УДК 517.54

ОБЗОР ПО ОЦЕНКАМ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И.Р. Каюмов

Аннотация

Настоящий обзор посвящен описанию результатов об оценках интегральных средних в различных классах аналитических функций. Большое внимание отведено граничным свойствам конформных отображений. Основным математическим аппаратом для такого исследования послужили систематические результаты по оценке спектра интегральных средних и знаменитый закон повторного логарифма для конформных отображений, доказанный Н.Г. Макаровым в 1985 г. Получены точные оценки интегральных средних в различных подклассах однолистных функций. Даны оценки спектра интегральных средних в классе функций отображающих внешность единичного круга на бассейны притяжения бесконечности алгебраических полиномов.

Ключевые слова: конформные отображения, спектр интегральных средних, гармоническая мера.

Введение

Напомним, что класс S состоит из однолистных и голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций f, удовлетворяющих соотношениям $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$.

В начале XX в. крупным немецким математиком Л. Бибербахом была выдвинута гипотеза о том, что $|a_n| \leq n$, где a_n – коэффициенты Тейлора функций из класса S.

Дж. Литтлвуд [1] получил точный порядок роста $|a_n| < en$, что явилось первым нетривиальным результатом в этом направлении после хорошо известных результатов Л. Бибербаха $|a_2| \leq 2$ и К. Левнера $|a_3| \leq 3$.

Впоследствии константа e в неравенстве Литтлвуда неоднократно улучшалась И.Е. Базилевичем, И.М. Милиным и Н.А. Лебедевым. В 1985 г. де Бранж доказал гипотезу Лебедева – Милина и на этой основе решил проблему Бибербаха, установив, что

$$|a_n| \leq n,$$

причем равенство возможно лишь для функции Кебе

$$k_\alpha(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2},$$

которая отображает круг на плоскость с разрезом по некоторому лучу.

Возникает естественный вопрос: что будет, если потребовать ограниченность однолистной функции? В этом случае функция Кебе $k_\alpha(z)$ не подходит ввиду неограниченности.

Итак, предположим, что $|f(z)| \leq M$ в $\mathbb{D}$. Гронуоллом [2] была доказана теорема площадей, из которой следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 \leq \pi M^2.$$

В частности, из этого неравенства вытекает, что

$$|a_k| \leq \frac{\sqrt{\pi} M}{\sqrt{k}}.$$

Оказалось, что последнее неравенство не дает точный порядок роста коэффициентов ограниченных однолистных функций. Дж. Клуни и Х. Поммеренке [3] установили, что $|a_k| \leq C k^{-1/2-1/300}$ для некоторой абсолютной константы C.

Определим спектр интегральных средних

$$\beta_f(t) = \limsup_{r \to 1} \frac{\ln \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^t \, \mathrm{d}\theta}{|\ln(1-r)|},$$

который фактически является порядком роста интегральных средних производной.

Л. Карлесон и П. Джонс в «прорывной» статье [4] показали, что

$$\sup_{f \in S_1} \beta_f(1) = \alpha = \sup_{f \in S_1} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log |n a_n|}{\log n},$$

где S_1 – класс ограниченных и однолистных функций в круге $\mathbb{D}$. Заметим, что неравенство $\sup \beta_f(1) \geq \alpha$ получается весьма просто (его доказательство основывается на том, что интеграл от модуля некоторой функции не меньше, чем модуль интеграла от той же функции). Обратное же неравенство является весьма нетривиальным фактом.

Таким образом, задача о точном порядке роста коэффициентов в классе ограниченных однолистных функций свелась к соответствующей проблеме оценки роста на линиях уровня модуля производной однолистной ограниченной функции.

Важность работы Карлесона и Джонса состоит в том, что они указали на фрактальную геометрию экстремальных функций, решающих проблему асимптотического поведения модулей коэффициентов в классе ограниченных однолистных функций.

