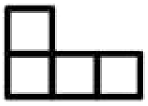
Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

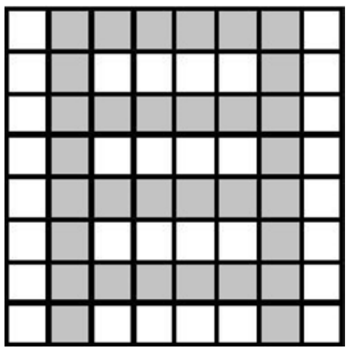
5 класс

Вариант № 1

1. Можно ли из клетчатой доски 8×8 вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино (см. рис.) так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать уголок из трёх клеток? (Резать можно только по линиям доски).



Решение: Если все клетки 2 и 7 столбцов будут вырезаны, то из столбцов 1 и 8 нельзя будет вырезать уголок из трёх клеток. Таким образом, достаточно найти пример того, как вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино из клетчатой доски 8×6, чтобы из оставшейся части доски 8×6 невозможно было вырезать уголок из трёх клеток. Такой пример существует:



2. Записано выражение 2×3×4×2×3×4×…, содержащее всего 768 чисел. Какой остаток получится при делении получившегося числа на 7?

Решение: Число переписывается как 24×24×24×...×24, где 24 содержится 256 раз. Остаток от деления 24 на 7 равен 3.

Для двух чисел верно следующее: Остаток произведения двух чисел равен остатку произведения остатков этих чисел. То есть:
если остаток 24/7 равен 3, то остаток от 24×24/7 равен остатку 3×3/7 или 9/7.
То есть остаток при делении 24×24/7 равен 2.

Далее перепишем выражение в виде:
(24×24) × (24×24) ×...× (24×24), где скобка повторяется 128 раз.
Внутри каждой скобки остаток при делении на 7 будет равен 2

Аналогичными рассуждениями запишем как

$(24\times24\times24\times24) \times (24\times24\times24\times24) \times...\times (24\times24\times24\times24)$, где скобка повторяется 64 раза, а остатки скобок при делении на 7 равны остатку $2\times2 = 4$

Продолжаем рассуждения:
при скобке из 8 чисел у нас 32 скобки и остаток 2
При скобке из 16 чисел у нас 16 скобок и остаток 4
При скобке из 32 чисел у нас 8 скобок и остаток 2
При скобке из 64 чисел у нас 4 скобки и остаток 4
При скобке из 128 чисел у нас 2 скобки и остаток 2
При скобке из 256 чисел у нас 1 скобка и остаток 4

3. В корзине лежат 19 ананасов. С помощью весов можно узнать общий вес любых трёх ананасов. Как выяснить общий вес всех ананасов за 9 взвешиваний?

Решение: Сначала взвешиваем тройки 1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4. Сложив эти результаты, получаем утроенный вес первых четырёх ананасов. Делим это число на три. Взвешиваем оставшиеся тройки (5-6-7, 8-9-10, 11-12-13, 14-15-16, 17-18-19). Прибавляем эти результаты к весу первых четырёх ананасов — получаем ответ.

4. В тетради у Димы записаны числа 1,2,3,4,5. Каждую секунду он прибавляет к любому из этих чисел 3 или 5. Через какое наименьшее время он может сделать все 5 чисел равными?

Решение: Найдём минимальное число, которое вообще можно получить доступными операциями из всех 5 чисел одновременно. Когда числа станут равными, будут равны и их остатки при делении на 3. Если получившееся число делится на 3, то к числу 5, прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть наше число >= 15. Если получившееся число имеет остаток 1 при делении на 3, то к 3 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 13. Если получившееся число имеет остаток 2 при делении на 3, то к 4 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 14. Таким образом, получена оценка, показывающая, что минимальное число >= 13.
Пример получения числа 13 из всех 5 чисел:
13 = 1+3+3+3+3
13 = 2+5+3+3
13 = 3+5+5
13 = 4+3+3+3
13 = 5+5+3

Теперь покажем, что для 13 число операций наименьшее:

Попытаемся получить число, большее, чем 13, но доступное за меньшее время. Такая попытка возможна, если попытаться убрать одну тройку в одной из сумм и заменить две-три другие на пятёрки. Такое возможно только для 1 и 4.
1) 14 = 1 + 3+5+5
Заметим, что
14=2+3+3+3+3
14=3+3+3+5
14=4+5+5
14=5+3+3+3
Число операций увеличилось
2) 16 =1+5+5+5
Заметим, что
16=2+5+3+3+3
16=3+3+5+5
16=4+3+3+3+3
16=5+5+3+3
Число операций увеличилось. Таким образом, Дима может сделать все числа равными за 14 секунд.

