\|_q \to +\infty} \left[-\Phi_4(q^1) \right] = -\infty.$$

Поэтому из предложения VI.2.2 [3] вытекает существование по крайней мере одной седловой точки $(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \in V \times K$ функционала L, причем

$$L(\widehat{U}, \widehat{q}^1) = \min_{U \in V} \max_{q^1 \in K} L(U, q^1) = \max_{q^1 \in K} \min_{U \in V} L(U, q^1).$$

Единственность седловой точки следует из того, что для любого $U \in V$ функционал $q^1 \to L(U, q^1)$ является строго вогнутым, а для любого $q^1 \in K$ функционал $U \to L(U, q^1)$ является строго выпуклым. □

3. Итерационный метод

Если $(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \in V \times K$ – седловая точка L на $V \times K$, то

$$L(\widehat{U}, q^1) \leq L(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \leq L(U, \widehat{q}^1) \quad \forall\, U \in V, \quad \forall\, q^1 \in K,$$

или с учетом (6)

$$\Phi(\widehat{U}) + (C\widehat{U},\, q^1)_q - \frac{1}{2} \left\| q^1 \right\|_q^2 \leq \Phi(\widehat{U}) + (C\widehat{U},\, \widehat{q}^1)_q - \frac{1}{2} \left\| \widehat{q}^1 \right\|_q^2 \leq$$

$$\leq \Phi(U) + (CU, \widehat{q}^1)_q - \frac{1}{2} \left\| \widehat{q}^1 \right\|_q^2 \quad \forall\, U \in V, \quad \forall\, q^1 \in K. \quad (7)$$

Расписывая левое неравенство в (7), получаем, что $\widehat{q}^{\,1}$ – решение задачи минимизации

$$\frac{1}{2}\left\|q^1\right\|_q^2-(C\widehat{U},\,q^1)_q\geq\frac{1}{2}\left\|\,\widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2-(C\widehat{U},\,\widehat{q}^{\,1})_q\quad\forall\,q^1\in K$$

или

$$\frac{1}{2}\left\|q^1-C\widehat{U}\right\|_q^2\geq\frac{1}{2}\left\|\,\widehat{q}^{\,1}-C\widehat{U}\right\|_q^2\quad\forall\,q^1\in K,$$

то есть $\widehat{q}^{\,1}=P_K(C\widehat{U})$, где P_K – оператор проектирования в V_q на замкнутое, выпуклое множество K. Из свойств оператора проектирования (см. [15, с. 20]) вытекает, что $\widehat{q}^{\,1}$ является решением вариационного неравенства

$$\left(\widehat{q}^{\,1}-C\widehat{U},\,q^1-\widehat{q}^{\,1}\right)_q\geq 0\quad\forall\,q^1\in K,$$

а значит,

$$\left(\widehat{q}^{\,1}-\left(\widehat{q}^{\,1}-\tau\left(\widehat{q}^{\,1}-C\widehat{U}\right)\right),\,q^1-\widehat{q}^{\,1}\right)_q\geq 0\quad\forall\,q^1\in K,\quad\forall\,\tau>0,$$

откуда так же, как и выше, имеем, что

$$\widehat{q}^{\,1}=P_K\left(\widehat{q}^{\,1}-\tau\left(\widehat{q}^{\,1}-C\widehat{U}\right)\right).\tag{8}$$

Расписывая теперь правое неравенство в (7), получаем, что $\widehat{U}$ – решение задачи минимизации

$$\Phi(U)+(CU,\,\widehat{q}^{\,1})_q\geq\Phi(\widehat{U})+(C\widehat{U},\,\widehat{q}^{\,1})_q\quad\forall\,U\in V,$$

которая эквивалентна (см. [15, с. 84]) вариационному неравенству

$$(\Phi'(\widehat{U}),U-\widehat{U})_V+(CU-C\widehat{U},\,\widehat{q}^{\,1})_q\geq 0\quad\forall\,U\in V,\tag{9}$$

где Φ' – производная Гато функционала Φ.