1. Оценки интегральных средних для производных однолистных функций

Определим универсальный спектр интегральных средних [5] для ограниченных однолистных функций:

$$B_b(t) = \sup_f \beta_f(t),$$

где обычная верхняя грань ищется среди всех ограниченных конформных отображений круга $\mathbb{D}$ в $\mathbb{C}$.

Х. Поммеренке [6] доказал, что для всех вещественных t имеет место оценка

$$B_b(t) \leq -\frac{1}{2} + t + \sqrt{1/4 - t + 4t^2}.$$

Х. Хедельман и С. Шиморин [7] улучшили эту оценку. В частности, они показали, что для малых значений параметра t имеет место неравенство

$$B_b(t) < 0.38 t^2.$$

С другой стороны, Н.Г. Макаровым [8] получена оценка снизу для универсального спектра: $B_b(t) > ct^2$ для малых t. Он использовал классический пример из теории лакунарных рядов:

$$\log f'(z) = \frac{i}{5} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Роде, используя похожий пример (см. [9, с. 178]), показал, что $B_b(t) \geq 0.117t^2$ при малых t. Эта оценка была усилена до $t^2/5$ в работе [10].

Л. Карлесон и П. Джонс [4] высказали достаточно смелое предположение о том, что универсальный спектр $B(t)$ максимизируется на бассейнах притяжения для квадратичных полиномов. Эту гипотезу они подкрепили компьютерными вычислениями (с использованием эвристических алгоритмов) показав, что $B_b(1) \geq 0.23$. Используя их идеи и методы, Ф. Крецер [11] получил экспериментальные оценки

$$B_b(t) \geq \frac{t^2}{4}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Недавно С. Смирнов и Д. Беляев [12] более обоснованно показали, что $B_b(1) > 0.234$.

Вообще говоря, вычисление спектра интегральных средних для конкретных областей с фрактальными границами является весьма нетривиальной проблемой. В нашей работе [13] доказано неравенство $\beta_f(t) \leq t^2/4$ для конформных отображений, порожденных лакунарными рядами с показателем лакунарности 2.

Через $B(t)$ обозначим универсальный спектр интегральных средних в классе S. Очевидно, что $B(t) \geq B_b(t)$.

Хорошо известно, что $B(t)$ является выпуклой функцией переменного t. Л. Карлесоном и Н.Г. Макаровым показано [14], что

$$B(t) = |t| - 1$$

при $t \leq t_0$ для некоторого $t_0 \leq -2$ (далее будем считать, что t_0 является максимальным из возможных). Дж. Фенг и Т. МакГрегор в работе [15] установили равенство

$$B(t) = 3t - 1 \quad \text{при} \quad t \geq 2/5.$$

Легко видеть, что из неравенства Гельдера для интегралов следует, что

$$\frac{B(p)}{|p|} \leq \frac{B(q)}{|q|} \quad \text{при} \quad |p| \leq |q|, \quad pq > 0.$$

В нашей работе [16] доказано другое, в некотором смысле обратное, неравенство:

$$\frac{B(q)}{|q|} - \frac{B(p)}{|p|} \leq \frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} \quad \text{при} \quad |p| \leq |q|, \quad pq > 0. \tag{1}$$

Доказательство основано на неравенстве, связывающем L_p и L_q – нормы полиномов, доказанном С.М. Никольским.

Введем подклассы класса S:

$$S(n, 1) = \{f \in S : f' \text{ – полином степени } n\},$$

$$S(n, -1) = \{f \in S : 1/f' \text{ – полином степени } n\}.$$

Определим новую величину, связанную с граничным поведением конформных отображений:

$$\Gamma(t) = \limsup_{n \to \infty} \gamma_n(t),$$

где

$$\gamma_n(t) = \sup\left\{\frac{1}{\ln n}\ln\int\limits_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})|^t d\theta:\ f\in S(n,1)\right\} \quad \text{при} \quad t\ge 0,$$

$$\gamma_n(t) = \sup\left\{\frac{1}{\ln n}\ln\int\limits_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})|^t d\theta:\ f\in S(n,-1)\right\} \quad \text{при} \quad t\le 0.$$

Оказалось, что $\Gamma(t)=B(t)$. Этот факт позволил использовать неравенство, доказанное С.М. Никольским для вывода (1).

