Модули, близкие к проективным и инъективным

А.Н. Абызов

Институт математики и механики
Казанский (Приволжский) федеральный университет

ПОЧТИ ПРОЕКТИВНЫЕ И ПОЧТИ ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Почти проективные и почти инъективные модули

Baba, Harada, 1989

Правый R-модуль M называется *почти инъективным*, если для каждого правого R-модуля N и каждого гомоморфизма $f \in Hom(A, M)$, где $A \leq N$, либо для некоторого $g \in Hom(N, M)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, "g"] \\ & M & \end{tikzcd},$$

либо для некотого ненулевого идемпотента $\pi \in End(N)$ и гомоморфизма $h \in Hom(M, N)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, "\pi"] & \pi(N) \\ & M \arrow[urr, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

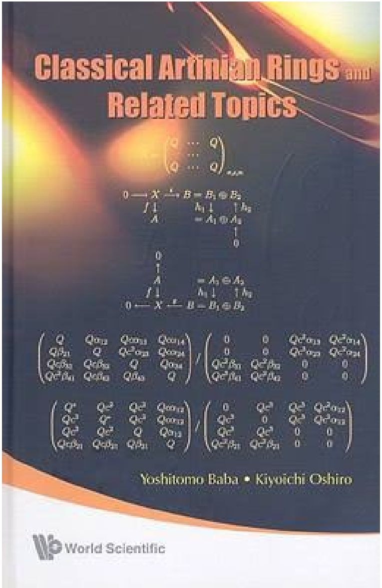
Правый R-модуль M называется *почти проективным,* если для каждого правого R-модуля N и каждого гомоморфизма $f \in Hom(M, N/A)$, где $A \leq N$, либо для некоторого $g \in Hom(M, N)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r] & N/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

либо для некоторого ненулевого идемпотента $\pi \in End(N)$ и гомоморфизма $h \in Hom(\pi(N), M)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi(N) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r] & N/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1. Y. Baba, Note on almost M-injectives, Osaka J. Math., 26 (1989), 687-698.
2. M. Harada, T. Mabuchi, On almost M-projectives, Osaka J. Math., 26 (1989), 837-848.
3. Y. Baba, M. Harada, On almost M-projectives and almost M-injectives., Tsukuba J. Math., 14 (1990), 53-69.
4. M. Harada, On almost relative injectives on Artinian modules, Osaka J. Math., 27 (1990), 963-971.
5. M. Harada, Direct sums of almost relative injective modules, Osaka J. Math., 28 (1991), 751-758.
6. M. Harada, Note on almost relative projectives and almost relative injectives, Osaka J. Math., 29 (1992), 435-446.
7. M. Harada, Almost projective modules, J. Algebra, 159 (1993), 150-157.


Classical Artinian Rings and
Related Topics
Yoshitomo Baba • Kiyoichi Oshiro
World Scientific

1. A. Alahmadi, S. K. Jain, A note on almost injective modules, Math. J. Okayam, 51 (2009), 101-109.
2. A. Alahmadi, S. K. Jain, S. Singh, Characterizations of Almost Injective Modules, Contemp. Math., 634 (2015), 11-17.
3. S. Singh, Almost relative injective modules, Osaka J. Math., 53 (2016), 425- 438.
4. M. Arabi-Kakavand, S. Asgari, Y. Tolooe, Rings Over Which Every Module Is Almost Injective, Communications in Algebra, 44 (2016), 2908-2918.
5. M. Arabi-Kakavand, S. Asgari, H. Khabazian, Rings for which every simple module is almost injective, Bull. Iranian Math. Soc., 42 (2016), 113-127.
6. S. Singh Uniform almost relative injective modules Journal of Algebra Volume 478, 15 May 2017, Pages 353-366
7. Marzieh Arabi-Kakavand, Shadi Asgari, Yaser Tolooei Noetherian rings with almost injective simple modules Communications in Algebra Volume 45, 2017 - Issue 8

Почти проективные и почти инъективные модули

Если каждый простой правый R-модуль почти инъективен относительно каждого модуля из категории $\sigma(M)$, то модуль M называется *почти V-модулем.*
Кольцо R называется *правым почти V-кольцом,* если каждый простой правый R-модуль является почти инъективным.

Теорема[M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgary, Y. Tolooei 2016]

Для кольца R следующие условия равносильны:

1. кольцо R является правым почти V-кольцом;
2. если M – правый R-модуль, то дополнение по пересечению для каждого простого подмодуля модуля M является прямым слагаемым модуля M;
3. инъективная оболочка каждого простого правого R-модуля является либо простым модулем, либо проективным модулем длины два.

