УДК 517.544

ОЦЕНКИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.Н. Киясов

Аннотация

Получены оценки частных индексов матриц-функций второго порядка, зависящие от суммарного индекса матрицы-функции, индексов Коши ее элементов и числа линейно-независимых решений определенных линейных алгебраических систем.

Ключевые слова: матрица-функция, факторизация, частные индексы.

Пусть
$$G(t)=\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t)\\ g_{21}(t) & g_{22}(t)\end{pmatrix} \tag{1}$$
является H_μ-непрерывной матрицей-функцией второго порядка, заданной на простом гладком замкнутом контуре Γ, разбивающем плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0\in D^+,\ \infty\in D^-)$ ($\Delta(t)=\det G(t)\neq 0,\ \operatorname{ind}\det G(t)=\varkappa,\ t\in\Gamma$).

В работе автора [1] был исследован класс сингулярных интегральных уравнений, названных уравнениями с n ядрами. В качестве приложения, в предположении, что, например, элемент $g_{11}(t)$ не обращается в нуль на Γ, было получено матричное представление
$$G(t)=G_{11}^+(t)G_0(t)G_{11}^-(t), \tag{2}$$
в котором
$$G_{11}^+=\begin{pmatrix} g_{11}^+ & 0\\ g_{11}^+P\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right]+\dfrac{\Delta^+}{g_{11}^+}\left\{P\left[Q\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^+)^2}{\Delta^+}\right]+c_1\right\} & \dfrac{\Delta^+}{g_{11}^+}\end{pmatrix},$$
$$G_{11}^-=\begin{pmatrix} g_{11}^- & g_{11}^-Q\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right]+\dfrac{1}{g_{11}^-\Delta^-}\{Q\left[P\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right](g_{11}^-)^2\Delta^-\right]-c_2\right\}\\ 0 & \dfrac{1}{g_{11}^-\Delta^-}\end{pmatrix},$$
c_1, c_1 − постоянные, $P=(I+S)/2$, $Q=(I-S)/2$ (I − единичный, S − сингулярный операторы), а матрица-функция
$$G_0=\begin{pmatrix} 1 & P\left[P\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right](g_{11}^-)^2\Delta^-\right]+c_2\\ Q\left[Q\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}\right]\dfrac{(g_{11}^+)^2}{\Delta^+}\right]-c_1 & 1+\left\{P\left[P\left[\dfrac{g_{12}}{g_{11}}\right](g_{11}^-)^2\Delta^-\right]+c_2\right\}\left\{Q\left[Q\left[\dfrac{g_{21}}{g_{11}}]\dfrac{(g_{11}^+)^2}{\Delta^+}\right]-c_1\right\}\end{pmatrix}$$

имеет нулевой суммарный индекс и представима в виде

$$G_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & a^+(t) \\ a^-(t) & 1 + a^+(t)a^-(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$a^+(t)$ и $a^-(t)$ – H_μ- непрерывные предельные значения функций, аналитических в областях D^+ и D^- соответственно. Отметим, что в работах [2, 3] к подобной матрице-функции на единичной окружности приводится эрмитова матрица-функция второго порядка с отрицательным определителем и знакопостоянными диагональными элементами. На основе этого представления была получена оценка частных индексов матрицы-функции (1), в которую входили значения суммарного индекса $\varkappa$, индекса Коши $\varkappa_{11}$ элемента $g_{11}(t)$ и число n_{11} линейно-независимых решений некоторого сингулярного интегрального уравнения с двумя ядрами, для которого оценка числа n_{11} не приводилась. В настоящей работе мы уточним полученную оценку за счет оценки числа линейно-независимых решений определенным образом подобранного уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

Пусть $\big(w^1(z), w^2(z)\big)$ – исчезающее на бесконечности решение задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (3)

$$\begin{aligned} &w^{1+}(t) = w^{1-}(t) + a^+(t)w^{2-}(t), \\ &w^{2+}(t) = a^-(t)w^{1-}(t) + (1 + a^+(t)a^-(t))w^{2-}(t), \quad t \in \Gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда, применяя оператор Q, на Γ получим

$$w^{1-}(t) + Q[a^+w^{2-}](t) = 0, \quad a^-(t)w^{1-}(t) + w^{2-}(t) + Q[a^+a^-w^{2-}](t) = 0.$$

Исключая $w^{1-}(t)$, придем для определения $w(t) = w^{2-}(t)$ к сингулярному интегральному уравнению с двумя ядрами

$$K_1w(t) \equiv 2w(t) + a^-(t)S[a^+w](t) - S[a^+a^-w](t) = 0. \tag{5}$$

Применяя к двум последним слагаемым этого уравнения оператор P и формулу перестановки порядка интегрирования в повторном особом интеграле, заключаем, что в случае нетривиальной разрешимости любое его решение является предельным значением функции, аналитической в области D^- и исчезающей на бесконечности. По решению $w(t)$ уравнения (5) решение задачи (4) определится на Γ по формулам

$$\begin{aligned} &w^{1+}(t) = P[a^+w](t), \quad w^{1-}(t) = -Q[a^+w](t); \\ &w^{2+}(t) = P[(1 + a^+a^-)w](t), \quad w^{2-}(t) = w(t). \end{aligned}$$

Очевидно, частные индексы матрицы-функции (3) равны $\varkappa_1 = -\varkappa_2 = k$, где k – число линейно-независимых решений уравнения (5).