Отметим, что в случае, когда p и q не превосходят t_0 или лежат в интервале $[2/5,+\infty)$, вышеупомянутые результаты Л. Карлесона, Н.Г. Макарова, Дж. Фенга и Т. МакГрегора показывают, что неравенство в (1) заменяется равенством.

Приведем одно следствие неравенства (1). Н.Г. Макаровым [17] доказано, что для любой функции $f\in S$, любого измеримого по Борелю множества $A\subset\partial\mathbb{D}$ и любого $s>0$ справедливо неравенство

$$\dim f(A) \ge \frac{s\dim A}{B(-s)+s+1-\dim A}, \tag{2}$$

где $\dim A$ – хаусдорфова размерность множества A.

Если $\dim A=1$, то в неравенстве (2) выбор $s=0$ максимизирует правую часть этого неравенства и дает неулучшаемую оценку $\dim f(A)\ge 1$, доказанную Н.Г. Макаровым [17]. При $\dim A<1$ параметр s нужно выбирать строго положительным, поскольку $B(s)=cs^2+O(s^3)$ при малых t.

Предположим теперь, что хаусдорфова размерность A достаточно мала. Тогда из неравенства (2) легко следует неравенство

$$\dim f(A) \ge \frac{\dim A}{(B(-s)+1)/s+1} + \frac{\dim^2 A}{s((B(-s)+1)/s+1)^2} + O(\dim^3 A). \tag{3}$$

Полагая $s=|t_0|$ и пользуясь асимптотическим неравенством (3), Л. Карлесон и Н.Г. Макаров [14] доказали неравенство

$$\dim f(A) \ge \frac{\dim A}{2} + \frac{\dim^2 A}{4|t_0|} + O(\dim^3 A). \tag{4}$$

Возникает естественный вопрос: можно ли улучшить оценку (4), выбирая другой параметр s в неравенстве (4)?

Оказывается, что неравенство (4) является оптимальным с точки зрения неравенств (2) и (3). Справедливо

Предложение. *Для достаточно малых* $\dim A$ *имеет место соотношение*

$$\max_{s>0}\frac{s\dim A}{B(-s)+s+1-\dim A} = \frac{\dim A}{2} + \frac{\dim^2 A}{4|t_0|} + O(\dim^3 A).$$

Нетрудно проверить, что параметр s в (3) нужно выбрать таким образом, чтобы функция $(B(-x)+1)/x$ была минимальна в точке s. Ясно, что функция $(B(-x)+1)/x$ не возрастает при $x>0$. Следовательно, нужно выбрать $s\ge|t_0|$. В этом случае $B(-s)=|s|-1$, и несложный анализ неравенства (3) показывает, что оптимальным является параметр $s=|t_0|$.

Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге $\mathbb{D}$. Н.Г. Макаров [18] доказал, что существует абсолютная положительная постоянная C такая, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\ln f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\ln(1-r)|\ln\ln|\ln(1-r)|}} \le C\|\ln f'\|_{\mathbb{B}}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$, где

$$\|\ln f'\|_{\mathbb{B}} = |\ln f'(0)| + \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$

есть стандартная норма Блоха.

Пусть p – произвольное комплексное число. Для всех $\delta > 0$ определим

$$\beta_\delta(p) = \sup_{r\in[0,1)} \frac{\log\left[\delta\int\limits_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})^p|\,\mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|}.$$

Другими словами, $\beta_\delta(p)$ – минимальное число, для которого выполняется равенство

$$\int\limits_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})^p|\,\mathrm{d}\theta \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta_\delta(p)}, \quad 0\le r<1.$$

В статье [19] показано, что если p вещественно, то

$$\beta_\delta(p) \to \beta(p) \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\beta(p)$ – спектр интегральных средних.