5. Петя и Вася играют в игру. В ряд лежат 600 конфет. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт одну или две конфеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре? Покажите, как должен играть этот игрок, чтобы обязательно победить?

Решение: Побеждает Вася.

Покажем первые два хода:

Петя берет 1 конфету	Петя берёт 2 конфеты
Вася берёт 2 конфеты	Вася берет 1 конфету

Отсюда сразу заметим, что Вася может контролировать остаток конфет так, что разница в конфетах между каждыми двумя его ходами составляет 3 штуки.
Тогда к концу его 199 хода останется всего три конфеты и наступит ход Пети.
Если Петя берёт одну конфету, Вася забирает две оставшиеся.
Если Петя берёт две конфеты, Вася берёт последнюю.

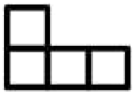
Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

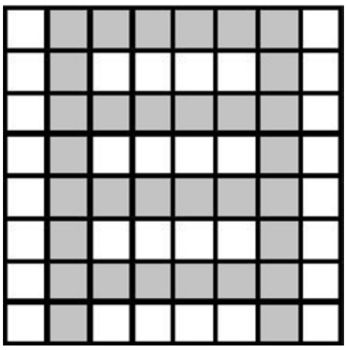
5 класс

Вариант № 2

1. Можно ли из клетчатой доски 8×8 вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино (см. рис.) так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать уголок из трёх клеток? (Резать можно только по линиям доски).



Решение: Если все клетки 2 и 7 столбцов будут вырезаны, то из столбцов 1 и 8 нельзя будет вырезать уголок из трёх клеток. Таким образом, достаточно найти пример того, как вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино из клетчатой доски 8×6, чтобы из оставшейся части доски 8×6 невозможно было вырезать уголок из трёх клеток. Такой пример существует:



2. Записано выражение 2×3×5×2×3×5×…, содержащее всего 768 чисел. Какой остаток получится при делении получившегося числа на 7?

Решение: Число переписывается как 30×30×30×...×30, где 30 содержится 256 раз.
Остаток от деления 30 на 7 равен 2.

Для двух чисел верно следующее: Остаток произведения двух чисел равен остатку произведения остатков этих чисел. То есть, если остаток от деления 30 на 7 равен 2, то остаток от 30×30/7 равен остатку 2×2/7 или 4/7.
То есть остаток при делении 30×30/7 равен 4.

Далее перепишем выражение в виде:
(30×30) × (30×30) ×...× (30×30), где скобка повторяется 128 раз.
Внутри каждой скобки остаток при делении на 7 будет равен 4

Аналогичными рассуждениями запишем как

(30×30×30×30) × (30×30×30×30) ×...× (30×30×30×30), где скобка повторяется 64 раза, а остатки скобок при делении на 7 равны остатку 4×4, то есть 2

Продолжаем рассуждения:
при скобке из 8 чисел у нас 32 скобки и остаток 4
При скобке из 16 чисел у нас 16 скобок и остаток 2
При скобке из 32 чисел у нас 8 скобок и остаток 4
При скобке из 64 чисел у нас 4 скобки и остаток 2
При скобке из 128 чисел у нас 2 скобки и остаток 4
При скобке из 256 чисел у нас 1 скобка и остаток 2

3. В корзине лежат 13 апельсинов. С помощью весов можно узнать общий вес любых трёх апельсинов. Как выяснить общий вес всех апельсинов за 7 взвешиваний?

Решение: Сначала взвешиваем тройки 1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4. Сложив эти результаты, получаем утроенный вес первых четырёх апельсинов. Делим это число на три. Взвешиваем оставшиеся тройки (5-6-7, 8-9-10, 11-12-13, 14-15-16, 17-18-19). Прибавляем эти результаты к весу первых четырёх апельсинов — получаем ответ.

4. В тетради у Димы записаны числа 2,3,4,5,6. Каждую секунду он прибавляет к любому из этих чисел 3 или 5. Через какое наименьшее время он может сделать все 5 чисел равными?

