Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность : 010100.65 — Математика

Специализация: Алгебра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

Эндоморфизмы свободных полумодулей над полукольцом $(\mathbb{I}, \max, \cdot)$

Работа завершена:

«___»____________2015 г. __________Ю.Ю. Попова

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

кафедры алгебры и математической логики

«___»____________2015 г. ______________С.Н. Ильин

Заведующий кафедрой:

доктор физ.-мат. наук, профессор

«___»____________2015 г. __________М.М. Арсланов

Казань — 2015 г.

Оглавление

Введение

Понятие полукольца впервые появилось в начале XX-го века в работах, связанных с изучением идеалов колец. Наиболее активно теория полуколец стала развиваться в последние несколько десятилетий; в особенности это относится к тем ее областям, которые связаны с практическими задачами теории графов, теории вероятностей, теории автоматов и других разделов математики, а также физики, информатики и т.д. (Подробнее о полукольцах и их практических приложениях можно узнать, например, из книги [3].) В частности, одним из важных с практической точки зрения полуколец, возникающим в ряде задач теории вероятностей, теории множеств, теории меры, является полукольцо $(\mathbb{I}, \max, \cdot)$, где $\mathbb{I} = [0, 1]$. Особенно интенсивно это полукольцо используется в теории нечетких множеств (fuzzy sets), теории нечетких отношений (fuzzy relations), а также в нечеткой логике (fuzzy logic) — см., напр., [4].

Данная дипломная работа посвящена изучению свойств линейных отображений конечномерных свободных полумодулей (т.е. полумодулей с конечным числом базисных элементов) над полукольцом $(\mathbb{I}, \max, \cdot)$.

Конечномерные свободные $\mathbb{I}$-полумодули естественно изображать в виде единичных кубов в соответствующих n-мерных пространствах, поэтому линейные отображения таких полумодулей в себя имеют при малых n физическое представление в виде деформаций квадрата $\mathbb{I}^2$ и куба $\mathbb{I}^3$.

Основная цель дипломной работы состоит в исследовании свойств, а также описании и классификации таких деформаций.

Работа состоит из 4-х параграфов.

В первом параграфе приводятся основные понятия и определения, используемые в дипломной работе.

Второй параграф посвящен вопросу о представлении эндоморфизмов свободного $\mathbb{I}$-полумодуля с базисом из двух элементов в виде композиции элементарных деформаций и перестановочных преобразований.

В третьем параграфе приведено описание образов эндоморфизмов и их геометрическая интерпретация.

В четвертом параграфе исследуются собственные векторы и собственные значения элементарных деформаций свободных $\mathbb{I}$-полумодулей с базисом из трех элементов.

В конце работы представлен список используемой литературы.

1. Основные понятия и определения.

Определение 1. Непустое множество S с бинарными операциями $(+,\cdot)$ называется *полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

1. $(S,+)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;
2. $(S,\cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;
3. умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$a(b+c) = ab + ac,$$
$$(a+b)c = ac + bc$$

для любых $a, b, c \in S$;

4. $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ для любого $a \in S$.

Определение 2. Полукольцо, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется *полутелом*; коммутативное полутело называется *полуполем*.

Обозначим $\mathbb{I} = [0,1]$. Зададим на $\mathbb{I}$ операцию сложения следующим образом: $a+b = \max(a,b)$, а умножение возьмем обычное.
Непосредственно проверяется, что полученная система $(\mathbb{I}, \max, \cdot)$ образует коммутативное полукольцо.

Замечание 1. Полукольцо $(\mathbb{I}, \max, \cdot)$ образует подполукольцо в полуполе $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$, но при этом само не является полуполем.