Почти проективные и почти инъективные модули

Описать кольца, над которыми каждый правый R-модуль является почти инъективным (M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgary, Y. Tolooei 2016).

Описать кольца, над которыми каждый правый R-модуль является почти проективным.

Описать кольца, над которыми каждый простой правый R-модуль является почти проективным.

Почти проективные и почти инъективные модули

Теорема. [M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgary, H. Khabazian 2016]

Для полусовершенного кольца R следующие условия равносильны:

(1) над кольцом R каждый правый R-модуль является почти инъективным;

(2) R – артиново полуцепное кольцо и $J(R)^2 = 0$.

Теорема. [M. Arabi-Kakavand, Sh. Asgary, Y. Tolooei 2016]

Если над кольцом R каждый правый R-модуль является почти инъективным, то R – полуартиново справа кольцо и $Loewy(R_R) \leq 2$.

Почти проективные и почти инъективные модули

Теорема.

Для модуля M следующие условия равносильны:

1) в категории $\sigma(M)$ каждый простой модуль является почти проективным;
2) каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является либо полупростым модулем, либо содержит ненулевой M-инъективный подмодуль;
3) в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является I_0-модулем.

Теорема.

Кольцо R является правым обобщенным SV-кольцом в точности тогда, когда каждый простой правый R-модуль является почти проективным.

Почти проективные и почти инъективные модули

Теорема.

Для I-конечного кольца R следующие условия равносильны:

1) каждый правый R-модуль является почти проективным;
2) каждый простой правый R-модуль является почти проективным;
3) R – артиново полуцепное кольцо и $J^2(R) = 0$.

Теорема.

Для регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) каждый правый R-модуль является I_0-модулем;
2) R – правое SV-кольцо;
3) каждый правый R-модуль является почти проективным;
4) каждый простой правый R-модуль является почти проективным.

Почти проективные и почти инъективные модули

Теорема.

Для модуля M следующие условия равносильны:

1) M является почти V-модулем;
2) каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является либо V-модулем, либо содержит ненулевое прямое слагаемое, которое является проективным объектом в категории $\sigma(M)$;
3) в модуле M существует семейство локальных подмодулей $(A_i)_{i \in I}$ длины два, для которого выполнены условия
   a) A_i – M-инъективный и M-проективный для каждого $i \in I$;
   b) $J(M) = \oplus_{i \in I} J(A_i)$
   c) $M/J(M)$ – V-модуль.

Почти проективные и почти инъективные модули

Теорема.

Для нетерова справа кольца R следующие условия равносильны:

1) каждый правый R-модуль является прямой суммой инъективного модуля и V - модуля;
2) каждый правый R-модуль является прямой суммой проективного модуля и V - модуля;
3) инъективная оболочка каждого простого правого R-модуля является либо простой, либо проективным модулем длины два;
4) в кольце R существует семейство ортогональных идемпотентов $e_1, \dots e_n$, для которого выполнены условия
   a) $e_i R$ – инъективный локальный правый R-модуль длины два для каждого $1 \leq i \leq n$;
   b) $J(P) = \oplus_{i=1}^{n} J(e_i R)$;
   c) $\oplus_{i=1}^{n} e_i R$ – идеал кольца R;
   d) $R/J(R)$ – правое V-кольцо.
5) R – почти правое V-кольцо.

Теорема.

Для регулярного кольца R следующие условия равносильны:

1) R – правое V-кольцо;
2) каждый правый R-модуль является прямой суммой инъективного модуля и V-модуля;
3) каждый правый R-модуль является прямой суммой проективного модуля и V-модуля.
4) R – почти правое V-кольцо.

Теорема.

Для кольца R следующие условия равносильны:

1) *каждый правый модуль R-модуль является почти инъективным;*
2) *R – полуартиново справа кольцо, $Loewy(R) \leq 2$ и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и V - модуля;*
3) *R – полуартиново справа кольцо, $Loewy(R) \leq 2$ и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой проективного модуля и V - модуля;*

(4) *кольцо R изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & {}_TM_S \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где*
   (a) *S - правое SV - кольцо и $Loew(R) \leq 2$;*
   (b) *для некоторого идеала I кольца S выполнены условия: $MI = 0$ и кольцо S/I классически полупросто;*
   (c) *кольцо $\begin{pmatrix} T & {}_TM_{S/I} \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

Теорема.

