УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 1 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 26–39 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 514.762.33

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СУММАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ В РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

А.В. Ануфриева, Е.В. Рунг, Д.Н. Тумаков

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Рассмотрена граничная задача для одномерной системы уравнений Ламе на отрезке, соответствующая физической задаче прохождения упругой волны через градиентный слой. При этом коэффициенты уравнений являются комплекснозначными непрерывными функциями. Рассмотрены краевые условия самого общего вида при дополнительном условии, означающем в физическом контексте отсутствие поверхностных волн на рабочей частоте. Сформулировано понятие обобщенного решения в пространстве Соболева. Методом сумматорных тождеств построена разностная схема. Для случая, когда коэффициенты уравнений и искомые функции обладают достаточной гладкостью, показано, что погрешность аппроксимации имеет порядок $O(h^2)$.

Ключевые слова: граничная задача, система Ламе, обобщенное решение, метод сумматорных тождеств, разностная схема

Введение

Граничные задачи для системы Ламе возникают, в частности, при описании процессов распространения и дифракции упругих волн. Например, система обыкновенных дифференциальных уравнений (одномерная система Ламе) возникает при изучении дифракции упругих волн на градиентном изотропном [1, 2] и градиентном трансверсально-изотропном слоях [3].

В последние годы для решения краевых задач для дифференциальных уравнений широко используется метод конечных элементов [4–7]. Данный метод особенно эффективен для многомерных задач и задач со сложной границей [8]. Однако в одномерном случае конкуренцию данному способу решения вполне могут составить конечно-разностные методы.

В настоящей работе сформулирована обобщенная постановка задачи, решение которой принадлежит пространству Соболева и обладает меньшей гладкостью по сравнению с классическим решением. Переход к обобщенной формулировке задачи возможен при определенных требованиях на коэффициенты краевых условий. Эти требования с физической точки зрения означают, что на полуплоскостях, прилегающих к слою, поверхностные волны не возбуждаются. Доказана теорема об эквивалентности классического (дважды непрерывно дифференцируемого) и обобщенного решений задачи.

Метод сумматорных тождеств [9] позволяет достичь погрешности аппроксимации $O(h^2)$. Этот алгоритм построения разностных схем нами был использован для решения уравнения Гельмгольца, к которому сводится, например, одномерная задача дифракции упругой волны на градиентном слое [10], и для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации [11, 12].

В методе сумматорных тождеств, как и в большинстве численных методов, требуется дифференцируемость функций в окрестности узловых точек. Это надо учитывать при построении сетки, например, в задаче рассеяния упругой волны на фрактальных структурах [13] требуется, чтобы узлы сетки (в которых нарушается гладкость) не лежали в окрестности фрактальных изломов.

В настоящей работе показано, что если коэффициенты уравнений имеют три ограниченные производные в окрестности узлов сетки, а искомые функции имеют четыре ограниченные производные, то погрешность аппроксимации полученной разностной схемы имеет порядок $O(h^2)$.

1. Обобщенная формулировка задачи

Рассмотрим на интервале $x \in (0, L)$ линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_1(x)$, $u_2(x)$

$$\frac{d}{dx}\Big(c_{s1}\frac{du_s}{dx}\Big) + c_{s2}u_s + c_{s3}\frac{du_k}{dx} + c_{s4}u_k = q_s, \quad s,k = 1,2, \quad s \neq k. \tag{1}$$

Краевые условия примем в наиболее общем виде, предполагая, что $s, k = 1, 2$, $s \neq k$,

$$a_{s1}\,\frac{du_s(0)}{dx} + a_{s2}u_s(0) + a_{s3}\,\frac{du_k(0)}{dx} + a_{s4}u_k(0) = f_s, \tag{2}$$

$$b_{s1}\,\frac{du_s(L)}{dx} + b_{s2}u_s(L) + b_{s3}\,\frac{du_k(L)}{dx} + b_{s4}u_k(L) = g_s. \tag{3}$$

Будем считать, что функции $c_{si}(x)$, $q_s(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$; $s = 1, 2$, являются комплекснозначными непрерывными функциями на отрезке $[0, L]$, при этом выполняются соотношения

$$c_{s1}(0) \neq 0, \quad c_{s1}(L) \neq 0, \quad s = 1, 2, \tag{4}$$

числа a_{si}, b_{si}, $i = 1, 2, 3$, $s = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\Delta_1 \equiv a_{11} \cdot a_{21} - a_{23} \cdot a_{13} \neq 0, \quad \Delta_2 \equiv b_{11} \cdot b_{21} - b_{23} \cdot b_{13} \neq 0. \tag{5}$$

Условия (4), (5) имеют следующий физический смысл. Неравенство нулю коэффициентов c_{s1} означает, что ненулевыми являются продольная и поперечная скорости в точках $x = 0$ и $x = L$ для случая, когда уравнение (1) описывает распространение упругой волны в градиентном изотропном слое, и что продольная и поперечная скорости в плоскости изотропии не равны нулю в случае трансверсально-изотропных сред [14].

Относительно условий (5) отметим, что если краевая задача (1)–(3) описывает процесс дифракции на градиентных слоях [1, 3], то условия (5) означают невозбуждение поверхностных мод (волн Рэлея) в прилегающих полуплоскостях.