Определение 3. Коммутативная полугруппа $(A, +, 0)$ называется *правым полумодулем* над полукольцом S (или S-полумодулем), если задано умножение справа элементов $a \in A$ на элементы $s \in S$, обозначаемое as, и при этом для любых $a, b \in A$, $s, t \in S$ выполняются условия:

1. $a(st) = (as)t$;
2. $(a + b)s = as + bs$;
3. $a(s + t) = as + at$;
4. $a \cdot 1 = a$;
5. $0 \cdot s = a \cdot 0 = 0$.

Двойственным образом вводится определение левого полумодуля. Все результаты, справедливые для правых полумодулей, будут верны и для левых, и наоборот. Все рассматриваемые ниже полумодули считаются правыми.

Определение 4. Отображение $\varphi\colon A_S \to B_S$ называется *гомоморфизмом* полумодулей, если:

1. $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ для любых $a, a' \in A$;
2. $\varphi(as) = \varphi(a)s$ для любых $a \in A, s \in S$.

Гомоморфизм $\varphi\colon A \to A$ называется *эндоморфизмом*.

Определение 5. Множество $\{e_i, i \in I\}$ элементов S-полумодуля A называется *базисом*, если:

1. $\forall a \in A \exists s_{i_1}, ..., s_{i_k} \in S$ такие, что $a = e_{i_1}s_{i_1} + ... + e_{i_k}s_{i_k}$;
2. Из равенства

$$\sum_{i \in I} e_i s_i = \sum_{i \in I} e_i s_i'$$

вытекает $s_i = s_i'$ для любого $i \in I$.
Полумодуль, обладающий базисом, называется *свободным*.

Пример. $A = \mathbb{I}^n = \{(s_1 \dots s_n), s_i \in \mathbb{I}$ при любом $i\}$ с поточечными операциями сложения и умножения на элементы из $\mathbb{I}$ образует свободный полумодуль с базисом $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$.

Определение 6. Бинарное отношение $\sim$ на полумодуле M называется *конгруэнцией*, если оно является гомоморфным отношением эквивалентности на M, то есть:

1. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности;

2. сохраняет полумодульные операции, то есть для любых $a, b, c \in M, s \in S$:

$$a \sim b \Rightarrow a + c \sim b + c$$

$$a \sim b \Rightarrow as \sim bs.$$

2. Эндоморфизмы и элементарные деформации.

Пусть M — свободный полумодуль с базисом $\{e_1, ..., e_n\}$ над полукольцом S.

Ясно, что всякий эндоморфизм $\alpha : M \to M$ определяется образами базисных элементов: $\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}, i = 1, \ldots, n$.
Таким образом, эндоморфизм α можно задать матрицей $A = (a_{ij})$ порядка n с элементами из полукольца S.

Эндоморфизм полумодуля M назовем *элементарной деформацией*, если он оставляет неизменными все базисные элементы, кроме может быть одного. Другими словами, матрица, отвечающая элементарной деформации, отличается от единичной матрицы не более чем одним столбцом.

Под *перестановочными преобразованиями* понимаются преобразования, отвечающие перестановочным матрицам. Например, легко видеть, что перестановочное преобразование, отвечающее матрице порядка 2, является либо тождественным преобразованием, либо симметрией.

Элементарные деформации и перестановочные преобразования свободных $\mathbb{I}$-полумодулей имеют более простую геометрическую интерпретацию по сравнению с произвольными эндоморфизмами. Поэтому представляет интерес вопрос о возможности представления произвольного эндоморфизма в виде композиции элементарных деформаций и перестановочных преобразований. Следующая теорема полностью решает этот вопрос для свободных $\mathbb{I}$-полумодулей с двухэлементными базисами.

Теорема : Всякий эндоморфизм свободного $\mathbb{I}$-полумодуля с базисом из двух элементов можно представить в виде композиции элементарных деформаций и перестановочных преобразований.

Доказательство : Как уже было сказано выше, эндоморфизмы свободных полумодулей задаются матрицами. Рассмотрим для матрицы 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

всевозможные случаи.