Для кольца R следующие условия равносильны:

1) *каждый модуль R-модуль является почти инъективным;*
2) *R – прямое произведение SV-кольца, у которого $\mathrm{Loewy}(R) \leq 2$, и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

Теорема.

Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:

1) *каждый R-модуль является почти инъективным;*
2) *над кольцом R каждый модуль является расширением полупростого модуля с помощью инъективного.*

Кольца, над которыми каждый модуль является I_0^* – модулем

Теорема

Для полуартинового справа (слева) кольца R следующие условия равносильны:

1) каждый правый модуль над кольцом R является I_0^* - модулем;
2) каждый правый R - модуль является либо V - модулем, либо содержит проективное ненулевое прямое слагаемое;
3) инъективная оболочка каждого простого правого R - модуля является либо простой, либо проективным модулем длины два;
4) в кольце R существует семейство правых идеалов $(A_i)_{i \in I}$, для которого выполнены следующие условия:
   a) A_i – локальный инъективный модуль длины два для каждого $i \in I$;
   b) $J(R) = \oplus_{i \in I} J(A_i)$
   c) $R/J(R)$ – правое SV-кольцо.

Кольца, над которыми каждый модуль является I_0^* – модулем

Теорема

Для кольца R следующие условия эквивалентны:

(1) R - обобщенное справа SV – кольцо типа I, над которым каждый правый модуль является I_0^* - модулем;

(2) R - полуартиново кольцо и над ним каждый правый модуль является прямой суммой инъективного (соотв. проективного) модуля и V - модуля;

(3) кольцо R изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где

(a) S - правое SV - кольцо;

(b) для некоторого идеала I кольца S выполнены условия: $MI = 0$ и S/I классически полупросто;

(c) кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого

Кольца, над которыми каждый модуль является I_0^* – модулем

Теорема

Для кольца R следующие условия равносильны:

1) над кольцом R каждый модуль одновременно является I_0-модулем и I_0^*-модулем;
2) R – полуартиново справа (слева) кольцо, над которым каждый модуль является прямой суммой проективного модуля и V-модуля;
3) R – полуартиново справа (слева) кольцо, над которым каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и V-модуля;
4) R – прямое произведение SV-кольца и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

АВТОМОРФИЗМ КОИНВАРИАНТНЫЕ МОДУЛИ

Модуль M называется *квазиинъективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in Hom(K, M)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $*$

Модуль M называется *псевдоинъективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого эпиморфизма $f \in Hom(K, M)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $*$

$$(*) \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Модули, близкие к проективным и инъективным

Теорема

Пусть M – правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:
1) $f(M) \subset M$ для каждого $f \in Aut(E(M))$;
2) каждый изоморфизм между существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма (автоморфизма) модуля M.

Модуль M называется *автоморфизм инвариантным*, если он удовлетворяет одному из эквивалентных условий из предыдущей теоремы.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f'"] & M
\end{tikzcd}$$

Теорема (S. E. Dickson, K. R. Fuller)

Пусть R – конечномерная алгебра над полем P. Если $| P |> 2$, то для правого неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны:
1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
2) M – квазиинъективный модуль.

S. E. Dickson, K. R. Fuller, Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope, Pacific J. Math. 31, 3 (1969), 655-658.

Теорема

Если 2 – обратимый элемент в кольце, то всякий автоморфизм-инвариантный правый R-модуль является квазиинъективным.

T. K. Lee, Y. Zhou, *Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls*, J. Algebra Appl. **12** (2013), 1250159, 9 pp.

Теорема

Модуль M является автоморфизм инвариантным в точности тогда, когда M – псевдоинъективный модуль.

N. Er, S. Singh, Surjeet; S. K. Ashish, Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls, *J. Algebra* 379 (2013), 223-229.

Теорема

Пусть R – коммутативное артиново кольцо. Модуль M является автоморфизм инвариантным в точности тогда, когда M – квазиинъективный модуль.

Pedro A. Guil Asensio, A. K. Srivastava, T. C. Quynh Additive unit structure of endomorphism rings and invariance of modules, Bulletin of Math. Sciences, 2017.

Теорема

Пусть M – автоморфизм-инвариантный модуль и $S = End(M)$. Тогда $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \geq_e M\}$ и $S)$ – полурегулярное чистое кольцо.

Pedro A. Guil Asensio, A. K. Srivastava, Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property , Journal of Algebra, 388 (2013), 101-106.

