Научный дайджест: Аппроксимативная вариация функций и селекционные принципы.

Авторы доклада: **проф. В.В. Чистяков, ст. преп. С.А. Чистякова** (Нижний Новгород)

XIV Казанская конференция по теории функций. Сентябрь 2019 г. («IX-2019»)

Селекционный принцип (или принцип выбора) – это теорема, которая утверждает, что при определенных предположениях последовательность функций f_j, заданных на отрезке $I = [a, b]$, имеет поточечно сходящуюся на I подпоследовательность. Наиболее известные примеры – принципы выбора Хелли. Теория селекционных принципов развивалась в работах Мущелака, Орлича, Уотермана и других математиков. Полученные ими результаты сформировали представление о том, что принципы выбора Хелли и их обобщения (на I) являются теоремами компактности в классе регулярных функций Reg(I) – функций, имеющих односторонние пределы во всех точках соответствующих полуотрезков $(a, b]$ и $[a, b)$.

При этом описания класса Reg(I) не обязательно должны опираться на понятие ограниченности вариации того или иного типа. Они могут использовать, например, и модуль изменения функции в смысле Чантурия, что позволяет строить принципы выбора, которые можно применять и к нерегулярным функциям. Тем не менее, исследование класса Reg(I) продолжает оставаться актуальным, что связано прежде всего с накоплением соответствий вида «описание Reg(I) $\leftrightarrow$ принцип выбора в $\mathbf{R}^I$», лежащих в основе построения новых селекций. Такой подход оказывается плодотворным при использовании аппроксимативной вариации $\{V_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon>0}$ функции $f \in M^I = \{f | f: I \to M\}$ в смысле Франьковой, где (M, d) – метрическое пространство; Reg(I;M) – соответствующий класс регулярных функций.

С использованием отмеченного подхода устанавливается следующая

Теорема 1 (Авторы, 2017). *Пусть* $\{ f_j \} \subset M^I$,

- *замыкание* $\{f_j(t) : j \in \mathbf{N}\}$ *в* M *компактно* $\forall t \in I$,
- $limsup_{j\to\infty} V_\varepsilon(f_j) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Тогда $f_{j_k} \to f$ *поточечно на* I $(k \longrightarrow \infty)$, *где* $f \in \mathrm{Reg}(I; M)$.

Эта теорема может быть применена к нерегулярным функциям, а второе условие в ней необходимо для равномерной сходимости. Однако это условие не является необходимым для поточечной сходимости, оно неустойчиво к замене метрики на *M* на (топологически) эквивалентную, и, вообще, в случае поточечной сходимости может не выполняться ни для какой из эквивалентных метрик.

Теорему 1 можно усилить при дополнительных свойствах *M*.

Теорема 2 (Авторы, 2018). *Пусть* $(M, \|\cdot\|)$ *– рефлексивное банахово пространство, двойственное к которому* $(\mathrm{M}^*, \|\cdot\|^*)$ *сепарабельно. Пусть последовательность* $\{ f_j \} \subset M^I$ *такова, что*

- $sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_j(t_0)\| \le C_0$ *для некоторых* $t_0 \in I$ *и* $C_0 \ge 0$;
- $limsup_{j\to\infty} V_\varepsilon(f_j) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Тогда $f_{j_k}(t) \to f(t)$ *слабо в* M $(k \longrightarrow \infty)$ *при любом* $t_0 \in I$, *где* $f \in \mathrm{Reg}(I; M)$.

Все представленные выше в докладе принципы выбора (в той или иной мере) базируются на принципе выбора Хелли для монотонных функций. Принципиально иной подход к селекционным принципам представил Шрейдер в 1972 г. в связи с применениями к дифференциальным уравнениям. В отличие от упомянутых принципов теорема Шрейдера базируется на теореме Рамсея из формальной логики. Применение теоремы Шрейдера в контексте аппроксимативных вариаций позволяет получить следующий результат.

Теорема 3 (Авторы, 2019). *Пусть* $(M, \|\cdot\|)$ *– нормированное пространство и* $\{ f_j \} \subset M^I$ *удовлетворяет условиям*:

- *замыкание* $\{f_j(t) : j \in \mathbf{N}\}$ *в* M *компактно* $\forall t \in I$;
- $limsup_{j,k\to\infty} V_\varepsilon(f_j - f_k) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Тогда $\{ f_j \}$ *содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность.*

Все представленные выше результаты можно иллюстрировать примерами, которые показывают их точность (и в некоторых случаях неулучшаемость).

Составитель настоящего дайджеста выражает глубокую благодарность авторам доклада за предоставленную ими возможность воспользоваться его электронной версией.

……………………………..

4-й ряд снизу, вторая и третий справа налево –

Светлана Александровна и Вячеслав Васильевич Чистяковы