Решение: Найдём минимальное число, которое вообще можно получить доступными операциями из всех 5 чисел одновременно. Когда числа станут равными, будут равны и их остатки при делении на 3. Если получившееся число делится на 3, то к числу 5, прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть наше число >= 15. Если получившееся число имеет остаток 1 при делении на 3, то к 6 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 16. Если получившееся число имеет остаток 2 при делении на 3, то к 4 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 14. Таким образом, получена оценка, показывающая, что минимальное число >= 14.
Пример получения числа 14 из всех 5 чисел:
14 = 2+3+3+3+3
14 = 3+5+3+3
14 = 4+5+5
14 = 5+3+3+3
14 = 6+5+3
Теперь покажем, что для 14 число операций наименьшее:
Попытаемся получить число, большее, чем 14, но доступное за меньшее время.

Такая попытка возможна, если попытаться убрать одну тройку в одной из сумм и заменить две-три другие на пятёрки.
Такое возможно только для 2 и 5.
1) 15 = 2 + 3+5+5
Заметим, что
15=3+3+3+3+3
15=4+3+3+5
15=5+5+5
15=6+3+3+3
Число операций увеличилось
2) 16 =2+5+5+5
Заметим, что
16=3+5+3+3+3
16=4+3+5+5
16=5+3+3+3+3
16=6+5+3+3
Число операций увеличилось. Таким образом, Дима может сделать все числа равными за 14 секунд.

5. Петя и Вася играют в игру. В ряд лежат 800 конфет. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт две или три конфеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре? Покажите, как должен играть этот игрок, чтобы обязательно победить?

Решение: Побеждает Вася.

Покажем первые два хода:

Петя берет 2 конфеты	Петя берёт 3 конфеты
Вася берёт 3 конфеты	Вася берет 2 конфеты

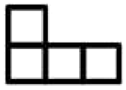
Отсюда сразу заметим, что Вася может контролировать остаток конфет так, что разница в конфетах между каждыми двумя его ходами составляет 5 штуки.
Тогда к концу его 159 хода останется всего пять конфет и наступит ход Пети.
Если Петя берёт две конфеты, Вася забирает три оставшиеся.
Если Петя берёт три конфеты, Вася берёт две оставшиеся.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

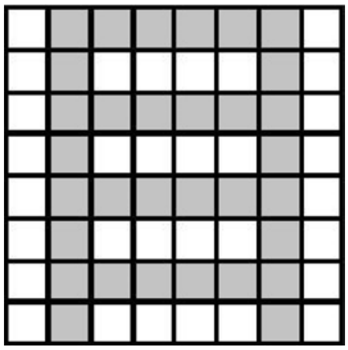
Казань, 2 апреля 2023 г.

5 класс

<u>Вариант № 3</u>

1. Можно ли из клетчатой доски 8×8 вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино (см. рис.) так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать уголок из трёх клеток? (Резать можно только по линиям доски). 

Решение: Если все клетки 2 и 7 столбцов будут вырезаны, то из столбцов 1 и 8 нельзя будет вырезать уголок из трёх клеток. Таким образом, достаточно найти пример того, как вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино из клетчатой доски 8×6, чтобы из оставшейся части доски 8×6 невозможно было вырезать уголок из трёх клеток. Такой пример существует:



2. Записано выражение 2×4×5×2×4×5…, содержащее всего 768 чисел. Какой остаток получится при делении получившегося числа на 7?

Решение: Число переписывается как 40×40×40×...×40, где 40 содержится 256 раз.
Остаток от деления 40 на 7 равен 5.

Для двух чисел верно следующее: Остаток произведения двух чисел равен остатку произведения остатков этих чисел. То есть: если остаток 40/7 равен 5, то остаток от 40×40/7 равен остатку 5×5/7 или 25/7.
То есть остаток при делении 40×40/7 равен 4.

Далее перепишем выражение в виде:
(40×40) × (40×40) ×...× (40×40), где скобка повторяется 128 раз.
Внутри каждой скобки остаток при делении на 7 будет равен 4

Аналогичными рассуждениями запишем как

(40×40×40×40) × (40×40×40×40) ×...× (40×40×40×40), где скобка повторяется 64 раза, а остатки скобок при делении на 7 равны остатку 5×5, то есть 2

Продолжаем рассуждения:
при скобке из 8 чисел у нас 32 скобки и остаток 4
При скобке из 16 чисел у нас 16 скобок и остаток 2
При скобке из 32 чисел у нас 8 скобок и остаток 4
При скобке из 64 чисел у нас 4 скобки и остаток 2
При скобке из 128 чисел у нас 2 скобки и остаток 4
При скобке из 256 чисел у нас 1 скобка и остаток 2

3. В корзине лежат 16 бананов. С помощью весов можно узнать общий вес любых трёх бананов. Как выяснить общий вес всех бананов за 8 взвешиваний?

