Известия вузов. Математика
2014, № 5, с. 75–79

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Р.Б. САЛИМОВ

К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В МНОГОСВЯЗНОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Аннотация. Предлагается новый подход к решению однородной краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной круговой области путем сведения ее к задаче об определении аналитической в области функции по известным граничным значениям аргумента функции в особом случае.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, индекс задачи, оператор Шварца.

УДК: 517.54

Рассматривается применение предложенного в работе [1] подхода к решению однородной краевой задачи Гильберта для аналитической в многосвязной круговой области функции в особом (по терминологии И.Н. Векуа [2], с. 258) случае, когда индекс задачи (по И.Н. Векуа) неотрицателен и меньше порядка связности области, уменьшенного на единицу. В последнем случае рассматриваемая задача исследована недостаточно полно (это отмечено, в частности, в [3], сс. 406, 407).

В данной работе используются обозначения и формулы из [1].

Пусть D является $(m+1)$-связной круговой областью, ограниченной полными окружностями $L_0, L_1, \dots, L_m$ без общих точек, расположенными в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, из которых L_0 охватывает остальные.

Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в области D, непрерывно продолжимую на ее границу $L = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L_j$ по краевому условию

$$\mathrm{Re}[(a(t) + ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = 0, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — заданные на L действительные функции точки t контура L, удовлетворяющие условию Гёльдера, т. е. функции класса H на L, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L.

На L установим положительное направление обхода, при котором область D остается слева. Пусть t_{j0} – фиксированная точка кривой L_j. В дальнейшем для функции $f(t)$, заданной на L_j, под $f(t_{j0}+0)$ и $f(t_{j0}-0)$ будем понимать пределы, к которым стремится $f(t)$, когда точка t стремится к t_{j0} соответственно в отрицательном и положительном направлениях.

Поступила 15.03.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00636-а).

Краевое условие (1) запишем так:

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}F(t)] = 0, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\nu(t) = \arg G(t)$ — ветвь, непрерывная всюду на L, за исключением, быть может, точек t_{j0}, для которых $\nu(t_{j,0} - 0) - \nu(t_{j,0} + 0) = 2\pi\frac{\varkappa_j}{2}$, причем $\varkappa_j/2$ — целое число, $j = \overline{0,m}$.

Число $\varkappa = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_j$ назовем индексом задачи Гильберта (2), следуя Н.И. Мусхелишвили ([4], с. 144) (заметим, что в [2], с. 243, и [3], с. 385, индексом этой задачи называется число $\varkappa/2$).

Здесь рассмотрим случай, когда $0 \le \varkappa/2 < m$.

1. Обозначим через q_j, R_j соответственно центр и радиус окружности L_j, $j = \overline{0,m}$, считая, что $q_0 = 0$, $R_0 = 1$. Примем $t_{00} = 1$, $t_{j0} = q_j + R_j$, $j = \overline{1,m}$. Пусть $t = q_j + R_j e^{i\gamma}$, $0 \le \gamma < 2\pi$, — точка окружности L_j; через s будем обозначать дуговую абсциссу указанной точки кривой L_j, $j = \overline{0,m}$, отсчитываемую от точки t_{j0} в положительном направлении, $s = (2\pi - \gamma)R_j$ при $j = \overline{1,m}$. Под $\arg(z - q_j)$ будем понимать непрерывную ветвь, однозначную в круге $|z| < 1$, разрезанном по линии, состоящей из отрезка с концами $z = q_j$, $z = t_{j0}$ и линии l_j, лежащей внутри области D и соединяющей точки t_{j0}, t_{00}, $j = \overline{0,m}$ (при $j = 0$ линия l_j отсутствует). Будем считать, что эта ветвь на L_j принимает значение $\arg(t - q_j) = \gamma$, $0 \le \gamma < 2\pi$.

Пусть $t_j = q_j + R_j e^{i\gamma_j}$, $0 \le \gamma_j < 2\pi$, — некоторая точка окружности L_j, положение этой точки, т. е. число γ_j, $j = \overline{1,m}$, будем считать незаданным.