Модуль M называется *автоморфизм продолжаемым,* если для каждого его подмодуля K и каждого автоморфизма $f \in Hom(K, K)$ существует (автоморфизм) эндоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f'"] & M \end{tikzcd}$$

A. A. Tuganbaev, "Automorphism-extendable modules Discrete Math. Appl., 25:5 (2015), 305-309
A. A. Tuganbaev, "Automorphism-invariant semi-Artinian modules Journal of Algebra and Its Applications, 16:2 (2017), 1750029 , 5 pp.
А. А. Туганбаев, "Автоморфизмы подмодулей и их продолжения Дискрет. матем., 25:1 (2013), 144-151

Модули, близкие к проективным и инъективным

Предложение

Если M – автоморфизм-инвариантный модуль, то модуль M является строго автоморфизм продолжаемым.

Теорема

Для полуартинова модуля M следующие условия равносильны:

1) M – автоморфизм продолжаемый модуль;
2) M – строго автоморфизм продолжаемый модуль;
3) M – автоморфизм инвариантный модуль.

A. A. Tuganbaev, "Automorphism-invariant semi-Artinian modules Journal of Algebra and Its Applications, 16:2 (2017), 1750029 , 5 pp.

Модули, близкие к проективным и инъективным

Модуль M называется *квазипроективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in Hom(M, M/K)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $*$

Модуль M называется *псевдопроективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого эпиморфизма $f \in Hom(M, M/K)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $*$

$(*)$

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Модули, близкие к проективным и инъективным

Модуль M называется *автоморфизм коинвариантным,* если для каждых его малых подмодулей K_1, K_2 и каждого малого эпиморфизма $f \in Hom(M/K_1, M/K_2)$ существует гомоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\ M/K_1 \arrow[r, "f"] & M/K_2 \end{tikzcd}$$

S. Singh, A. K. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra 371 (2012), 262-275.

Теорема

Пусть $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Тогда M – автоморфизм-коинвариантный модуль в точности тогда, когда $f(Ker(\pi)) = Ker(\pi)(f(Ker(\pi)) \leq Ker(\pi))$ для каждого $f \in End(P)$.

S. Singh, A. K. Srivastava, *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra 371 (2012), 262-275.

Теорема

Пусть R – (полу)совершенное справа кольцо. Тогда (конечно порожденный) правый R-модуль M является дуально автоморфизм продолжаемым в точности тогда, когда M – псевдопроективный модуль.

Pedro A. Guil Asensio, Srivastava, Derya Keskin Tutuncu, Berke Kalebogaz Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers, Journal of Algebra, 466 (2016), 147-152.

Правый R-модуль M называется *дуально (строго) автоморфизм-продолжаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до автоморфизма (эндоморфизма) f' модуля M.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/N \arrow[r, "f"] & M/N \end{tikzcd}$$

Теорема (А.,К)

Пусть R – совершенное справа кольцо. Тогда для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1. M – дуально строго автоморфизм-продолжаемый модуль.
2. M – автоморфизм-коинвариантный модуль.

Модули, близкие к проективным

Теорема (А., К)

Пусть R – совершенное справа кольцо, M – автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Если P – прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то M – квазипроективный модуль.

Следствие

Пусть R – локальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый дуально автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.

Следствие

Пусть R – нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.

Модули, близкие к проективным

Теорема (А., К)

Пусть R – совершенное справа кольцо, M – дуально автоморфизм инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Если для каждого прямого слагаемого P' модуля P существует такой гомоморфизм $\alpha \in End(P')$, что $\alpha, 1 - \alpha \in Aut(M)$, то M – квазипроективный модуль.

Следствие

Пусть R – совершенное справа кольцо, M – дуально автоморфизм инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Тогда если $Aut(eP/eJ(P))$ – неединичная группа для каждого локального идемпотента $e \in End_R(P)$, то M – квазипроективный модуль.

Следствие

Пусть R – совершенное справа кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый дуально автоморфизм инвариантный правый R-модуль является квазипроективным.

Следствие

Пусть R – (полу)совершенное справа кольцо, у которого 2 обратимо. Тогда каждый (конечно порожденный) дуально автоморфизм инвариантный правый R-модуль является квазипроективным.

Теорема

Пусть R – совершенное справа кольцо, M – неразложимый дуально автоморфизм-инвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Если модуль M не является квазипроективным, то $P = \oplus_{i \in I} P$, где $\{P_i\}_{i \in I}$ – попарно неизоморфные неразложимые проективные модули и $End(P_i)/J(End(P_i)) \cong \mathbb{Z}_2$ для каждого $i \in I$.