С другой стороны, из [1], а также из [4] следует, что уравнение (5) эквивалентно задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией:

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} a^+(t)a^-(t) - 1 & -a^+(t) \\ a^+(t)[a^-(t)]^2 & -a^+(t)a^-(t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу-функцию

$$G_2(t) = E^{a^-(t)}G_1(t)E^{1/a^-(t)} = \begin{pmatrix} a^+(t)a^-(t) - 1 & -a^+(t)a^-(t) \\ a^+(t)a^-(t) & -a^+(t)a^-(t) - 1 \end{pmatrix},$$

где через $E^{a(t)}$ обозначена диагональная матрица-функция $\mathrm{diag}\{a(t),1\}$. Задача линейного сопряжения с этой матрицей-функцией формально эквивалентна, как показано в [4], следующему уравнению с двумя ядрами:

$$K_2\varphi(t) \equiv 2\varphi(t) + S[a^+a^-\varphi](t) - S[a^+a^-\varphi](t) = 0,$$

имеющему лишь тривиальное решение, а значит, частные индексы матрицы-функции $G_2(t)$ равны нулю.

Известно, что любую функцию, аналитическую в области D^+ на любом вложенном компакте, можно равномерно приблизить полиномами от z, а в области D^- – полиномами от $1/z$. Ограничимся лишь случаем, когда Γ – единичная окружность, а полиномы $M_n(z)$, $N_n(1/z)$ – частичные суммы рядов Тейлора

$$\begin{aligned} M_n(t) &= b_n t^n + b_{n-11} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0, \\ N_n(t) &= \frac{a_n}{t^n} + \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{t} + a_0, \end{aligned} \tag{6}$$

равномерно сходящихся внутри и вне единичного круга, а также на Γ к функциям $a^{\pm}(z)$, аналитическим в соответствующих областях и являющимися аналитическими продолжениями H_μ-непрерывных функций $a^{\pm}(t)$.

Рассмотрим матрицы-функции

$$G_{2n}(t) = \begin{pmatrix} a^+(t)N_n(1/t) - 1 & -a^+(t)N_n(1/t) \\ a^+(t)N_n(1/t) & -a^+(t)N_n(1/t) - 1 \end{pmatrix}$$

и

$$G_{1n}(t) = E^{1/N_n(1/t)} G_{2n}(t) E^{N_n(1/t)}.$$

Этим матрицам-функциям соответствуют сингулярные интегральные уравнения с двумя ядрами и индексом, равным нулю:

$$K_{2n}\varphi(t) \equiv 2\varphi(t) + S[a^+N_n\varphi](t) - S[a^+N_n\varphi](t) = 0,$$

$$K_{1n}w(t) \equiv 2w(t) + N_n(1/t)S[a^+w](t) - S[a^+N_n w](t) = 0,$$

первое из которых не имеет нетривиальных решений, и, следовательно, частные индексы матрицы-функции $G_{2n}(t)$ равны нулю. Число же l линейно-независимых решений уравнения $K_{1n}w(t) = 0$ в силу того, что его индекс равен нулю, совпадает с числом линейно-независимых решений союзного уравнения

$$K'_{1n}\psi(t) \equiv 2\psi(t) - a^+(t)S[N_n\psi](t) + a^+(t)N_n(1/t)S[\psi](t) = 0 \tag{7}$$

(частные индексы матриц-функций $G_{1n}(t)$ равны $\widetilde{\varkappa}_1 = -\widetilde{\varkappa}_2 = l$).