Краевые условия (2), (3) представим в следующем виде:

$$c_{s1}(0)\,\frac{du_s(0)}{dx} - \varphi_{s1}\big(u_1(0), u_2(0)\big) = 0, \quad s = 1, 2, \tag{6}$$

$$c_{s1}(L)\,\frac{du_s(L)}{dx} - \varphi_{s2}\big(u_1(L), u_2(L)\big) = 0, \quad s = 1, 2, \tag{7}$$

где φ_{ij}, $i, j = 1, 2$, заданы формулами

$$\varphi_{11} = c_{11}(0)/\Delta_1 \cdot \begin{vmatrix} f_1 - a_{12}u_1(0) - a_{14}u_2(0) & a_{13} \\ f_2 - a_{24}u_1(0) - a_{22}u_2(0) & a_{21} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\varphi_{21} = c_{21}(0)/\Delta_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & f_1 - a_{12}u_1(0) - a_{14}u_2(0) \\ a_{23} & f_2 - a_{24}u_1(0) - a_{22}u_2(0) \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$\varphi_{12} = c_{11}(L)/\Delta_2 \cdot \begin{vmatrix} g_1 - b_{12}u_1(L) - b_{14}u_2(L) & b_{13} \\ g_2 - b_{24}u_1(L) - b_{22}u_2(L) & b_{21} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

$$\varphi_{22} = c_{21}(L)/\Delta_2 \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & g_1 - b_{12}u_1(L) - b_{14}u_2(L) \\ b_{23} & g_2 - b_{24}u_1(L) - b_{22}u_2(L) \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Функции* (u_1, u_2) *– решение задачи* (1)–(3) *в том и только том случае, когда* u_1, u_2 *являются решениями задачи* (1), (6), (7).

Доказательство. Перепишем условия (2) в виде

$$a_{11}\frac{du_1(0)}{dx} + a_{13}\frac{du_2(0)}{dx} = f_1 - a_{12}u_1(0) - a_{14}u_2(0), \tag{12}$$

$$a_{23}\frac{du_1(0)}{dx} + a_{21}\frac{du_2(0)}{dx} = f_2 - a_{24}u_1(0) - a_{22}u_2(0). \tag{13}$$

Равенства (12), (13) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $du_1(0)/dx$ и $du_2(0)/dx$. Очевидно, что если выполняются условия (4), (5), то по теореме Крамера система (12), (13) равносильна равенствам (6). Аналогичным образом легко можно показать, что если выполняются условия (4), (5), то краевое условие (3) равносильно (7). Лемма доказана. □

Определение 1. Функции (u_1, u_2) назовем обобщенным решением задачи (1)–(3), если

$$u_s \in W_2^1(0, L), \quad s = 1, 2,$$

и для любых функций $v_s \in W_2^1(0, L)$ имеют место равенства

$$-\int_0^L c_{s1}\frac{du_s}{dx}\frac{d\overline{v}_s}{dx}\,dx + \int_0^L \Big(c_{s2}u_s + c_{s3}\frac{du_k}{dx} + c_{s4}u_k\Big)\overline{v}_s\,dx - \varphi_{s1}\big(u_1(0), u_2(0)\big)\overline{v}_s(0) +$$
$$+\varphi_{s2}\big(u_1(L), u_2(L)\big)\overline{v}_s(L) = \int_0^L q_s\overline{v}_s\,dx, \quad s, k = 1, 2, \quad s \neq k, \tag{14}$$

где $\overline{v}_s$ – функции, сопряженные к v_s, $s = 1, 2$.

Теорема 2. *Пусть* (u_1, u_2) *– решение задачи* (1)–(3) *и выполняется условие*

$$u_s(x) \in W_2^1(0, L), \quad s = 1, 2,$$

тогда функции u_1, u_2 *являются обобщенными решениями задачи* (1)–(3).

Обратно, если (u_1, u_2) *– обобщенное решение задачи* (1)–(3) *и выполняется условие*

$$u_s(x) \in C^2(0, L), \quad c_{s1}(x) \in C^1(0, L), \quad s = 1, 2, \tag{15}$$

то функции u_1, u_2 *удовлетворяют соотношениям* (1)–(3).

Доказательство. Пусть (u_1, u_2) – решение задачи (1)–(3). Покажем, что функции u_1, u_2 удовлетворяют равенствам (14).

Умножая уравнения (1) на произвольные функции $\overline{v}_s(x) \in C^1[0,L]$ и интегрируя затем по x от 0 до L, получим

$$\int\limits_0^L \frac{d}{dx}\Big(c_{s1}\frac{du_s}{dx}\Big)\overline{v}_s\,dx + \int\limits_0^L \Big(c_{s2}u_s + c_{s3}\frac{du_k}{dx} + c_{s4}u_k\Big)\overline{v}_s\,dx = \\ = \int\limits_0^L q_s\overline{v}_s\,dx, \quad s,k = 1,2, \quad s \neq k. \quad (16)$$

Преобразуя первые слагаемые в левой части равенств (16) с помощью формулы интегрирования по частям и равенств (6), (7), имеем

$$\int\limits_0^L \frac{d}{dx}\Big(c_{s1}\frac{du_s}{dx}\Big)\overline{v}_s\,dx = -\int\limits_0^L c_{s1}\frac{du_s}{dx}\frac{d\overline{v}_1}{dx}\,dx + \\ + \varphi_{s2}\big(u_1(L), u_2(L)\big)\overline{v}_s(L) - \varphi_{s1}\big(u_1(0), u_2(0)\big)\overline{v}_s(0). \quad (17)$$

Подставляя представления (17) в уравнения (16), получим (14). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Пусть (u_1, u_2) – обобщенное решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условию (15). Воспользуемся формулой интегрирования по частям для преобразования равенства (14). Тогда

$$\int\limits_0^L \frac{d}{dx}\Big(c_{s1}\frac{du_s}{dx}\Big)\overline{v}_s\,dx + \int\limits_0^L \Big(c_{s2}u_s + c_{s3}\frac{du_k}{dx} + c_{s4}u_k\Big)\overline{v}_s\,dx + \\ + \Big(c_{s1}(0)\,\frac{du_s(0)}{dx} - \varphi_{s1}\big(u_1(0), u_2(0)\big)\Big)\overline{v}_s(0) - \\ - \Big(c_{s1}(L)\,\frac{du_s(L)}{dx} - \varphi_{s2}\big(u_1(L), u_2(L)\big)\Big)\overline{v}_s(L) = \int\limits_0^L q_s\overline{v}_s\,dx, \quad s,k = 1,2, \quad s \neq k. \quad (18)$$

Положим в равенствах (18) $v_s = \phi_s$, где ϕ_s – произвольные функции из $C_0^\infty(0,L)$; учитывая плотность $C_0^\infty(0,L)$ в $L_2(0,L)$, нетрудно показать, что из (18) следует (1).