В работах [4, 5, 9] установлено существование нетривиальной связи между граничным поведением конформных отображений и спектром интегральных средних. С другой стороны, Н.Г. Макаровым [18] показано, что закон повторного логарифма тесно связан с граничными свойствами конформных отображений. Отсюда вытекает естественный вопрос: каким образом связаны между собой закон повторного логарифма и спектр интегральных средних? Возможным ответом на него является следующий результат, доказанный в работе [20].

Предположим, что функция f локально однолистна и аналитична в круге $\mathbb{D}$ и $\delta > 0$. Тогда

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\ln f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\ln(1-r)|\ln\ln|\ln(1-r)|}} \le 2\limsup_{p\to 0}\frac{\sqrt{\beta_\delta(p)}}{|p|}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$.

В работах [21, 22] исследованы граничные свойства конформных отображений на основе закона повторного логарифма.

Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге $\mathbb{D}$. Закон повторного логарифма Макарова эквивалентен тому, что существует абсолютная положительная постоянная C такая, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\ln f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\ln(1-r)|\ln\ln|\ln(1-r)|}} \le C$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$. Х. Поммеренке [9] показал, что данное неравенство справедливо при $C = 6$. В работе [22] доказано, что оно справедливо при $C = 2\sqrt{3}$. В работе [21] константа C понижена до 1.24. Этот результат позволяет уточнить метрические свойства образов подмножеств единичной окружности положительной меры при конформных отображениях круга на области, ограниченные жордановой кривой.

Итак, пусть Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная жордановой кривой $\partial\Omega$, E – произвольное борелевское множество на этой кривой. Через $\omega_z(E)$ обозначим гармоническую меру множества E относительно точки $z \in \Omega$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$ и будем рассматривать функцию $\omega(E) = \omega_{z_0}(E)$ как функцию на борелевских множествах кривой $\partial\Omega$. Полученная таким образом мера ω не зависит от выбора точки $z_0 \in \Omega$.

Из классической теоремы Рисса – Привалова следует, что если $\partial\Omega$ является спрямляемой кривой, то ω абсолютно непрерывна относительно линейной меры Лебега на этой кривой. М.А. Лаврентьевым [23] построен пример такой жордановой кривой $\partial\Omega$, что ω не является абсолютно непрерывной мерой относительно линейной меры Лебега на этой кривой.

В 1972 г. Л. Карлесон показал, что существует положительное число $\alpha > 0$ такое, что ω абсолютно непрерывна относительно $\Lambda_{1/2+\alpha}$, где $\Lambda_{1/2+\alpha}$ – φ–мера Хаусдорфа с функцией $\varphi(t) = t^{1/2+\alpha}$.

В 1985 г. Н.Г. Макаров [18] существенно усилил этот результат, показав, что существует постоянная $C > 0$, для которой ω абсолютно непрерывна относительно Λ_φ, где

$$\varphi(t) = t \exp\left(C \sqrt{\log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}} \right).$$

Здесь Λ_φ – φ-мера Хаусдорфа.

С. Роде и Х. Поммеренке [9] показали, что в качестве C можно взять число 30. Автором [22] эта константа была понижена до $6\sqrt{3}$.

Пусть C_M – минимальная константа, для которой гармоническая мера абсолютно непрерывна относительно Λ_φ. Совместно с Х. Хеденмальмом [24] удалось получить оценки

$$0.91 \le C_{\mathrm{M}} \le 2\sqrt{\frac{\sqrt{24}-3}{5}} = 1.2326\dots.$$

Оценка снизу получена путем построения конформных снежинок с большой фрактальной размерностью границы.