Таким образом, $(\widehat{U},\widehat{q}^{\,1})\in V\times K$ – седловая точка L на $V\times K$ тогда и только тогда, когда выполнены (8), (9).

Нетрудно проверить, что Φ' – сильно монотонный оператор, то есть

$$(\Phi'(U)-\Phi'(W),\,U-W)_V\geq\alpha\,\|U-W\|_V^2\geq 0\quad\forall\,U,\,W\in V,\tag{10}$$

где $\alpha=\min\{B_{(1)},\,B_{(2)},\,D_{(1)},D_{(2)}\}$.

Напомним [17], что оператор $A:V\to V$ называется жестко нерастягивающим, если

$$(A(U)-A(W),\,U-W)_V\geq\|AU-AW\|_V^2\quad\forall\,U,\,W\in V.\tag{11}$$

Известно (см., например, [15, с. 63]), что оператор проектирования на замкнутое, выпуклое множество является жестко нерастягивающим (а значит, и нерастягивающим).

Для решения задачи (3), исходя из (8), (9), рассмотрим следующий итерационный процесс.

Пусть $q_0^1\in K$ – произвольный элемент. Для $n=0,1,\ldots$ найдем U_n как решение задачи

$$(\Phi'(U_n),\,U-U_n\,)_V+(CU-CU_n,\,q_n^1\,)_q\geq 0\quad\forall\,U\in V.\tag{12}$$

Полагаем затем

$$q_{n+1}^1=P_K\left(q_n^1-\tau\left(q_n^1-CU_n\right)\right).\tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$0 < \tau < 2\,\alpha/(2\,\alpha + \gamma) \tag{14}$$

(γ *– постоянная липшиц-непрерывности оператора* C), $(\widehat{U}, \widehat{q}^{\,1}) \in V \times K$ *– решение задачи* (3), *итерационная последовательность* $\left\{(U_n,\, q_n^1)\right\}_{n=0}^{+\infty}$ *построена согласно* (12), (13). *Тогда* U_n *сходится сильно в* V *к* $\widehat{U}$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. По аналогии с [16], полагая $U = U_n$ в неравенстве (9), $U = \widehat{U}$ в неравенстве (12) и складывая полученные неравенства, имеем

$$-(\Phi'(U_n) - \Phi'(\widehat{U}),\, U_n - \widehat{U})_V + (C\widehat{U} - CU_n,\, \widehat{q}^{\,1} - q_n^1)_q \geq 0,$$

следовательно, с учетом (10)

$$\alpha \left\|U_n - \widehat{U}\right\|_V^2 \leq (\Phi'(U_n) - \Phi'(\widehat{U}), U_n - \widehat{U}\,)_V \leq (C\widehat{U} - CU_n,\, \widehat{q}^{\,1} - q_n^1\,)_q\,. \tag{15}$$

В силу нерастягиваемости оператора P_K из (8), (13), принимая во внимание (15) и липшиц-непрерывность C с постоянной γ, получаем

$$\begin{aligned}
\left\|q_{n+1}^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2 &\leq \left\|q_n^1 - \tau\left(q_n^1 - CU_n\right) - \widehat{q}^{\,1} + \tau\left(\widehat{q}^{\,1} - C\widehat{U}\right)\right\|_q^2 = \\
&= \left\|(1-\tau)\left(q_n^1 - \widehat{q}^{\,1}\right) + \tau\left(CU_n - C\widehat{U}\right)\right\|_q^2 = (1-\tau)^2\left\|q_n^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2 + \\
&\quad + 2\tau(1-\tau)\left(q_n^1 - \widehat{q}^{\,1}, CU_n - C\widehat{U}\right)_q + \tau^2\left\|CU_n - C\widehat{U}\,\right\|_q^2 \leq \\
&\leq (1-\tau)^2\left\|q_n^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2 + \left(-2\tau(1-\tau)\alpha + \tau^2\gamma\right)\left\|U_n - \widehat{U}\,\right\|_V^2.
\end{aligned}$$