Модули, близкие к инъективным

$\{$ квазиинъективные модули $\} \subset \{$ псевдоинъективные модули $\} \subset$
$\subset \{$ автоморфизм инвариантные модули $\} \subset$
$\subset \{$ автоморфизм продолжаемые модули $\}$

Модули, близкие к проективным

$\{$ квазипроективные модули $\} \subset \{$ псевдопроективные модули $\} \subset$
$\subset \{$ дуально автоморфизм инвариантные модули $\} \subset$
$\subset \{$ дуально автоморфизм продолжаемые модули $\}$

ОБОЛОЧКИ, НАКРЫТИЯ И МОДУЛИ, БЛИЗКИЕ К ПРОЕКТИВНЫМ

Теорема

Пусть R – кольцо, M, N – правые R-модули и $\iota_1 : M \to E(M), \iota_2 : N \to E(N)$ – инъективные оболочки соответственно модулей M и N. Тогда следующие условия равносильны:

1) модуль M – N-инъективен;
2) для каждого гомоморфизма $f : E(N) \to E(M)$ существует гомоморфизм $g : N \to M$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, dotted, "g"'] & E(N) \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\iota_1"] & E(M) \end{tikzcd}$$

В частности, модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M является вполне инвариантным подмодулем в своей инъективной оболочке.

Теорема

Пусть R-кольцо, M, N – правые R-модули и $\pi_1 : P \to M, \pi_2 : P' \to N$ – проективные оболочки соответственно модулей M и N. Тогда следующие условия равносильны:

1) модуль M – N-проективен;
2) для каждого гомоморфизма $f : P \to P'$ существует гомоморфизм $g : M \to N$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, dotted, "g"'] \\ P' \arrow[r, "\pi_2"] & N \end{tikzcd}$$

В частности, модуль M квазипроективе в точности тогда, когда M является вполне коинвариантным подмодулем в своей проективной оболочке.

Модуль M называется *квазидискретным*, если M – CS-модуль и $C3$-модуль.

Модуль M называется *дискретным*, если M – CS-модуль и $C2$-модуль.

Модуль M называется *квазинепрерывным*, если M – модуль со свойством подъема и $D3$-модуль.

Модуль M называется *непрерывным*, если M – модуль со свойством подъема и $D3$-модуль.

1) Adnan Tercan, Canan C. Yucel, Module Theory, Extending Modules and Generalizations (Frontiers in Mathematics) 1st ed. 2016 Edition, Kindle Edition, Springer, 2016
2) N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith, Wisbauer, R. Extending Modules, Pitman Research Notes 313 (Longman 1994)
3) Mohamed, H.S., Muller, B.J. Continuous and Discrete Modules. LondonMath. Soc. Lecture Note Series, Cambridge Univ. Press., 147 (1990)
4) Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R.: Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory. Birkhauser Verlag, Basel (2006)

Теорема

Пусть M – правый R-модуль и $\pi_1 : M \to E$ – инъективная оболочка модуля M. Тогда следующие условия равносильны:

1) модуль M – квазинепрерывный модуль;
2) для каждого идемпотентного гомоморфизма $f : E(M) \to E(M)$ существует гомоморфизм $g : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, dotted, "g"'] & E(M) \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "\iota_1"] & E(M)
\end{tikzcd}$$

Теорема

Модуль M является непрерывным в точности тогда, когда M – квазинепрерывный модуль и каждый существенный мономорфизм $f : M \to M$ является изоморфизмом.

Теорема

Пусть M – правый R-модуль и $\pi_1 : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Тогда следующие условия равносильны:

1) модуль M – квазидискретный модуль;
2) для каждого идемпотентного гомоморфизма $f : P \to P$ существует гомоморфизм $g : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, dotted, "g"'] \\ P \arrow[r, "\pi_2"] & M \end{tikzcd}$$

Теорема

Модуль M является дискретным в точности тогда, когда M – квазидискретный модуль и каждый косущественный эпиморфизм $f : M \to M$ является изоморфизмом.

Пусть R – кольцо и Ω – некоторый класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется *Ω-оболочкой* правого R-модуля M, если:

1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \\ E' & \end{tikzcd},$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[dl, "h"'] \\ E' & \end{tikzcd};$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, "h"'] \\ E & \end{tikzcd}$$

следует, что h – автоморфизм.