Обобщая результаты Макмюллена [25], Н. Ли и М. Зинсмейстер [26] доказали, что если функция g однолистна в единичном круге и непрерывно продолжима на границу, то

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{MDim} J_t = 2 \lim_{t\to 0+} \frac{\beta_g(t)}{t^2},$$

где $\mathrm{MDim} J_t$ означает размерность Минковского кривой $J_t = g_t(|z| = 1)$. Здесь отображение g_t определяется равенством $g_t'(z) = g'(z)^t$.

2. Поведение спектра интегральных средних в различных подклассах однолистных функций

Опишем теперь результаты, связанные с интегральными характеристиками в различных подклассах однолистных функций.

В работе [27] исследованы конформные отображения, логарифм производных которых представим в виде лакунарного ряда Адамара. В случае, когда коэффициенты ряда Тейлора $\ln f'$ не стремятся к нулю, такие функции отображают круг на области с фрактальными границами. Имеет место неравенство

$$\limsup_{r\to 1} \frac{|\ln f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\ln(1-r)|\ln\ln|\ln(1-r)|}} \le 2\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\beta(t)}}{t}$$

почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$. Равенство достигается в случае, если существует предел

$$\lim_{r\to 1}\frac{b^2(r)}{|\ln(1-r)|}, \quad \text{где} \quad b^2(r) = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 r^{2n_k}.$$

Исследовано поведение спектра интегральных средних для бассейнов притяжения бесконечности полиномов (см. [28]). Подробно рассматривается случай $F = z^q + c$, где $q \ge 2$. Предполагается, что параметр c выбран таким образом, что бассейн притяжения бесконечности Ω_F – односвязная область.

Доказано, что если f – конформное отображение внешности единичного круга $\overline{\mathbb{D}}$ на бассейн притяжения бесконечности полинома $F = z^q + c$, то

$$\lim_{t\to 0}\frac{\beta_f(t)}{t^2} = \frac{X}{4} + o(X) \quad \text{при} \quad X \to 0, \quad X = \dim\Omega - 1,$$

где $\dim\Omega$ – хаусдорфова размерность $\partial\Omega$.

В случае, если

$$0 \le c < (1/q)^{1/(q-1)}(1 - 1/q),$$

то

$$\beta_f(t) \ge \frac{\ln I_0(ct)}{\ln q}, \quad 0 \le t < +\infty.$$

В работе [29] исследованы некоторые свойства интегральных средних полиномиальных произведений типа Рисса, которые тесно связаны с полиномиальной динамикой на плоскости. Рассматриваются локально однолистные в круге функции f, для производных которых справедливо представление

$$f'(z) = \prod_{k=0}^{\infty}\Phi(z^{q^k}), \quad |z| < 1, \quad \Phi(0) = 1,$$

где $\Phi(z)$ – некоторая функция, голоморфная в круге $\mathbb{D}$.

Дж. Литтлвуд [30] впервые воспользовался таким отображением с функцией $\Phi(z) = (1 + z/3)/(1 - z/3)^3$ для того, чтобы доказать существование ограниченной и однолистной в круге $\mathbb{D}$ функции, у которой коэффициенты не удовлетворяют соотношению $a_k = O(1/k)$, $k \to \infty$, что явилось первым нетривиальным результатом в проблеме коэффициентов для ограниченных однолистных функций, как уже отмечалось выше.

Предположим, что q и m – натуральные числа, $q \ge 2$. Обозначим

$$\sigma^2(m,q) = \sup\{\sigma_f^2 : f' = \prod_{k=0}^{\infty}p_m(z^{q^k}), f' \ne 0 \text{ в } \mathbb{D}\},$$

$$\beta_2(m,q) = \sup\{\beta_f(2) : f' = \prod_{k=0}^{\infty}p_m(z^{q^k}), f' \ne 0 \text{ в } \mathbb{D}\}.$$

В этих определениях верхняя грань ищется по всем многочленам p_m степени m, удовлетворяющим условию $p_m(0) = 1$.

Нами показано [29], что $\sigma_q^2(m)$ зависит аналитически от параметров m и q. Функция $\beta_2(m,q)$, несмотря на схожесть с $\sigma^2(m,q)$, имеет точку фазового перехода $m=q-1$, то есть эта функция изменяет свое поведение в точке $m=q-1$.