Из условия (14) вытекает, что $|1-\tau| < 1$, $\beta = \tau\,(2(1-\tau)\alpha - \tau\gamma) > 0$. Поэтому

$$\left\|q_{n+1}^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2 \leq \left\|q_{n+1}^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2 + \beta\left\|U_n - \widehat{U}\right\|_V^2 \leq \left\|q_n^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2. \tag{16}$$

Из (16) следует, что ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\left\{\left\|q_n^1 - \widehat{q}^{\,1}\right\|_q^2\right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к некоторому пределу a. Переходя к пределу при $n \to +\infty$ в (16) получим, что

$$a \leq a + \lim_{n\to+\infty}\left\|U_n - \widehat{U}\,\right\|_V^2 \leq a,$$

то есть в последнем соотношении всюду должны стоять равенства, а значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|U_n - \widehat{U}\,\right\|_V^2 = 0$. □

Работа выполнена в рамках договора № 02.G25.31.0122 между НПО ОАО «ОКБ им. М.П. Симонова» и Министерством образования и науки РФ по реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ», а также за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-05686, 15-08-06018).

Summary

I.B. Badriev, G.Z. Garipova, M.V. Makarov, V.N. Paimushin, R.F. Chabibullin. On Solving Physically Nonlinear Equilibrium Problems for Sandwich Plates with a Transversely Soft Filler.

The generalized statement for the problem of determining the stress-strain state of sandwich plates with a transversely soft filler in the presence of constraints is given. Its correctness is discussed. This statement is formulated in the form of finding a saddle point of some functional. The existence and uniqueness theorems are proved. An iterative method for solving the problem is proposed. Its convergence is investigated.

Keywords: sandwich plate, transversely soft filler, saddle point, existence theorem, uniqueness theorem, iterative method.

Литература

1. *Угримов С.В.* Расчет трехслойных пластин с композитными обшивками // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт». – Харьков, 2014. – Вып. 3 (79). – С. 47–56.
2. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 3. – P. 66–71.
3. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1976. – 402 p.
4. *Карчевский М.М., Паймушин В.Н.* О вариационных задачах теории трехслойных пологих оболочек // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1217–1221.
5. *Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
6. *Badriev I.B., Banderov V.V.* Iterative Methods for Solving Variational Inequalities of the Theory of Soft Shells // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 4. – P. 354–365.
7. *Badriev I.B., Banderov V.V.* Numerical method for solving variation problems in mathematical physics // Appl. Mech. Mater. – 2014. – V. 668–669. – P. 1094–1097.
8. *Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A.* On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2013. – No 3. – P. 17–35.
9. *Badriev I.B., Shagidullin R.R.* A study of the convergence of a recursive process for solving a stationary problem of the theory of soft shells // J. Math. Sci. – 1995. – V. 73, No 5. – P. 519–525.
10. *Paimushin V.N.* Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Appl. Mechanics. – 1987. – V. 23, No. 11. – P. 1038–1043.
11. *Paimushin V.N., Bobrov S.N.* Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mech. Composite Mater. – 2000. – V. 36, No 1. – P. 59–66.
12. *Паймушин В.Н.* К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.

13. *Паймушин В.Н.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171–180.

14. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

15. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Итерационные методы решения вариационных неравенств в гильбертовых пространствах. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2007. – 152 с.

16. *Badriev I.B., Karchevskii M.M.* Convergence of the iterative Uzawa method for the solution of the stationary problem of seepage theory with a limit gradient // J. Sov. Math. – 1989. – V. 45, No 4. – P. 1302–1309.

17. *Opial Z.* Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Am. Math. Soc. – 1967. – V. 73, No 4. – P. 591–597.

Поступила в редакцию
15.11.14

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Ildar.Badriev1@mail.ru*

Гарипова Гульназ Зуфаровна – студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *gulnazgarif@gmail.com*

Макаров Максим Викторович – младший научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет; аспирант кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: *makarovmaksim@mail.ru*

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева; главный научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

Хабибуллин Рустэм Фарукович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.