Пусть $\arg(z - t_j)$ — непрерывная ветвь, однозначная в круге $|z| < 1$, разрезанном по линии, состоящей из направленной как L_j дуги $t_j t_{j0}$ этой окружности и вышеуказанной кривой l_j. Будем считать, что эта ветвь при $\gamma_j > 0$ на окружности L_j в точках левого берега разреза по дуге $t_j t_{j0}$ принимает значения $\arg(t - t_j) = (-\pi + \gamma + \gamma_j)/2$, $0 \le \gamma < \gamma_j$.

2. Введем в рассмотрение функцию $p_j(t) = 1$ на вышеуказанной дуге $t_j t_{j0}$ окружности L_j, $p_j(t) = 0$ на остальной части L_j и на всех других окружностях — компонентах L, $j = \overline{1,m}$. Пусть z_0 — заданная точка области D, n_j — произвольное целое число, $j = \overline{0,m}$, $n_0 = 0$. Как и в работе [1], зная граничные значения на L_j

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = \nu(t) + \sum_{j=1}^{m}\left[2\pi p_j(t) + 2\arg\frac{t - t_j}{t - q_j} + (1 + \varkappa_j/2)\arg(t - q_j)\right] + \\ + \frac{\pi}{2} + \pi n_j - (m + \varkappa/2)\arg(t - z_0), \quad j = \overline{0,m},$$

с помощью оператора Шварца (см., например, [3], с. 383; [5]) найдем однозначную аналитическую в области D функцию $\Phi(z) = S(\Phi(t), z) + iv_0$, взяв произвольную действительную постоянную $v_0 = 0$ и определив числа γ_j, n_j из условия однозначности функции $\Phi(z)$ ([3], с. 384).

Согласно результатам статьи [1] если выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{m+\varkappa/2} \int_L \operatorname{Re}[\mu_j/(t - z_0)^j]\alpha_k(t)ds = 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{3}$$

то решение задачи (2) определяется формулой

$$F(z) = ie^{i\Phi(z)}(z-z_0)^{m+\varkappa/2}\Big\{S\Big(-\sum_{j=1}^{m+\varkappa/2}\operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}, z\Big) + i\beta_0 + \\ + \sum_{j=1}^{m+\varkappa/2}\frac{\mu_j}{(z-z_0)^j}\Big\}\Big/\Big(\prod_{j=1}^{m}\Big[(z-q_j)^{1+\varkappa_j/2}\cdot\Big(\frac{z-t_j}{z-q_j}\Big)^2\Big]\Big), \quad (4)$$

где μ_j — неизвестные комплексные постоянные, β_0 — действительная произвольная постоянная.

Так как ищем решение $F(z)$ краевой задачи (2), непрерывное на L, то мы должны потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках последней формулы обращалось в нуль второго порядка в точках t_{j_1}, $j_1 = \overline{1,m}$. С этой целью потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\operatorname{Im} S\Big(-\sum_{j=1}^{m+\varkappa/2}\operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}, t_{j_1}\Big) + \beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\varkappa/2}\operatorname{Im}\frac{\mu_j}{(t_{j_1}-z_0)^j} = 0, \quad j_1 = \overline{1,m}. \quad (5)$$

Кроме того, указанное выражение из (4), заменив в нем предварительно t на $t_* \in L$, запишем для $z = t = (q_{j_1} + R_{j_1}e^{i\gamma}) \in L_{j_1}$. Далее, потребуем, чтобы производная по γ от него в точке t_{j_1} обращалась в нуль, и будем иметь

$$\sum_{j=1}^{m+\varkappa/2}\Big\{\operatorname{Im}\Big[S\Big(\operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t_*-z_0)^j}, t\Big)\Big]'_\gamma\Big|_{\gamma=\gamma_{j_1}} + \operatorname{Im}\frac{\mu_j j R_{j_1}e^{i\gamma_{j_1}}}{(t_{j_1}-z_0)^{j+1}}\Big\} = 0, \quad (6)$$

здесь $j_1 = \overline{1,m}$. Последние условия (5), (6) являются необходимыми для непрерывности функции $F(z)$ формулы (4) в точках t_{j_1}. Можно показать, что они являются и достаточными.