1. Сначала предположим, что A содержит нулевой столбец.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что A есть произведение двух элементарных деформаций:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, если $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, то матрицу A можно представить в виде $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Для матриц, содержащих нулевую строку, имеем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Теперь рассмотрим матрицу A, в которой отсутствуют нулевые

столбцы, то есть $m_1 = \max(a_{11}, a_{21}) > 0$ и $m_2 = \max(a_{12}, a_{22}) > 0$. Тогда A можно представить в виде:

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

причем в каждом столбце матрицы $B = (b_{ij})$ есть элемент 1. Очевидно, для завершения доказательства достаточно получить требуемое представление для матрицы B. Поэтому ниже без ограничения общности считаем, что $B = A$.

Возможны следующие подслучаи:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Домножая при необходимости матрицу A справа на $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, можно считать, что $a_{21} \le a_{22}$. В этом случае матрицу A можно представить в виде произведения: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$.

Аналогично разбирается случай представимости матрицы вида

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}$.

В этом случае для матрицы A справедливо следующее разложение

$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично разбирается случай представимости матрицы вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}$.

Итак, в каждом из возможных случаев получено необходимое представление матрицы A в виде композиции элементраных деформаций и перестановочных преобразований. Таким образом, теорема полностью доказана.

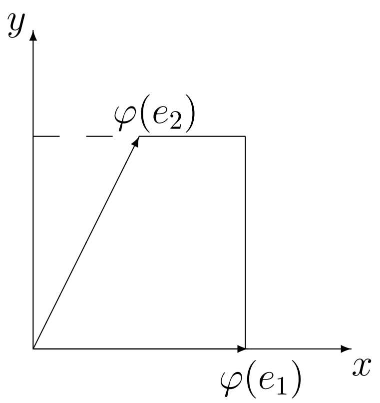
3. Эндоморфизмы свободных $\mathbb{I}$-полумодулей размерности 2.

В этом параграфе описываются образы эндоморфизмов свободных $\mathbb{I}$-полумодулей размерности 2, а также приводится геометрическая интерпретация таких эндоморфизмов.

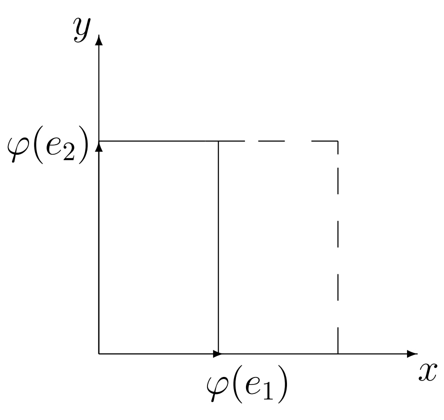
а) Образы эндоморфизмов.

Ниже схематично представлены основные типы образов эндоморфизмов свободных полумодулей размерности 2 над полукольцом $(\mathbb{I}, \max, \cdot)$.
Пусть $\varphi\colon \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}^2$ — произвольный эндоморфизм. Обозначим через e_1 и e_2 базисные элементы (1,0) и (0,1), соответственно.

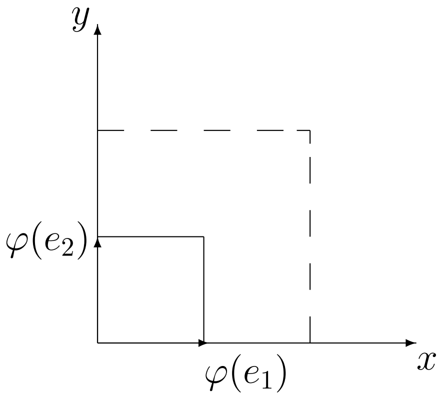
1. $\varphi(e_1) = e_1, \varphi(e_2) = e_1 a + e_2$, где $0 < a \leq 1$.