Докажем выполнение граничных условий (6). Поскольку (1) выполнено, из (18) вытекает справедливость следующего равенства при $s,k = 1,2$, $s \neq k$:

$$\Big(c_{s1}(0)\,\frac{du_s(0)}{dx} - \varphi_{s1}\big(u_1(0), u_2(0)\big)\Big)\overline{v}_s(0) - \\ - \Big(c_{s1}(L)\,\frac{du_s(L)}{dx} - \varphi_{s2}\big(u_1(L), u_2(L)\big)\Big)\overline{v}_s(L) = 0. \quad (19)$$

Положим в (19) $v_s = \phi_s$, где ϕ_s – произвольные гладкие функции, равные нулю при $x = L$, тогда при $s,k = 1,2$, $s \neq k$

$$\Big(c_{s1}(0)\,\frac{du_s(0)}{dx} - \varphi_{s1}\big(u_1(0), u_2(0)\big)\Big)\overline{\phi}_s(0) = 0. \quad (20)$$

Отсюда в силу произвольности ϕ_s следует, что граничные условия (6) выполнены. Аналогично, выбирая $v_s = \phi_s$, где $\phi_s(0) = 0$, из равенства (19) можно получить краевое условие (7). Из леммы 1 следует, что (u_1, u_2) является решением задачи (1)–(3). Теорема доказана. $\square$

2. Построение разностной схемы

На отрезке $[0, L]$ построим равномерную сетку $\overline{\omega}$ с шагом $h = 1/N$

$$\overline{\omega} = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Пусть V_h – пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}$. Обозначим, как обычно,

$$\begin{gathered}(y, z] = h\sum_{i=1}^{N} y(x_i)\overline{z}(x_i), \quad [y, z) = h\sum_{i=0}^{N-1} y(x_i)\overline{z}(x_i),\\ [y, z] = \frac{1}{2}(y, z] + \frac{1}{2}[y, z), \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N,\\ y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, \dots, N,\\ y_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \dots, N-1.\end{gathered} \tag{21}$$

Определение 2. Сеточные функции $(y_1, y_2) \in V_h$ назовем решением разностной схемы для задачи (1)–(3), если для любых сеточных функций η_1, $\eta_2 \in V_h$ и $s, k = 1, 2$, $s \neq k$, выполняются равенства

$$-\frac{1}{2}\left[c_{s1}(y_s)_x, (\eta_s)_x\right) - \frac{1}{2}\left(c_{s2}(y_s)_{\bar{x}}, (\eta_s)_{\bar{x}}\right] + \frac{1}{2}\left[c_{s3}(y_k)_x, \eta_s\right) + \frac{1}{2}\left(c_{s3}(y_k)_{\bar{x}}, \eta_s\right] + \\ + \left[c_{s2}y_s + c_{s4}y_k, \eta_s\right] - \varphi_{s1}(y_{1,0}, y_{2,0})\eta_{s,0} + \varphi_{s2}(y_{1,N}, y_{2,N})\eta_{s,N} = [q_s, \eta_s]. \tag{22}$$

Получим явный вид разностной схемы, определяемой уравнениями (22). Очевидно, что произвольные сеточные функции η_1, η_2 можно представить в виде

$$\eta_1(x) = \sum_{i=0}^{N} \eta_1(x_i)\delta^i(x), \quad \eta_2(x) = \sum_{i=0}^{N} \eta_2(x_i)\delta^i(x), \tag{23}$$

где $\delta^i(x)$ – дельта-функция i-го узла сетки $\overline{\omega}$, определяемая равенством

$$\delta^i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases} \tag{24}$$

Из (23) следует, что (22) имеет место для произвольных сеточных функций η_1, η_2, если

$$-\frac{1}{2}\left[c_{s1}(y_s)_x, (\delta^i)_x\right) - \frac{1}{2}\left(c_{s2}(y_s)_{\bar{x}}, (\delta^i)_{\bar{x}}\right] + \frac{1}{2}\left[c_{s3}(y_k)_x, \delta^i\right) + \frac{1}{2}\left(c_{s3}(y_k)_{\bar{x}}, \delta^i\right] + \\ + \left[c_{s2}y_s + c_{s4}y_k, \delta^i\right] - \varphi_{s1}(y_{1,0}, y_{2,0})\delta^i_0 + \varphi_{s2}(y_{1,N}, y_{2,N})\delta^i_N = \left[q_s, \delta^i\right], \tag{25}$$

где $i = 0, 1, \dots, N$, $s, k = 1, 2$, $s \neq k$.

Учитывая, что

$$\delta_x^i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i,i-1,\\ -1/h, & j=i,\\ 1/h, & j=i-1,\end{cases}\qquad \delta_{\bar x}^i(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq i,i+1,\\ 1/h, & j=i,\\ -1/h, & j=i+1,\end{cases}$$

систему (25) при $i=1,2,\dots,N-1$ перепишем в виде

$$\frac{1}{2}\Big\{c_{s1,i}(y_s)_{x,i}-c_{s1,i-1}(y_s)_{x,i-1}-c_{s1,i}(y_s)_{\bar x,i}+c_{s1,i+1}(y_s)_{\bar x,i+1}\Big\}+\\ +\frac{h}{2}\Big\{c_{s3,i}(y_k)_{x,i}+c_{s3,i}(y_k)_{\bar x,i}\Big\}+hc_{s2,i}y_{s,i}+hc_{s4,i}y_{k,i}=hq_{s,i}, \quad (26)$$

где $s,k=1,2$, $s\neq k$.