Соотношения (3), (5), (6) представляют собой систему линейных $3m$ уравнений с $\varkappa+2m+1$ действительными неизвестными $\operatorname{Re}\mu_j$, $\operatorname{Im}\mu_j$, β_0.

При выполнении условий (3) оператор Шварца в формулах (4)–(6) определяет однозначную функцию и представляет собой интеграл по кривой L с плотностью $\sum_{j=1}^{m+\varkappa/2}\operatorname{Re}[\mu_j/(t-z_0)^j]$ и однозначным ядром ([3], с. 384).

Не приводя явных выражений, будем считать, что в системе уравнений (3), (5), (6) коэффициенты при неизвестных $\operatorname{Re}\mu_j$, $\operatorname{Im}\mu_j$, $j = \overline{1,m}$, уже вычислены. Отметим лишь, что в уравнении (5) коэффициент при неизвестном $\operatorname{Re}\mu_j$ равен значению суммы

$$\operatorname{Im} S\Big(-\operatorname{Re}\frac{1}{(t_*-z_0)^j}, t\Big) + \operatorname{Im}\frac{1}{(t-z_0)^j}$$

в точке $t = t_{j1}$, в уравнении (6) — значению производной по γ от последней суммы при $\gamma = \gamma_{j1}$, когда $t = q_{j1} + R_{j1}e^{i\gamma}$, причем существование указанной производной от первого слагаемого последней суммы следует из результатов, приведенных в ([3], с. 43).

В случае, когда $0 \le \varkappa < m-1$, число неизвестных $\varkappa + 2m + 1 < 3m$ — числа уравнений однородной системы (3), (5), (6). Обозначим ранг матрицы коэффициентов этой системы через r. Если $r = \varkappa + 2m + 1$, то система имеет только нулевое решение, краевая задача (2) имеет только нулевое решение. Если $r < \varkappa + 2m + 1$ — числа неизвестных, то система имеет нормальную фундаментальную совокупность $(\varkappa + 2m + 1 - r)$ ненулевых решений

([6], с. 79), которой отвечает $(\varkappa + 2m + 1 - r)$ линейно независимых решений однородной задаче (2) согласно (4).

Итак, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leq \varkappa < m-1$. *Тогда если* $r = \varkappa+2m+1$, *то однородная краевая задача* (2) *имеет единственное нулевое решение. Если* $r < \varkappa + 2m + 1$, *то однородная краевая задача* (2) *имеет* $(\varkappa+2m+1-r)$ *линейно независимых ненулевых решений, определяемых по формуле* (4).

При $\varkappa = m - 1$ (для нечетного m) число неизвестных $(\varkappa + 2m + 1)$ системы (3), (5), (6) будет равно числу $3m$ уравнений системы. Если $r = 3m$ ($r \geq 3$, так как $m \geq 1$), то эта система и задача (2) имеют единственное нулевое решение. Если $r < 3m$, то нормальной фундаментальной совокупности $3m-r$ решений указанной системы отвечают $3m-r$ линейно независимых ненулевых решений однородной задачи (2) согласно (4). Поэтому справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\varkappa = m-1$. *Тогда если* $r = 3m$, *то задача* (2) *имеет единственное нулевое решение. Если* $r < 3m$, *то задача* (2) *имеет* $(3m - r)$ *линейно независимых ненулевых решений, определяемых по формуле* (4).

Если $\varkappa \geq m$ ($\varkappa < 2m$), то число неизвестных $(\varkappa + 2m + 1) > 3m$ — числа уравнений системы (3), (5), (6) и $r \leq 3m$. Тогда эта система имеет $(\varkappa+2m+1-r)$ решений, образующих нормальную фундаментальную совокупность решений. Каждому такому решению отвечает соответствующее решение (4) задачи (2).