Получены соотношения

$$\sigma^2(m,q)=\frac{\pi^2}{6}\frac{(q+1)m^2}{(q-1)\ln q},$$

$$\beta_2(m,q)\ln q=\ln\left(\frac{4^m}{m!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}}\right),\quad m\le q-1,$$

$$\ln\left(\frac{4^m}{m!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}}\right)<\beta_2(m,q)\ln q\le\ln\left(\frac{4^m}{(q-1)!}\frac{\Gamma(q-1/2)}{\sqrt{\pi}}\right),\quad m>q-1.$$

Пусть $q\ge 2$. В статье [31] доказано, что если функция f голоморфна и однолистна в круге $\mathbb{D}$ и

$$\ln f'=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{q^k},$$

то для любого $\alpha>0$ найдется постоянная $C_\alpha<+\infty$ такая, что

$$|f'(z)|\le C_\alpha\frac{\ln^{2+\alpha}2/(1-r)}{1-r},\quad |z|=r<1.$$

Кроме того, для $q\ge 3$ имеет место неравенство

$$|f'(z)|\le\frac{e^\pi}{1-r^2},\quad |z|=r<1.$$

Отсюда вытекает, что функция

$$f(z)=\int\limits_0^z\exp\left(\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\zeta^{2^k}\right)\mathrm{d}\zeta$$

неоднолистна в круге $\mathbb{D}$, если $|\lambda|>\ln 2=0.69\ldots$, что улучшает оценку, полученную Крецером: $|\lambda|>0.75$ [32]. Этот факт применяется для исследования спектра интегральных средних конформных отображений, порожденных лакунарными рядами Адамара с показателем 2 [13].

Для однолистных в круге $\mathbb{D}$ функций, логарифм производных которых представим в виде лакунарного ряда Адамара с показателем $q\ge 15$, в статье [33] обоснована гипотеза Бреннана, которая может быть сформулирована следующим образом. Предположим, что Ω – односвязная область, имеющая не менее чем две граничные точки, φ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω. Бреннан [34] предположил, что $\varphi'\in L_p(\Omega)$, $4/3<p<4$, то есть

$$\int\limits_\Omega|\varphi'|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,\quad 4/3<p<4.$$

Если Ω – плоскость с разрезом по некоторому лучу, то при $p\notin(4/3,4)$

$$\int\limits_\Omega|\varphi'|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\infty.$$

Нами также обоснована гипотеза Бреннана для класса функций, имеющих следующее представление [33]:

$$\ln \frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z + g(z),$$

где $a_k \geq 0$ при $k \geq 1$, а функция $g(z)$ удовлетворяет в круге $\mathbb{D}$ условию

$$\Re g(z) = o(\ln(1-|z|)), \quad |z| \to 0.$$

Ф.Д. Каюмовым [35] получен аналогичный результат, где условие на $\ln(zf'(z)/f(z))$ заменено таким же условием на $\ln f'(z)$.

Через Σ обозначим класс голоморфных и однолистных во внешности единичного круга $D^- = \{|\zeta| > 1\}$ функций F с разложением

$$F(\zeta) = \zeta + a_0 + a_1/\zeta + \cdots$$

в окрестности точки $\zeta = \infty$. Пусть Σ^* – класс звездных функций, то есть функций, которые отображают круг на внешность звездного множества, а Σ_0 – класс выпуклых функций, то есть функций, которые отображают круг на внешность выпуклого множества.

Работа [36] посвящена точным оценкам интегральных средних в этих классах. Получены следующие результаты.