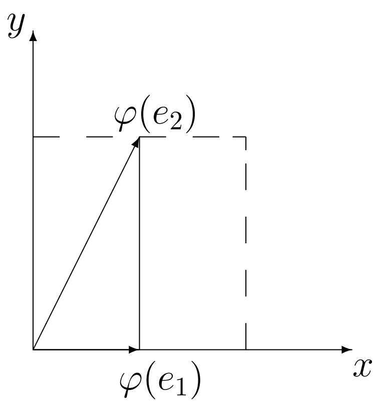
2. $\varphi(e_1) = e_1 a, \varphi(e_2) = e_2$, где $0 < a \leq 1$.



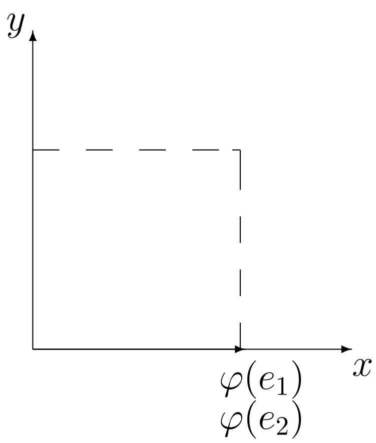
3. $\varphi(e_1) = e_1 a + e_2, \varphi(e_2) = e_2 a + e_1$, где $0 < a \leq 1$.



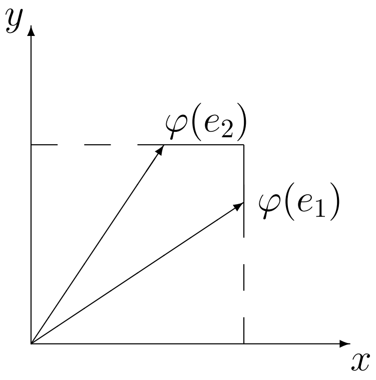
4. $\varphi(e_1) = e_1 a, \varphi(e_2) = e_1 a + e_2$, где $0 < a \leq 1$.



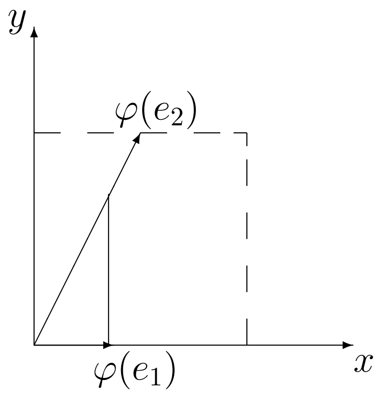
5. $\varphi(e_1) = e_1, \varphi(e_2) = e_1$.



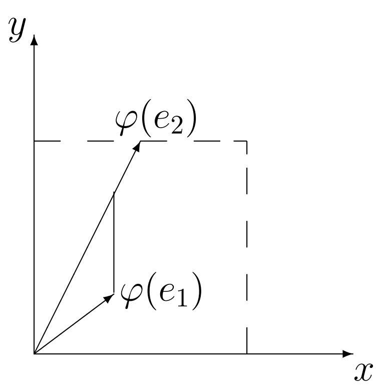
6. $\varphi(e_1) = e_1 + e_2 a_1, \varphi(e_2) = e_1 a_2 + e_2$, где $0 < a_1, a_2 \leq 1$.



7. $\varphi(e_1) = e_1 a_1, \varphi(e_2) = e_1 a_2 + e_2$, где $0 < a_1 < a_2 \leq 1$.

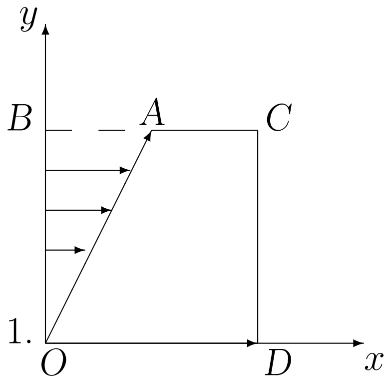


8. $\varphi(e_1) = e_1 a_1 + e_2 a_2, \varphi(e_2) = e_1 a_3 + e_2$, где $0 < a_1, a_2 < a_3 \leq 1$.