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если* $\varkappa \geq m$ ($\varkappa < 2m$) *и* $r = 3m$, *то однородная краевая задача* (2) *имеет* $\varkappa - m + 1$ *линейно независимых ненулевых решений, определяемых по формуле* (4). *Если* $\varkappa \geq m$ ($\varkappa < 2m$) *и* $r < 3m$, *то число таких решений будет равно* $(\varkappa + 2m + 1 - r)$.

Ненулевые решения краевой задачи (2), указанные в теореме 1 при $r < \varkappa + 2m + 1$ и в теоремах 2, 3 при $r < 3m$, могут существовать только в исключительных случаях: при выполнении дополнительных условий, налагаемых на элементы матрицы коэффициентов системы (3), (5), (6), — условий обращения в нуль всех миноров $(r + 1)$-го порядка указанной матрицы, содержащих внутри себя базисный минор этой матрицы (см., например, [6], с. 82). Вопрос о совместности совокупности последних условий, т. е. о существовании соответствующих ненулевых решений системы (3), (5), (6) и задачи (2) в любой из теорем требует особого рассмотрения в каждом отдельном случае с учетом того, что коэффициенты системы зависят от формы области D и значений функции $\nu(t)$ краевого условия (2), влияющих на величины $\varkappa$, γ_j, $j = \overline{1,m}$. В ([2], сс. 274, 275) приведен пример, показывающий, что краевая задача (2) может иметь $(\varkappa/2 + 1)$ линейно независимых решений при $0 \leq \varkappa/2 \leq m - 1$ (в наших обозначениях).

В условиях теорем 1–3 такие решения могут появиться при соответственно $r = \varkappa/2+2m$, $r = 3m - 1 - \varkappa/2$, $r = \varkappa/2 + 2m$.

Уместно отметить, что согласно теореме 3 при выполнении условий $m \leq \varkappa < 2m$, $r = 3m$ ненулевые линейно независимые решения однородной краевой задачи (2) существуют, их число $(\varkappa - m + 1)$ зависит от индекса $\varkappa$ задачи и порядка связности области. Согласно результатам Ф.Д. Гахова ([3], с. 399) при $\varkappa/2 \geq m$ число ненулевых линейно независимых решений задачи (2) также равно $(\varkappa - m + 1)$. Поэтому $r = 3m$.

Общее ненулевое решение краевой задачи (2) представляет собой линейную комбинацию указанных в каждой из теорем 1–3 ненулевых линейно независимых решений с действительными коэффициентами.

Общий случай многосвязной области с границей, состоящей из простых замкнутых контуров Ляпунова ([4], с. 28), приводится к рассмотренному в данной статье случаю с помощью функции, отображающей конформно исходную многосвязную область на круговую область указанного выше вида аналогично тому, как это делается, когда область является односвязной ([4], с. 155).

Литература

[1] Салимов Р.Б. *Модификация нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной круговой области*, Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **12** (1), 32–38 (2012).

[2] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Физматгиз, М., 1959).

[3] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

[4] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

[5] Mityushew V.V., Adler P.M. *Schwarz problem for multiply connected domains and its application to diffusion around fractal*, Complex Variables **47** (4), 303–324 (2002).

[6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра* (Наука, М., 1974).

Р.Б. Салимов

профессор, заведующий кафедрой высшей математики,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,

e-mail: salimov@5354.ru

R.B. Salimov

To a solution of the homogeneous Riemann–Hilbert boundary-value problem for analytic function in multiconnected circular domain in a special case

Abstract. We present a new approach to solution of the homogeneous Riemann–Hilbert boundary-value problem for analytic function in multiconnected circular domain. This approach is based on definition of analytic function by known boundary values of its argument in a special case.

Keywords: Riemann–Hilbert boundary-value problem, index of a problem, Schwarz's operator.

R.B. Salimov

Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics,
Kazan State University of Architecture and Engineering,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043 Russia,

e-mail: salimov@5354.ru