Разделим уравнения (26) на h и введем обозначения

$$\widetilde{c}_{s1,i}=\frac{1}{2}\Big\{c_{s1,i}+c_{s1,i-1}\Big\},\quad s=1,2. \quad (27)$$

Тогда, используя (21), равенства (26) преобразуем к форме

$$\big(\widetilde{c}_{s1}(y_s)_{\bar x}\big)_{x,i}+c_{s3,i}(y_k)_{\overset{\circ}{x},i}+c_{s2,i}y_{s,i}+c_{s4,i}y_{k,i}=q_{s,i}, \quad (28)$$

где $i=1,2,\dots,N-1$, $s,k=1,2$, $s\neq k$.

Выпишем разностную схему для краевого условия при $i=0$. В силу соотношений

$$\delta_x^0(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq 0,\\ -1/h, & j=0,\end{cases}\qquad \delta_{\bar x}^0(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq 1,\\ -1/h, & j=1,\end{cases}$$

из равенств (25) при $i=0$ получим

$$\frac{1}{2}\,c_{s1,0}(y_s)_{x,0}+\frac{1}{2}\,c_{s1,1}(y_s)_{\bar x,1}+\frac{h}{2}\,c_{s3,0}(y_k)_{x,0}+\frac{h}{2}\,c_{s2,0}y_{s,0}+\\ +\frac{h}{2}\,c_{s4,0}y_{k,0}-\varphi_{s1}(y_{1,0},y_{2,0})-\frac{h}{2}\,q_{s,0}=0,\quad s,k=1,2,\quad s\neq k. \quad (29)$$

Поскольку $(y_s)_{\bar x,1}=(y_s)_{x,0}$, $s=1,2$, то (29) можно записать как

$$\widetilde{c}_{s1,1}(y_s)_{x,0}+\frac{h}{2}\,c_{s3,0}(y_k)_{x,0}+\frac{h}{2}\,c_{s2,0}y_{s,0}+\frac{h}{2}\,c_{s4,0}y_{k,0}-\\ -\varphi_{s1}(y_{1,0},y_{2,0})-\frac{h}{2}\,q_{s,0}=0,\quad s,k=1,2,\quad s\neq k. \quad (30)$$

Построим аппроксимацию краевого условия при $i=N$. Имеем

$$\delta_x^N(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq N-1,\\ 1/h, & j=N-1,\end{cases}\qquad \delta_{\bar x}^N(x_j)=\begin{cases}0, & j\neq N,\\ 1/h, & j=N.\end{cases}$$

Из равенств (25) при $i=N$ вытекает, что

$$-\frac{1}{2}c_{s1,N-1}(y_s)_{x,N-1}-\frac{1}{2}c_{s1,N}(y_s)_{\bar x,N}+\frac{h}{2}c_{s3,N}(y_k)_{\bar x,N}+\\ +\frac{h}{2}c_{s2,N}y_{s,N}+\frac{h}{2}c_{s4,N}y_{k,N}+\varphi_{s2}(y_{1,N},y_{2,N})-\frac{h}{2}q_{s,N}=0, \quad (31)$$

где $s, k = 1,2,\ s \neq k$.

Поскольку $(y_s)_{x,N-1} = (y_s)_{\bar{x},N}$ при $s, k = 1,2,\ s \neq k$, то

$$-\widetilde{c}_{s1,N}(y_s)_{\bar{x},N} + \frac{h}{2}c_{s3,N}(y_k)_{\bar{x},N} + \frac{h}{2}c_{s2,N}y_{s,N} + \\ + \frac{h}{2}c_{s4,N}y_{k,N} + \varphi_{s2}(y_{1,N}, y_{2,N}) - \frac{h}{2}q_{s,N} = 0. \quad (32)$$

Таким образом, построена разностная схема (28), (30), (32).

3. Погрешность аппроксимации разностной схемы

Запишем задачу (1), (6), (7) в операторной форме

$$A^s\mathbf{U} = \mathbf{F^s}, \quad x \in [0, L], \quad s = 1,2, \quad (33)$$

где $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, оператор $A^s : C^2[0,L] \times C^2[0,L] \to C[0,L]$ при $s, k = 1,2,\ s \neq k$, задается соотношениями

$$A^s\mathbf{U} = \begin{cases} c_{s1}u_s' - \varphi_{s1}(u_1(0), u_2(0)), & x = 0, \\ (c_{s1}u_s')' + c_{s2}u_s + c_{s3}u_k' + c_{s4}u_k, & x \in (0, L), \\ c_{s1}u_s' - \varphi_{s2}(u_1(L), u_2(L)), & x = L. \end{cases}$$

Правая часть $\mathbf{F^s}$ имеет вид

$$\mathbf{F^s} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ q_s, & x \in (0, L), \\ 0, & x = N. \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, где y_s, $s = 1,2$, – сеточные функции из V_h. Введем сеточный оператор A_h^s: $V_h \times V_h \to V_h$ по формулам

$$A_h^s\mathbf{Y} = \begin{cases} \widetilde{c}_{s1,1}(y_s)_{x,0} + \dfrac{h}{2}\,c_{s3,0}(y_k)_{x,0} + \dfrac{h}{2}\,c_{s2,0}y_{s,0} + \\ \qquad + \dfrac{h}{2}\,c_{s4,0}y_{k,0} - \varphi_{s1,0} - \dfrac{h}{2}\,q_{s,0}, \quad i = 0, \\ \left(\widetilde{c}_{s1}(y_s)_{\bar{x}}\right)_{x,i} + c_{s3,i}(y_k)_{\overset{\circ}{x},i} + c_{s2,i}y_{s,i} + c_{s4,i}y_{k,i}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ \widetilde{c}_{s1,N}(y_s)_{\bar{x},N} - \dfrac{h}{2}\,c_{s3,N}(y_k)_{\bar{x},N} - \dfrac{h}{2}\,c_{s2,N}y_{s,N} - \\ \qquad - \dfrac{h}{2}\,c_{s4,N}y_{k,N} - \varphi_{s2,N} + \dfrac{h}{2}\,q_{s,N}, \quad i = N, \end{cases} \quad (34)$$

где $k = 1,2,\ k \neq s$.