Так как число линейно-независимых решений однородного уравнения Фредгольма конечно, то l не может неограниченно возрастать с ростом n (с увеличением точности аппроксимации). Покажем, что, начиная с некоторого номера $n = m$, модуль частных индексов матрицы-функции $G_{1n}(t)$ при $n > m$ не возрастает. Для обоснования этого утверждения, используя второе разложение (6), запишем уравнение (7) при $n = m$ как уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$\psi(t) + a^+(t)\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=j}^{m}\frac{a_s}{t^{s-j+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\tau)}{\tau^j}\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad (\Gamma : |t| = 1).$$

Вводя обозначения

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\psi(\tau)}{\tau^k}\,\mathrm{d}\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

для определения этих постоянных придем к линейной алгебраической системе

$$A_k + \sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} a^+(\tau)\sum_{s=j}^{m}\frac{a_s}{\tau^{s+k-j+1}}\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1+\sum\limits_{j=1}^{m} a_j b_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r-1} b_j & \sum\limits_{j=1}^{m-r} a_{j+r} b_j & \cdots & a_m b_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum\limits_{j=1}^{m} a_j b_{j+r-1} & \cdots & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r-1} b_{j+r-1} & \sum\limits_{j=1}^{m-r} a_{j+r} b_{j+r-1} & \cdots & a_m b_r \\
\sum\limits_{j=1}^{m} a_j b_{j+r} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r-1} b_{j+r} & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r} a_{j+r} b_{j+r} & \cdots & a_m b_{r+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum\limits_{j=1}^{m} a_j b_{j+m-1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r-1} b_{j+m-1} & \sum\limits_{j=1}^{m-r} a_{j+r} b_{j+m-1} & \cdots & 1+a_m b_m
\end{pmatrix}.$$

Предположим, что ранг этой матрицы равен r и отличный от нуля минор M_r порядка r расположен в левом верхнем углу. Если взять $n = m+1$, то матрица соответствующей системы (8) принимает вид

$$\begin{pmatrix}
1+\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_j & \sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r} b_j & \cdots & a_{m+1} b_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r-1} & \cdots & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r-1} & \sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r} b_{j+r-1} & \cdots & a_{m+1} b_r \\
\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r} & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r} b_{j+r} & \cdots & a_{m+1} b_{r+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+m} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+m} & \sum\limits_{j=1}^{m-r+1} a_{j+r} b_{j+m} & \cdots & 1+a_{m+1} b_{m+1}
\end{pmatrix}.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что все коэффициенты a_k, $k = 1, \ldots, m+1$ отличны от нуля. Минор $\widetilde{M_r}$ порядка r, стоящий в левом верхнем углу последней матрицы, непрерывно зависит от коэффициента a_{m+1} и при $a_{m+1} = 0$ совпадает с $M_r \neq 0$. Учитывая, что коэффициенты разложений (6) стремятся к нулю с ростом n, при достаточно большом $n = m$ можно считать, что и $\widetilde{M_r} \neq 0$. Если предположить, что ранг этой матрицы также равен r (число линейно-независимых решений системы (8) увеличивается на единицу), то все «окаймляющие» $\widetilde{M_r}$ миноры порядка $r+1$, например, составленные из элементов $(r+1)$-й строки и столбцов с номерами $r+1, r+2, \ldots, m+1$ равны нулю. Применяя это утверждение для такого минора с номером столбца, равным m, и представляя его в виде суммы двух определителей, получим:

$$0 = a_m \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_j & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r-1} & \cdots & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r-1} & b_r \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r} & b_{r+1} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{m+1} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_j & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r-1} & \cdots & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r-1} & b_{r+1} \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r} & b_{r+2} \end{vmatrix}.$$

Согласно сделанным предположениям первый определитель равен нулю, так как он только постоянным, не равным нулю множителем отличается от выбранного минора $(r+1)$-го порядка с номером столбца $m+1$. Значит, второй определитель также равен нулю. Проводя подобные рассуждения последовательно для выбранных миноров порядка $r+1$ с номерами столбцов $m-1, m-2, \ldots, r+2$ (представляя их в виде соответствующей суммы определителей, отличающихся лишь $(r+1)$-м столбцом), придем к равенству нулю такого минора с номером столбца, равным $r+1$, который представим в виде

$$\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_j & a_{m+1} b_{m-r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r-1} & \cdots & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r-1} & a_{m+1} b_m \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r} & 1+a_{m+1} b_{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \widetilde{M}_r + a_{m+1} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_j & b_{m-r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r-1} & \cdots & 1+\sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r-1} & b_m \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j b_{j+r} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m-r+2} a_{j+r-1} b_{j+r} & b_{m+1} \end{vmatrix}.$$

Однако при $a_{m+1} = 0$ этот минор совпадает с $\widetilde{M}_r \neq 0$, что противоречит сделанному предположению. Значит, при достаточно большом m указанный минор будет отличен от нуля и число линейно-независимых решений системы (8) не возрастает. Случай когда отличный от нуля минор порядка r не совпадает с ведущим (угловым) минором, а также равенство нулю некоторых коэффициентов a_k, $k = 1, \ldots, m+1$, исследуется аналогично.