Пусть $F \in \Sigma_0$ и $\Psi(z)$ – произвольная функция, голоморфная в круге $\{z : |z - - 1| < 1\}$. Тогда для любого $R > 1$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{|\zeta|=R} |\Psi(F'(\zeta))|^2 \, d\theta \leq \int\limits_{|\zeta|=R} |\Psi(1+1/\zeta^2)|^2 \, d\theta, \quad \zeta = R e^{i\theta}.$$

В частности, при $p > -1$ для любой функции $F \in \Sigma_0$ имеет место точная оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} |F'(e^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \sqrt{\pi} 2^{1+p} \frac{\Gamma(1/2+p/2)}{\Gamma(1+p/2)}.$$

В обоих неравенствах равенство достигается, например, для функции Жуковского $F(\zeta) = \zeta - 1/\zeta$.

Пусть $F = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \in \Sigma^*$ и $\Psi(z)$ – произвольная функция, голоморфная в круге $\{z : |z-1| < 3 - 2\sqrt{2}\}$. Тогда для любого $R \geq \sqrt{2}+1$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{|\zeta|=R} |\Psi(F'(\zeta))|^2 \, d\theta \leq \int\limits_{|\zeta|=R} |\Psi(1+1/\zeta^2)|^2 \, d\theta, \quad \zeta = R e^{i\theta}.$$

Через S_R обозначим подкласс функций из S, тейлоровские коэффициенты которых вещественны. Пусть функция Φ голоморфна в окрестности 1 и $\Phi(1) \neq 0$. Тогда найдется положительное число r_Φ, такое, что

$$\sup_{f \in S_R} \int\limits_{|z|=r} |\Phi(f'(z))| \, d\theta = \int\limits_{|z|=r} |\Phi(k'_\pm(z))| \, d\theta$$

для любого $r \leq r_\Phi$, где $k_\pm(z) = z/(1 \pm z)^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Республики Татарстан (проекты № 14-01-00351-а, 15-41-02433_ р_поволжье-а).

Summary

I.R. Kayumov. A Survey on the Integral Means Spectrum for Conformal Mappings.

The present survey is devoted to the description of the results about estimates of the integral means in various classes of analytic functions. Great importance is given to the boundary properties of conformal mappings. The systematic results on the estimation of the integral means spectrum and the well-known law of the iterated logarithm for conformal mappings, which was proven by N.G. Makarov in 1985, were the basic mathematical tools for this study. Precise estimates of the integral means in various subclasses of univalent functions are described. Estimates of the integral means spectrum in the class of functions mapping the exterior of the unit disk onto the attraction basins of the infinity of algebraic polynomials are presented.

Keywords: conformal mappings, integral means spectrum, harmonic measure.

Литература

1. *Littlewood J.* On inequalities in the theory of functions // Proc. London Math. Soc. (2). – 1925. – V. 23, No 1. – P. 481–519.
2. *Gronwall T.H.* Some remarks on conformal representation // Ann. of Math. – 1914–1915. – V. 16, No 1/4. – P. 72–76
3. *Clunie J., Pommerenke Ch.* On the coefficients of univalent functions // Michigan Math. J. – 1967. – V. 14, No 1. – P. 71–78.
4. *Carleson L., Jones P.W.* On coefficient problems for univalent functions and conformal dimension // Duke Math. J. – 1992. – V. 66, No 2. – P. 169–206.
5. *Makarov N.G.* Fine structure of harmonic measure // St. Petersburg Math. J. – 1999. – V. 10, No 2. – P. 217–268.
6. *Pommerenke Ch.* On the integral means of the derivative of a univalent function // J. London Math. Soc. (2). – 1985. – V. 32, No 2. – P. 254–258.
7. *Hedenmalm H., Shimorin S.* On the universal integral means spectrum of conformal mappings near the origin // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 135, No 7. – P. 2249–2255.
8. *Makarov N.G.* A note on the integral means of the derivative in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 96, No 2. – P. 233–236.
9. *Pommerenke Ch.* Boundary Behaviour of Conformal Maps. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. – 300 p.
10. *Kayumov I.R.* Lower estimates for integral means of univalent functions // Ark. Mat. – 2006. – V. 44, No 1. – P. 104–110.
11. *Kraetzer Ph.* Experimental bounds for the universal integral means spectrum of conformal maps // Complex Var. Theory Appl. – 1996. – V. 31, No 4. – P. 305–309.
12. *Beliaev D., Smirnov S.* Random conformal snowflakes // Ann. of Math. (2). – 2010. – V. 172, No 1. – P. 597–615.
13. *Каюмов И.Р., Маклаков Д.В., Каюмов Ф.Д.* Оценки спектра интегральных средних для лакунарных рядов // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 10. – С. 79–85.
14. *Carleson L., Makarov N.G.* Some results connected with Brennan's conjecture // Ark. Mat. – 1994. – V. 32, No 1. – P. 33–62.