Тогда разностная схема (28), (30), (32) имеет вид

$$A_h^s\mathbf{Y} = \mathbf{F^s}, \quad x \in \overline{\omega}, \quad s = 1,2. \quad (35)$$

Определение 3. Сеточная функция $\Psi_i^s = A_h^s\mathbf{U}_i - (A^s\mathbf{U})_i$ называется погрешностью аппроксимации оператора A^s разностным оператором A_h^s в точке сетки $x_i \in \overline{\omega}$, где $(A^s\mathbf{U})_i$ – значение $A^s\mathbf{U}$ в точке x_i, $s = 1,2$, $i = 0,1,\ldots,N$.

Теорема 3. *Пусть* (u_1, u_2) *– решение задачи* (1), (6), (7). *Функции* c_{s1} *имеют три, а функции* u_s *– четыре ограниченные производные в окрестности узлов сетки* $\overline{\omega}$. *Тогда разностная схема* (35) *имеет погрешность аппроксимации* $\Psi_i^s = O(h^2)$, $s = 1, 2$, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Доказательство. 1) Пусть $i = 1, \ldots, N-1$, тогда x_i – внутренняя точка сетки $\overline{\omega}$. Погрешность аппроксимации есть

$$\Psi_i^s = \left(\widetilde{c}_{s1}(u_s)_{\bar{x}}\right)_{x,i} - \frac{d}{dx}\left(c_{s1,i}\,\frac{du_{s,i}}{dx}\right) + c_{s3,i}(u_k)_{\overset{\circ}{x},i} - c_{s3,i}\,\frac{du_{k,i}}{dx}, \tag{36}$$

где $k = 1, 2$, $k \neq s$.

Используя (34), погрешность аппроксимации представим в виде

$$\Psi_i^s = \widetilde{c}_{s1,i+1}\,\frac{u_{s,i+1} - u_{s,i}}{h^2} - \widetilde{c}_{s1,i}\,\frac{u_{s,i} - u_{s,i-1}}{h^2} - c'_{s1,i}u'_{s,i} - c_{s1,i}u''_{s,i} + \\ + c_{s3}\,\frac{u_{k,i+1} - u_{k,i-1}}{2h} - c_{s3,i}u'_{k,i}, \quad s, k = 1, 2, \quad k \neq s. \tag{37}$$

Предположим, $u_s(x)$, $s = 1, 2$, – достаточно гладкие функции в некоторой окрестности точки x_i. Тогда эти функции можно разложить в ряд Тейлора в точке сетки x_i:

$$u_{s,i+1} = u_{s,i} + hu'_{s,i} + \frac{h^2}{2}\,u''_{s,i} + \frac{h^3}{6}\,u'''_{s,i} + O(h^4), \quad s = 1, 2, \tag{38}$$

$$u_{s,i-1} = u_{s,i} - hu'_{s,i} + \frac{h^2}{2}\,u''_{s,i} - \frac{h^3}{6}\,u'''_{s,i} + O(h^4), \quad s = 1, 2. \tag{39}$$

Подставим полученные разложения (38), (39) в (37):

$$\Psi_i^s = \left[\frac{\widetilde{c}_{s1,i+1} - \widetilde{c}_{s1,i}}{h} - c'_{s1,i}\right]u'_{s,i} + \left[\frac{\widetilde{c}_{s1,i+1} + \widetilde{c}_{s1,i}}{2} - c_{s1,i}\right]u''_{s,i} + \\ + \frac{h}{6}\left(\widetilde{c}_{s1,i+1} - \widetilde{c}_{s1,i}\right)u'''_{s,i} + O(h^2), \quad s = 1, 2. \tag{40}$$

Разложим теперь в ряд Тейлора в точке x_i функции $c_{s1,i\pm1}$:

$$c_{s1,i+1} = c_{s1,i} + hc'_{s1,i} + \frac{h^2}{2}\,c''_{s1,i} + O(h^3), \quad s = 1, 2, \tag{41}$$

$$c_{s1,i-1} = c_{s1,i} - hc'_{s1,i} + \frac{h^2}{2}\,c''_{s1,i} + O(h^3), \quad s = 1, 2. \tag{42}$$

Учитывая (27) и (41), (42), для $s = 1, 2$ получим

$$\frac{\widetilde{c}_{s1,i+1} - \widetilde{c}_{s1,i}}{h} = c'_{s1,i} + O(h^2), \quad \frac{\widetilde{c}_{s1,i+1} + \widetilde{c}_{s1,i}}{2} = c_{s1,i} + O(h^2). \tag{43}$$

Из первого соотношения (43) имеем

$$\widetilde{c}_{s1,i+1} - \widetilde{c}_{s1,i} = hc'_{s1,i} + O(h^3), \quad s = 1, 2, \tag{44}$$

и, следовательно,

$$\frac{h}{6}\left(\widetilde{c}_{s1,i+1} - \widetilde{c}_{s1,i}\right)u'''_{s,i} = O(h^2), \quad s = 1, 2. \tag{45}$$

Таким образом, из (40) с учетом равенств (43), (45) окончательно получим

$$\Psi_i^s = O(h^2), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad s = 1, 2,$$

а значит, для внутренних точек сетки $\overline{\omega}$ утверждение теоремы справедливо. Докажем аналогичные утверждения на границах отрезка $[0, L]$.