Гомоморфизм $g : M \to E$ правых R-модулей называется Ω-*накрытием* правого R-модуля M, если:

1) $E \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd} ,$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd} ;$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & M \\ & E \arrow[ul, "h"'] \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

следует, что h – автоморфизм.
Если Ω – класс проективных (соотв., инъективных) правых R-модулей, то Ω-накрытие (соотв., Ω-оболочка) правого R-модуля M называется *проекивной оболочкой* (соотв., инъективной оболочкой) модуля M.

1. A. Guil Asensio, D. Keskin Tutuncu and A. K. Srivastava, Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes, Israel J. Math. 206 (2015), 457-482.
2. P. A. Guil Asensio, D. Keskin Tutuncu, Berke Kalebogaz and A. K. Srivastava, Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective co vers, J. Algebra, 466 (2016), 147-152.
3. P. A. Guil Asensio, T. C. Quynh, A. K. Srivastava, Additi ve unit structure of endomorphism rings and invariance of modules, Bull. Math. Sci. (2016).
4. A. K. Srivastava, Pedro A. Guil Asensio and Berke Kalebogaz The Schroeder-Bernstein problem for modules, Journal of Algebra, 2017

Пусть M – правый R-модуль. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантным*, если существует такое $\mathcal{X}$-накрытие $u : X \to M$, что для каждого идемпотента $g \in End(X)$ существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, dotted, "f"'] \\ X \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

Теорема

Пусть $p : X \to M$ – эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Тогда следующие условия равносильны:

1) M – $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль;
2) если $X = \oplus_I X_i$, то $Ker(p) = \oplus_I (X_i \cap Ker(p))$;
3) если $X = X_1 \oplus X_2$, то $Ker(p) = (X_1 \cap Ker(p)) \oplus (X_2 \cap Ker(p))$;
4) если $e \in End(X)$ – идемпотент, то
   $Ker(p) = e(Ker(p)) \oplus (1 - e)(Ker(p))$.

Пусть M – правый R-модуль. Модуль M называется $\mathcal{X}$-модулем со свойством подъема, если существует такое $\mathcal{X}$-накрытие $p : X \to M$ модуля M, что для любого идемпотента $g \in End(X)$ найдется идемпотент $f : M \to M$, для которого выполнено равенство $g(X) + Ker(p) = p^{-1}(f(M))$.

Пусть $p : X \to M$ – $\mathcal{X}$-накрытие модуляM и A – подмодуль модуля M. Подмодуль A называется *$\mathcal{X}$-козамкнутым* в M, если для некоторого идемпотентного эндоморфизма $g \in End(X)$ выполнено равенство $A = p(g(X))$.

Теорема

Пусть $p : X \to M$ – эпиморфное $\mathcal{X}$-накрытие. Следующие условия равносильны:

1) M – $\mathcal{X}$–модуль со свойством подъема;
2) каждый $\mathcal{X}$-козамкнутый подмодуль модуля M является прямым слагаемым M.

Теорема

Следующие условия эквивалентны для модуля M:

1) M – $\mathcal{C}$-идемпотентно коинвариантный модуль;
2) M – $\mathcal{C}$-модуль со свойством подъема и для каждого разложеения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно $\mathcal{C}$-проективны;
3) M – $\mathcal{C}$-модуль со свойством подъема и для каждого разложеения $M = M_1 \oplus M_2$ модули M_1 и M_2 взаимно проективны.

Пусть $p : X \to M$ – $\mathcal{X}$-накрытие модуля M. Модуль M называется *$\mathcal{X}$-дискретным,* если выполнены следующие условия:

1) M – $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль;
2) если для идемпотентов $e_1, e_2 \in End(X)$, $e_1', e_2' \in End(M)$ и гомоморфизмов α, α' в коммутативной диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "p"'] & e_1(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & e_2(X) \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"'] \\
M \arrow[r, "e_1'"] & e_1'(M) \arrow[r, "\alpha'"] & e_2'(M) \arrow[r, "e_2'"] & M
\end{tikzcd}
$$

α является изоморфизмом, то α' – изоморфизм.

Теорема

Если M – $\mathcal{X}$-дискретный модуль, то кольцо $End(M)$ является полурегулярным и $J(End(M)) = \nabla(M)$.

Теорема

Если M – $\mathcal{X}$-идемпотентно коинвариантный модуль, то модуль M является $\mathcal{X}$-дискретным в точности тогда, когда $\nabla(M) = J(End(M))$ и $End(M)/\nabla(M)$ – регулярное кольцо.

Теорема

Если M – $\mathcal{X}$-дискретный модуль, то кольцо $End(M)$ является чистым.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