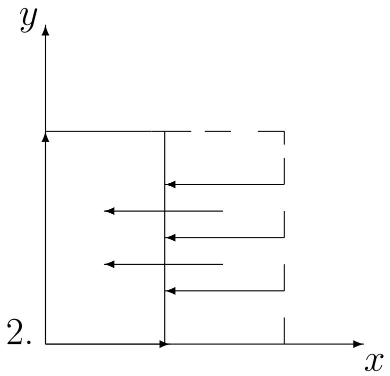


б) Геометрическая интерпретация.

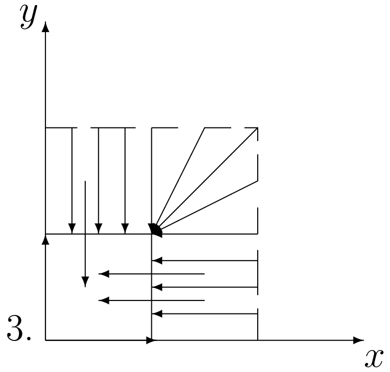
Приведенные ниже рисунки описывают действия эндоморфизмов из п.а).



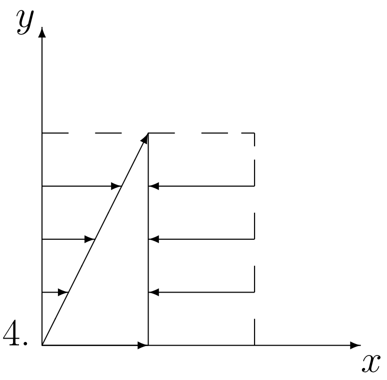
Каждая точка из трапеции $OACD$ остается неизменной, точки из OAB конгруэнтны точкам из $[O, A]$ по горизонтальным прямым, как представлено на рисунке.



Различных конгруэнтных точек нет. Сжатие происходит параллельно оси Oy с некоторым коэффициентом a. Матрица эндоморфизма: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

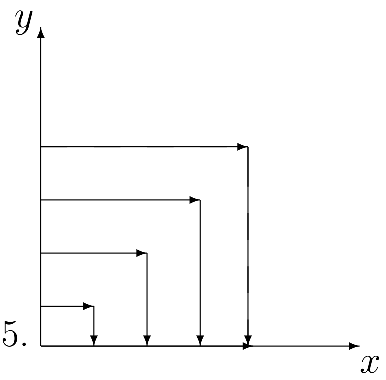


Комбинация сжатий по осям Ox и Oy представлена в виде: $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$.

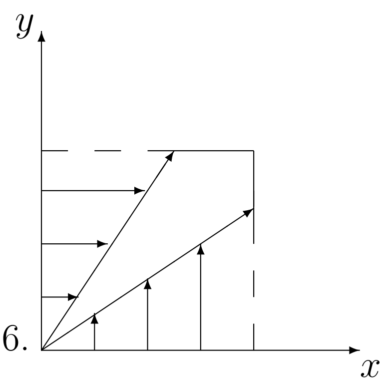
4. 

Последовательно применены действия из п.2 и п.1. Комбинация имеет вид:

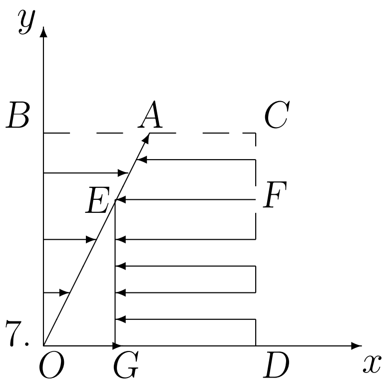
$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 

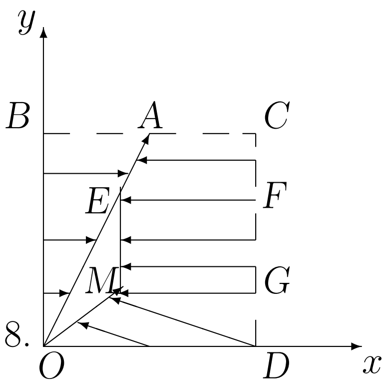
В случае 5 образы базисных векторов совпадают друг с другом. Конгруэнтные пары точек расположены вдоль стрелок, указанных на рисунке.