2) Пусть $i = 0$. Погрешность аппроксимации в этом случае имеет следующий вид:

$$\Psi_0^s = \widetilde{c}_{s1,1}(u_s)_{x,0} + \frac{h}{2}\, c_{s3,0}(u_k)_{x,0} + \frac{h}{2}\, c_{s2,0}u_{s,0} + \frac{h}{2}\, c_{s4,0}u_{k,0} - \\ - \frac{h}{2}\, q_{s,0} - c_{s1,0}u'_{s1,0}, \quad s, k = 1, 2, \quad k \neq s. \quad (46)$$

Учитывая разложение достаточно гладких функций $u_s(x)$, $c_{s1}(x)$, $s = 1, 2$, в окрестности x_0, получим

$$u_{s,1} = u_{s,0} + hu'_{s,0} + \frac{h^2}{2}\, u''_{s,0} + O(h^3), \quad s = 1, 2,$$

$$c_{s1,1} = c_{s1,0} + hc'_{s1,0} + O(h^2), \quad s = 1, 2,$$

а значит,

$$(u_s)_{x,0} = u'_{s,0} + \frac{h}{2}\, u''_{s,0} + O(h^2), \quad \widetilde{c}_{s1,1} = c_{s1,0} + \frac{h}{2}\, c'_{s1,0} + O(h^2), \quad s = 1, 2.$$

Тогда

$$\Psi_0^s = \frac{h}{2}\left[(c_{s1,0}u'_{s,0})' + c_{s2,0}u_{s,0} + \right. \\ \left. + c_{s3,0}u'_{k,0} + c_{s4,0}u_{k,0} - q_{s,0}\right] + O(h^2), \quad s, k = 1, 2, \quad k \neq s. \quad (47)$$

Поскольку функции $u_s(x)$ удовлетворяют уравнению (1), выполняется равенство

$$(c_{s1,0}u'_{s,0})' + c_{s2,0}u_{s,0} + c_{s3,0}u'_{k,0} + c_{s4,0}u_{k,0} = 0, \quad s, k = 1, 2, \quad k \neq s,$$

поэтому из (47) следует, что $\Psi_0^s = O(h^2)$, $s = 1, 2$. Таким образом, при $x_0 = 0$ теорема также доказана. Осталось доказать, что утверждения теоремы выполняются в точке $x_N = L$.

3) Пусть $i = N$. В этом случае погрешность аппроксимации имеет следующий вид:

$$\Psi_N^s = \widetilde{c}_{s1,N}(u_s)_{\bar{x},N} - \frac{h}{2}\, c_{s3,N}(u_k)_{\bar{x},N} - \frac{h}{2}\, c_{s2,N}u_{s,N} - \\ - \frac{h}{2}\, c_{s4,N}u_{k,N} + \frac{h}{2}\, q_{s,N} - c_{s1,N}u'_{s,N}, \quad s, k = 1, 2, \quad k \neq s. \quad (48)$$

Предположим, что функции $u_s(x)$, $c_{s1}(x)$, $s = 1, 2$, достаточно гладкие в окрестности узла x_N, применяя разложение данных функций в ряд Тейлора

$$u_{s,N-1} = u_{s,N} - hu'_{s,N} + \frac{h^2}{2}\, u''_{s,N} + O(h^3), \quad s = 1, 2,$$

$$c_{s1,N-1} = c_{s1,N} - hc'_{s1,N} + O(h^2), \quad s = 1, 2,$$

для $s = 1, 2$ имеем

$$(u_s)_{\bar{x},N} = u'_{s,N} - \frac{h}{2}\, u''_{s,N} + O(h^2), \quad \widetilde{c}_{s1,N} = c_{s1,N} - \frac{h}{2}\, c'_{s1,N} + O(h^2). \tag{49}$$

Подставим полученные соотношения (49) в равенство (47), в результате получим

$$\Psi^s_N = -\frac{h}{2}\left[(c_{s1,N}u'_{s,N})' + c_{s2,N}u_{s,N} + \right.$$
$$\left. + c_{s3,N}u'_{k,N} + c_{s4,N}u_{k,N} - q_{s,N}\right] + O(h^2), \quad s,k = 1,2, \quad k \neq s. \tag{50}$$

Учитывая, что функции $u_s(x)$ удовлетворяют уравнению (1), из равенства (50) получим, что $\Psi^s_N = O(h^2)$, $s = 1,2$. Теорема доказана полностью. □

Следствие 1. *Для погрешности аппроксимации на сетке $\overline{\omega}$ справедливы следующие оценки:*

$$\|\Psi^s\|_C \le C_1 h^2, \quad s = 1,2, \tag{51}$$
$$\|\Psi^s\|_2 \le C_2 h^2, \quad s = 1,2, \tag{52}$$

где C_1, C_2 – константы, не зависящие от шага сетки h, $\|u\|_C$, $\|u\|_2$ – дискретные аналоги норм в пространствах $C[0,L]$ и $L_2(0,L)$ соответственно, которые определяются по формулам

$$\|u\|_C = \max_{0\le i\le N} |u_i|, \quad \|u\|_2^2 = \sqrt{[u,u]}.$$

Заключение

В работе методом сумматорных тождеств построена разностная схема для решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений второго порядка (1)–(3):

$$\frac{1}{2}\, c_{13,0}y_{2,1} + \left(\frac{h}{2}\, c_{14,0} - \frac{a_{13}a_{22} - a_{14}a_{21}}{a_{11}a_{21} - a_{23}a_{13}}\, c_{11,0} - \frac{1}{2}\, c_{13,0}\right) y_{2,0} +$$
$$+ \left(\frac{h}{2}\, c_{12,0} - \frac{c_{11,1} + c_{11,0}}{2h} - \frac{a_{13}a_{24} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{21} - a_{23}a_{13}}\, c_{11,0}\right) y_{1,0} +$$
$$+ \frac{c_{11,1} + c_{11,0}}{2h}\, y_{1,1} = \frac{f_1a_{21} - f_2a_{13}}{a_{11}a_{21} - a_{23}a_{13}}\, c_{11,0} + \frac{h}{2}\, q_{1,0}, \tag{53}$$