Справедливо следующее утверждение [5, с. 47]. Пусть матрица-функция $G(t)$ порядка p факторизуется с частными индексами $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \cdots \geq \varkappa_p$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что любая матрица-функция $\widetilde{G}(t)$ из этой δ-окрестности $G(t)$ факторизуется с тем же суммарным индексом, а ее частные индексы заключены в промежутке $[\varkappa_p, \varkappa_1]$. Согласно этому утверждению существует такая δ-окрестность матрицы-функции $G_{1n}(t)$, что частные индексы $\kappa_1 = -\kappa_2$ любой матрицы-функции $\widetilde{G}(t)$ из этой δ-окрестности ($|\widetilde{G}(t) - G_{1n}(t)|_\mu < \delta$ по норме $H_\mu(\Gamma)$ [5, с. 45]) заключены в промежутке $[-l, l]$

$$-l \leq \kappa_2 \leq \kappa_1 \leq l.$$

Так как согласно доказанному частные индексы матрицы-функции $G_{1n}(t)$, начиная с некоторого номера n, не возрастают, а для матрицы-функции $\widetilde{G}(t) = G_1(t)$ с ростом n норма разности $|\widetilde{G}_1(t) - G_{1n}(t)|_\mu$ может быть сделана сколь угодно малой, делаем вывод, что для частных индексов $\varkappa_1 = -\varkappa_2 = k$ матрицы-функции $G_1(t)$, а значит, и матрицы-функции (3) справедлива оценка $\varkappa_1 = -\varkappa_2 = k \leq l$. Полученная оценка и представление (2) позволяют обосновать существование нормального представления

$$G(t) = G^+(t)G^-(t), \tag{9}$$

для которого при $\varkappa \geq 2\varkappa_{11}$ матрица-функция $G^-(z)$ будет иметь на бесконечности порядки первой и второй строки не выше, чем $\varkappa - \varkappa_{11} \pm l$ соответственно. При переходе от этого нормального представления к факторизации суммарный порядок строк нормального представления понижается на $\varkappa - 2\varkappa_{11}$ единиц. Значит, при таком переходе порядок первой строки, соответствующей большему из значений частных индексов матрицы-функции $G(t)$, не может быть сделан ниже, чем $\varkappa_{11} + l$, что приводит нас к оценке

$$\varkappa_{11} + (-1)^k l \leq \varkappa_k \leq \varkappa - \varkappa_{11} + (-1)^k l, \quad k = 1, 2 \quad (\varkappa_1 \geq \varkappa_2).$$

Если $\varkappa < 2\varkappa_{11}$, приходим к обоснованию существования нормального представления матрицы-функции $G(t)$ с порядками строк на бесконечности не выше $\varkappa_{11} \pm l$, откуда

$$\varkappa - \varkappa_{11} + (-1)^k l \leq \varkappa_k \leq \varkappa_{11} + (-1)^k l, \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим представление (2) для матриц-функций $G(t)F,\ FG(t),\ FG(t)F$, где F – перестановочная матрица в предположении, что все элементы $g_{ij}(t)$ матрицы-функции $G(t)$ не обращаются в нуль на Γ. Обозначая индексы Коши этих элементов и соответствующие числа l через $\varkappa_{ij}$ и l_{ij}, $i, j = 1, 2$, а также объединяя полученные неравенства, придем к окончательной оценке

$$\max_{i,j=1,2} \min\{(\varkappa_{ij}, \varkappa - \varkappa_{ij}) + (-1)^k l_{ij}\} \leq \varkappa_k \leq \min_{i,j=1,2} \max\{(\varkappa_{ij}, \varkappa - \varkappa_{ij}) + (-1)^k l_{ij}\},$$

где $k = 1, 2$, а $l_{ij},\ i, j = 1, 2,$ – числа линейно-независимых решений соответствующих линейных алгебраических систем порядка m такого, что число линейно-независимых решений соответствующих систем порядка $m + 1$ не возрастает.

Summary

S.N. Kiyasov. Estimates of the Partial Indices of the Hölder Continuous 2×2 Matrix Functions.

We obtain estimates of the partial indices of 2×2 matrix functions. This estimates depend on the total index of the matrix function, the Cauchy indices of its elements and the number of linearly independent solutions of certain linear algebraic systems.

Keywords: matrix function, factorization, partial indices.

Литература

1. *Киясов С.Н.* Исследование разрешимости и оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т. 41, № 6. – С. 1357–1362.
2. *Литвинчук Т.С., Спитковский И.М.* Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 255, № 5. – С. 1042–1046.
3. *Литвинчук Т.С., Спитковский И.М.* Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана, факторизация эрмитовых матриц-функций и некоторые проблемы приближения мероморфными функциями // Матем. сборник. – 1982. – Т. 117, № 2. – С. 196–215.
4. *Киясов С.Н.* Эффективные оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 9. – С. 1190–1198.
5. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 380 с.

Поступила в редакцию
20.11.14

Киясов Сергей Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Sergey.Kijasov@kpfu.ru*