6. 

В данном случае преобразвание является композицией деформации из п. 1 и симметричной к ней деформации.

7. 

Любая точка из треугольника OAB переходит в точку из $[O, A]$,точки из трапеции $EACF$ переходят в точки из $[E, A]$, точки из прямоугольника $GEFD$ переходят точки из $[G, E]$, а точки из треугольника OEG остаются неизменными. В данном рисунке применяется последовательность действий из п.2 и п.1. Комбинация имеет вид: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. 

Любая точка из треугольника OAB переходит в точку из $[O, A]$,точки из прямоугольника $MEFG$ переходят в точки из $[E, M]$, точки из трапеции $EACF$ переходят точки из $[E, A]$, точки из трапеции $OMGD$ переходят в точки из $[O, M]$, как представлено на рисунке.

4. Собственные векторы и собственные значения элементарных деформаций.

Для определенности будем рассматривать элементарные деформации свободного полумодуля $\mathbb{I}^3$. Без ограничения общности можно считать, что деформация меняет только первый базисный элемент, и тогда ее матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы A и соответствующие им собственные векторы, для этого решим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_1 = \lambda x_1; \\ a_2x_1 + x_2 = \lambda x_2; \\ a_3x_1 + x_3 = \lambda x_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим все возможные случаи:

1. $a_1 = 0$. Тогда 1-е уравнение системы (1) примет вид $\lambda x_1 = 0$. Возможны два подслучая:

1.1. $\lambda = 0$. Из 2-го и 3-его уравнений системы (1) следует, что

$x_2 = x_3 = 0$. Таким образом, каждый собственный вектор имеет вид $e = (x_1, 0, 0)$ при $x_1 > 0$.

1.2. $x_1 = 0$. Тогда 2-е и 3-е уравнения системы (1) запишутся в виде $x_2 = \lambda x_2$, $x_3 = \lambda x_3$. Следовательно, $\lambda = 1$, а собственные векторы имеют вид $e = (0, x_2, x_3)$ при x_2 и x_3 не равных нулю одновременно.

2. $a_1 \neq 0$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. $\lambda \neq a_1$. Тогда из 1-го уравнения системы вытекает, что $x_1 = 0$. Поэтому данный случай аналогичен приведенному выше случаю 1.2.

2.2. $\lambda = a_1$. При $a_1 < 1$ из 2-го и 3-его уравнений системы (1) следует, что $x_2 = x_3 = 0$, как это было в в подслучае 1.1. Поэтому собственные значения и собственные векторы имеют вид, описанный в упомянутом п. 1.1. Если же $a_1 = 1$, то из 2-го и 3-его уравнений системы вытекают неравенства: $a_2 x_1 \leq x_2$ и $a_3 x_1 \leq x_3$. В качестве собственного вектора в этом случае годится любой ненулевой вектор, удовлетворяющий при $a_2 \neq 0$ или $a_3 \neq 0$ приведенным выше неравенствам. В частности, собственным будет вектор $e = (1, 1, 1)$.

Список литературы

[1] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 368с.

[2] В. В. Чермных. Полукольца. Учебное пособие. Киров, 1997. – 131с.

[3] Golan J.S. «Semirings and their applications». Kluwer Academic Publishers, London, 1999.

[4] Mordeson, J. N., Malik, D.S., Clark, T. D. Application of fuzzy logic to social choice theory. Monographs and Research Notes in Mathematics. Boca Raton, Fl: CRC Press, 2015.

.