$$-\frac{c_{11,i+1} + 2c_{11,i} + c_{11,i-1} - 2h^2c_{12,i}}{2h^2}\, y_{1,i} +$$
$$+ \frac{c_{11,i+1} + c_{11,i}}{2h^2}\, y_{1,i+1} + \frac{c_{11,i} + c_{11,i-1}}{2h^2}\, y_{1,i-1} +$$
$$+ \frac{c_{13,i}}{2h}\, y_{2,i+1} + c_{14,i}y_{2,i} - \frac{c_{13,i}}{2h}\, y_{2,i-1} = q_{1,i}, \quad i = 1,\ldots,N-1, \tag{54}$$

$$\left(\frac{b_{13}b_{22} - b_{14}b_{21}}{b_{11}b_{21} - b_{23}b_{13}} c_{11,N} + \frac{1}{2}\, c_{13,N} + \frac{h}{2} c_{14,N}\right) y_{2,N} -$$
$$- \frac{1}{2}\, c_{13,N}y_{2,N-1} + \frac{c_{11,N} + c_{11,N-1}}{2h}\, y_{1,N-1} +$$
$$+ \left(\frac{b_{13}b_{24} - b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{21} - b_{23}b_{13}}\, c_{11,N} - \frac{c_{11,N} + c_{11,N-1}}{2h} + \frac{h}{2}\, c_{12,N}\right) y_{1,N} =$$
$$= \frac{g_2b_{13} - g_1b_{21}}{b_{11}b_{21} - b_{23}b_{13}}\, c_{11,N} + \frac{h}{2}\, q_{1,N}. \tag{55}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{c_{21,1}+c_{21,0}}{2h}\,y_{2,1}+\frac{1}{2}c_{23,0}\,y_{1,1}+\\
&\qquad+\left(\frac{h}{2}c_{22,0}-\frac{c_{21,1}+c_{21,0}}{2h}-\frac{a_{14}a_{23}-a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{21}-a_{23}a_{13}}\,c_{21,0}\right)y_{2,0}+\\
&\qquad+\left(\frac{h}{2}\,c_{24,0}-\frac{1}{2}c_{23,0}-\frac{a_{12}a_{23}-a_{11}a_{24}}{a_{11}a_{21}-a_{23}a_{13}}\,c_{21,0}\right)y_{1,0}=\\
&\qquad\qquad=\frac{f_2a_{11}-f_1a_{23}}{a_{11}a_{21}-a_{23}a_{13}}\,c_{21,0}+\frac{h}{2}\,q_{2,0},
\end{aligned}
\tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{c_{21,i+1}+c_{21,i}}{2h^2}\,y_{2,i+1}+\frac{c_{21,i}+c_{21,i-1}}{2h^2}\,y_{2,i-1}-\\
&\qquad-\frac{c_{21,i+1}+2c_{21,i}+c_{21,i-1}-2h^2c_{22,i}}{2h^2}\,y_{2,i}+\\
&\qquad+\frac{c_{23,i}}{2h}\,y_{1,i+1}+c_{24,i}y_{1,i}-\frac{c_{23,i}}{2h}\,y_{1,i-1}=q_{2,i},\quad i=1,\ldots,N-1,
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{b_{14}b_{23}-b_{11}b_{22}}{b_{11}b_{21}-b_{23}b_{13}}\,c_{21,N}+\frac{h}{2}\,c_{22,N}-\frac{c_{21,N}+c_{21,N-1}}{2h}\right)y_{2,N}+\\
&\qquad+\frac{c_{21,N}+c_{21,N-1}}{2h}\,y_{2,N-1}-\frac{1}{2}c_{23,N}y_{1,N-1}+\\
&\qquad+\left(\frac{b_{12}b_{23}-b_{11}b_{24}}{b_{11}b_{21}-b_{23}b_{13}}+\frac{1}{2}\,c_{23,N}+\frac{h}{2}\,c_{24,N}\right)y_{1,N}=\\
&\qquad\qquad=\frac{g_1b_{23}-g_2b_{11}}{b_{11}b_{21}-b_{23}b_{13}}\,c_{21,N}+\frac{h}{2}\,q_{2,N}.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Установлено, что полученная схема (53)–(58) имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$.

В дальнейшем планируется провести исследование устойчивости и сходимости разностной схемы (53)–(58), используя полученные в настоящей работе оценки погрешности аппроксимации.

Литература

1. *Anufrieva A.V., Tumakov D.N., Kipot V.L.* Peculiarities of propagation of a plane elastic wave through a gradient layer // Days on Diffraction (DD). – St. Petersburg, 2013. – P. 11–16. – doi: 10.1109/DD.2013.6712795.

2. *Ануфриева А.В., Тумаков Д.Н.* Дифракция плоской упругой волны на градиентном слое // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4.– С. 116–125.

3. *Anufrieva A.V., Tumakov D.N.* Diffraction of a plane elastic wave by a gradient transversely isotropic layer // Advances in Acoustics and Vibration. – 2013. – V. 2013. – Art. 262067, P. 1–8. – doi: 10.1155/2013/262067.

4. *Khoei A.R.* Extended Finite Element Method: Theory and Applications. – Wiley, 2015. – 584 p.

5. *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Введение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2011. – 240 с.

6. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

7. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 351 с.

8. *Liu G.R., Quek S.S.* The Finite Element Method: A Practical Course. – Butterworth-Heinemann, 2013. – 464 p.

9. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 553 с.