15. *Feng J., MacGregor T.H.* Estimates of integral means of the derivatives of univalent functions // J. Anal. Math. – 1976. – V. 29, No 1. – P. 203–231.

16. *Каюмов И.Р.* Об одном неравенстве для универсального спектра интегральных средних // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, № 1. – P. 139–143.

17. *Makarov N.G.* Conformal mapping and Hausdorff measures // Ark. Mat. – 1987. – V. 25, No 1–2. – P. 41–89.

18. *Makarov N.G.* On the distortion of boundary sets under conformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3). – 1985. – V. 51, No 3. – P. 369–384.

19. *Каюмов И.Р.* Спектр интегральных средних и закон повторного логарифма для конформных отображений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 85–96.

20. *Kayumov I.R.* The law of the iterated logarithm for locally univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. – 2002. – V. 27, No 2. – P. 357–364.

21. *Hedenmalm H., Kayumov I.R.* On the Makarov law of the iterated logarithm // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 135, No 7. – P. 2235–2248.

22. *Каюмов И.Р.* К закону повторного логарифма для конформных отображений // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, Вып. 1. – С. 150–153.

23. *Лаврентьев М.А.* О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций // Матем. сб. – 1936. – Т. 1. – С. 815–846.

24. *Каюмов И.Р.* Метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых // Междунар. конф. «Функциональные пространства и теория аппроксимаций», посвящ. 110-летию со дня рожд. С.М. Никольского: Тез. докл. – М., 2015. – С. 156.

25. *McMullen C.T.* Thermodynamics, dimension and the Weil–Petersson metric // Invent. Math. – 2008. – V. 173, No 2. – P. 365–425.

26. *Le Thanh Hoang N., Zinsmeister M.* On Minkowski dimension of Jordan curves // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2014. – V. 39, No 2. – P. 787–810.

27. *Kayumov I.R.* The integral means spectrum for lacunary series // Ann. Acad. Sci. Fennicae. – 2001. – V. 26, No 2. – P. 447–453.

28. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 320 с.

29. *Каюмов И.Р.* Граничное поведение аналитических произведений Рисса в круге // Матем. труды. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 34–51.

30. *Littlewood J.* On the coefficients of schlicht functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1938. – V. 9, No 1. – P. 14–20.

31. *Каюмов И.Р.* Теорема искажения для однолистных лакунарных рядов // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44, № 6. – С. 1273–1279.

32. *Kraetzer Ph.* Algorithmische Methoden der konformen Abbildungen auf fraktale Gebiete: Dissertation. – Berlin, 2000. – 60 S.

33. *Каюмов И.Р.* О гипотезе Бреннана для специального класса функций // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, Вып. 4. – С. 537–541.

34. *Brennan J.E.* The integrability of the derivative in conformal mapping // J. London Math. Soc. (2). – 1978. – V. 18, No 2. – P. 261–272.

35. *Каюмов Ф.Д.* Интегральные оценки для производных однолистных функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 83–90.

36. *Каюмов И.Р.* Точные оценки интегральных средних для трех классов областей // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76, Вып. 4. – С. 510–516.

Поступила в редакцию
04.03.15

Каюмов Ильгиз Рифатович – доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *ikayumov@gmail.com*