Решение: Сначала взвешиваем тройки 1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4. Сложив эти результаты, получаем утроенный вес первых четырёх бананов. Делим это число на три. Взвешиваем оставшиеся тройки (5-6-7, 8-9-10, 11-12-13, 14-15-16) Прибавляем эти результаты к весу первых четырёх бананов — получаем ответ.

4. В тетради у Димы записаны числа 3,4,5,6,7. Каждую секунду он прибавляет к любому из этих чисел 3 или 5. Через какое наименьшее время он может сделать все 5 чисел равными?

Решение: Найдём минимальное число, которое вообще можно получить доступными операциями из всех 5 чисел одновременно. Когда числа станут равными, будут равны и их остатки при делении на 3.
Если получившееся число делится на 3, то к числу 5, прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть наше число >= 15.
Если получившееся число имеет остаток 1 при делении на 3, то к 6 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 16.
Если получившееся число имеет остаток 2 при делении на 3, то к 7 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 17. Таким образом, получена оценка, показывающая, что минимальное число >= 15.
Пример получения числа 13 из всех 5 чисел:
15 = 3+3+3+3+3
15 = 4+5+3+3
15 = 5+5+5
15 = 6+3+3+3
15 = 7+5+3
Теперь покажем, что для 15 число операций наименьшее:
Попытаемся получить число, большее, чем 15, но доступное за меньшее время.
Такая попытка возможна, если попытаться убрать одну тройку в одной из сумм и заменить две-три другие на пятёрки.

Такое возможно только для 3 и 6.

1) 16 = 3 + 3+5+5
Заметим, что
16=4+3+3+3+3
16=5+3+3+5
16=6+5+5
16=7+3+3+3
Число операций увеличилось

2) 18 =3+5+5+5
Заметим, что
18=4+5+3+3+3
18=5+3+5+5
18=6+3+3+3+3
18=7+5+3+3

Число операций увеличилось. Таким образом, Дима может сделать все числа равными за 14 секунд.

5. Петя и Вася играют в игру. В ряд лежат 1400 конфет. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт три или четыре конфеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре? Покажите, как должен играть этот игрок, чтобы обязательно победить?

Решение: Побеждает Вася.

Покажем первые два хода:

Петя берет 3конфеты	Петя берёт 4 конфеты
Вася берёт 4 конфеты	Вася берет 3 конфеты

Отсюда сразу заметим, что Вася может контролировать остаток конфет так, что разница в конфетах между каждыми двумя его ходами составляет 7 штуки.
Тогда к концу его 199 хода останется всего семь конфет и наступит ход Пети.
Если Петя берёт три конфеты, Вася забирает четыре оставшиеся.
Если Петя берёт четыре конфеты, Вася берёт три оставшиеся.

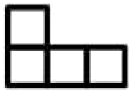
Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

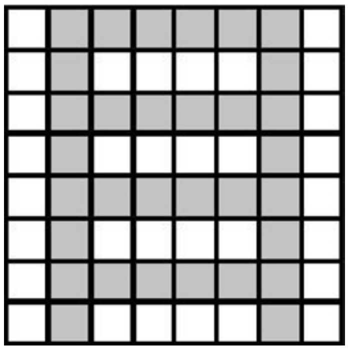
5 класс

<u>Вариант № 4</u>

1. Можно ли из клетчатой доски 8×8 вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино (см. рис.) так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать уголок из трёх клеток? (Резать можно только по линиям доски).



Решение: Если все клетки 2 и 7 столбцов будут вырезаны, то из столбцов 1 и 8 нельзя будет вырезать уголок из трёх клеток. Таким образом, достаточно найти пример того, как вырезать 8 фигурок «Г»-тетрамино из клетчатой доски 8×6, чтобы из оставшейся части доски 8×6 невозможно было вырезать уголок из трёх клеток. Такой пример существует:



2. Записано выражение 3×4×5×3×4×5…, содержащее всего 768 чисел. Какой остаток получится при делении получившегося числа на 7?