10. *Anufrieva A.V., Tumakov D.N., Kipot V.L.* Elastic wave propagation through a layer with graded-index distribution of density // Days on Diffraction (DD). – St. Petersburg, 2012. – P. 21–26. – doi: 10.1109/DD.2012.6402745.

11. *Павлова М.Ф., Рунг Е.В.* Исследование неявной разностной схемы для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4.– С. 38–48.

12. *Павлова М.Ф., Рунг Е.В.* О сходимости неявной разностной схемы для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Девятой Всерос. конф. – Казань: Отечество, 2012. – С. 290-295.

13. *Anufrieva A.V., Igudesman K.B., Tumakov D.N.* Peculiarities of elastic wave refraction from the layer with fractal distribution of density // Appl. Math. Sci. – 2014. – V. 8, No 118. – P. 5875–5886. – doi: 10.12988/ams.2014.46473.

14. *Anufrieva A.V., Tumakov D.N.* On some of the peculiarities of propagation of an elastic wave through a gradient transversely isotropic layer // Days on Diffraction (DD). – St. Petersburg, 2014. – P. 23–28. – doi: 10.1109/DD.2014.7036417.

Поступила в редакцию
03.12.15

Ануфриева Анастасия Вадимовна, аспирант кафедры прикладной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *nastya-anufrieva@mail.ru*

Рунг Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *HelenRung@mail.ru*

Тумаков Дмитрий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *dtumakov@kpfu.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 26–39

Application of the Method of Summation Identities in Solving a Boundary-Value Problem for the Lame Equations

A.V. Anufrieva, E.V. Rung**, D.N. Tumakov****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **nastya-anufrieva@mail.ru*, ***HelenRung@mail.ru*, ****dtumakov@kpfu.ru*

Received December 3, 2015

Abstract

A boundary-value problem on an interval for a one-dimensional system of the Lame equations corresponding to a physical problem of propagation of an elastic wave through the gradient layer is considered. In this case, the coefficients of the equations are complex-valued continuous functions. The boundary conditions of the most general type corresponding to an additional condition, which, from the physical point of view, means absence of any surface waves at the working frequency, are considered. The concept of the generalized solution in the Sobolev space is formulated. Equivalence of the generalized and classical solutions is proven. A finite-difference scheme is constructed by the method of summation identities. For the case in which the equation coefficients and the desired functions are sufficiently smooth, it is shown that the error of approximation is of the order $O(h^2)$.

Keywords: boundary-value problem, Lame equations, generalized solution, method of summation identities, difference scheme

References

1. Anufrieva A.V., Tumakov D.N., Kipot V.L. Peculiarities of propagation of a plane elastic wave through a gradient layer. *Days on Diffraction (DD)*, St. Petersburg, 2013, pp. 11–16. doi: 10.1109/DD.2013.6712795.
2. Anufrieva A.V., Tumakov D.N., Diffraction of a plane elastic wave by a gradient layer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 4, pp. 116–125. (In Russian)
3. Anufrieva A.V., Tumakov D.N. Diffraction of a plane elastic wave by a gradient transversely isotropic layer. *Adv. Acoust. Vib.*, 2013, vol. 2013, art. 262067, pp. 1–8. doi: 10.1155/2013/262067.
4. Khoei A.R. Extended Finite Element Method: Theory and Applications. Wiley, 2015. 584 p.
5. Dautov R.Z., Karchevskii M.M. An Introduction to the Theory of the Finite Element Method. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2011. 240 p. (In Russian)
6. S'jarle F. The Finite-Element Method for Elliptic Problems. Moscow, Mir, 1980. 512 p. (In Russian)
7. Streng G., Fiks G. Theory of the Finite Element Method. Moscow, Mir, 1977. 351 p. (In Russian)
8. Liu G.R., Quek S.S. The Finite Element Method: A Practical Course. Butterworth-Heinemann, 2013. 464 p.
9. Samarskii A.A. Introduction to the Theory of Difference Schemes. Moscow, Nauka, 1971, 553 p. (In Russian)

10. Anufrieva A.V., Tumakov D.N., Kipot V.L. Elastic wave propagation through a layer with graded-index distribution of density. *Days on Diffraction (DD)*, St. Petersburg, 2012, pp. 21–26. doi: 10.1109/DD.2012.6402745.

11. Pavlova M.F., Rung E.V. A convergence of an implicit difference scheme for the saturated–unsaturated filtration consolidation problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2013, vol. 34, no. 4, pp. 392–405.

12. Pavlova M.F., Rung E.V. On convergence of an implicit difference scheme for the saturated–unsaturated filtration consolidation problem. *Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya: Materialy Devyatoi Vseros. konf.* [Mesh Methods for Boundary Value Problems and Applications: Proc. 9th All-Russ. Conf.], Kazan, Otechestvo, 2012, pp. 290–295. (In Russian)

13. Anufrieva A.V., Igudesman K.B., Tumakov D.N. Peculiarities of elastic wave refraction from the layer with fractal distribution of density. *Appl. Math. Sci.*, 2014, vol. 8, no. 118, pp. 5875–5886. doi: 10.12988/ams.2014.46473.

14. Anufrieva A.V., Tumakov D.N. On some of the peculiarities of propagation of an elastic wave through a gradient transversely isotropic layer. *Days on Diffraction (DD)*, St. Petersburg, 2014, pp. 23–28. doi: 10.1109/DD.2014.7036417.

⟨ ***Для цитирования*:** *Ануфриева А.В., Рунг Е.В., Тумаков Д.Н.* Применение метода сумматорных тождеств в решении граничной задачи для системы уравнений Ламе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 26–39. ⟩

⟨ ***For citation*:** Anufrieva A.V., Rung E.V., Tumakov D.N. Application of the method of summation identities in solving a boundary-value problem for the Lame equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 26–39. (In Russian) ⟩