Решение: Число переписывается как 60×60×60×...×60, где 60 содержится 256 раз.
Остаток от деления 60 на 7 равен 4.

Для двух чисел верно следующее: Остаток произведения двух чисел равен остатку произведения остатков этих чисел. То есть: если остаток 60/7 равен 5, то остаток от 60×60/7 равен остатку 4×4/7 или 16/7.
То есть остаток при делении 60×60/7 равен 2.

Далее перепишем выражение в виде:
(60×60) × (60×60) ×...× (60×60), где скобка повторяется 128 раз.
Внутри каждой скобки остаток при делении на 7 будет равен 2

Аналогичными рассуждениями запишем как

(60×60×60×60) × (60×60×60×60) ×...× (60×60×60×60), где скобка повторяется 64 раза, а остатки скобок при делении на 7 равны остатку 5×5, то есть 4

Продолжаем рассуждения:
при скобке из 8 чисел у нас 32 скобки и остаток 2
При скобке из 16 чисел у нас 16 скобок и остаток 4
При скобке из 32 чисел у нас 8 скобок и остаток 2
При скобке из 64 чисел у нас 4 скобки и остаток 4
При скобке из 128 чисел у нас 2 скобки и остаток 2
При скобке из 256 чисел у нас 1 скобка и остаток 4

3. В корзине лежат 22 груши. С помощью весов можно узнать общий вес любых трёх груш. Как выяснить общий вес всех груш за 10 взвешиваний?

Решение: Сначала взвешиваем тройки 1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4. Сложив эти результаты, получаем утроенный вес первых четырёх груш. Делим это число на три. Взвешиваем оставшиеся тройки (5-6-7, 8-9-10, 11-12-13, 14-15-16, 17-18-19, 20-21-22). Прибавляем эти результаты к весу первых четырёх груш — получаем ответ.

4. В тетради у Димы записаны числа 4,5,6,7, 8. Каждую секунду он прибавляет к любому из этих чисел 3 или 5. Через какое наименьшее время он может сделать все 5 чисел равными?

Решение: Найдём минимальное число, которое вообще можно получить доступными операциями из всех 5 чисел одновременно. Когда числа станут равными, будут равны и их остатки при делении на 3. Если получившееся число делится на 3, то к числу 8, прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть наше число >= 18. Если получившееся число имеет остаток 1 при делении на 3, то к 6 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 16. Если получившееся число имеет остаток 2 при делении на 3, то к 7 прибавили 5 как минимум 2 раза, то есть итоговое число >= 17. Таким образом, получена оценка, показывающая, что минимальное число >= 16.
Пример получения числа 16 из всех 5 чисел:
16 = 4+3+3+3+3
16 = 5+5+3+3
16 = 6+5+5
16 = 7+3+3+3
16 = 8+5+3
Теперь покажем, что для 16 число операций наименьшее:
Попытаемся получить число, большее, чем 16, но доступное за меньшее время.
Такая попытка возможна, если попытаться убрать одну тройку в одной из сумм и заменить две-три другие на пятёрки.

Такое возможно только для 4 и 7.
1) 17 = 4 + 3+5+5
Заметим, что
17=5+3+3+3+3
17=6+3+3+5
17=7+5+5
17=8+3+3+3
Число операций увеличилось

2) 19 =4+5+5+5
Заметим, что
19=5+5+3+3+3
19=6+3+5+5
19=7+3+3+3+3
19=8+5+3+3
Число операций увеличилось. Таким образом, Дима может сделать все числа равными за 14 секунд.

5. Петя и Вася играют в игру. В ряд лежат 900 конфет. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт четыре или пять конфет. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре? Покажите, как должен играть этот игрок, чтобы обязательно победить?

Решение: Побеждает Вася.

Покажем первые два хода:

Петя берет 4 конфеты	Петя берёт 5 конфет
Вася берёт 5 конфет	Вася берет 4 конфеты

Отсюда сразу заметим, что Вася может контролировать остаток конфет так, что разница в конфетах между каждыми двумя его ходами составляет 9 штук.
Тогда к концу его 99 хода останется всего девять конфет и наступит ход Пети.
Если Петя берёт четыре конфеты, Вася забирает пять оставшихся.
Если Петя берёт пять конфет, Вася берёт четыре оставшиеся.