Решения задач олимпиады им. В.Р.Фридлендера, Казань, 4.04.15

1. Найти все действительные корни уравнения $2x^3 + x^2 + x = -1/3$.

Ответ. $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}+1}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $6x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$. Или $5x^3 = -(x + 1)^3$. Отсюда сразу следует, что $x\sqrt[3]{5} = -(x + 1)$.

2. Равнобокая трапеция описана вокруг окружности единичного радиуса. Какие значения может принимать длина диагонали этой трапеции?

Ответ. $(2\sqrt{2}; +\infty)$

Решение. Проекция диагонали на большее основание (обозначим ее x) в равнобокой трапеции равна средней линии. Ей же равна боковая сторона. Высота трапеции равна 2, поэтому квадрат диагонали равен $x^2 + 4$. Боковая сторона x не меньше высоты, причем она не может быть равна высоте, иначе трапеция выродится в квадрат.

3. Андрей, Боря, Вася, Гриша и Дима имеют фамилии Андреев, Борисов, Васильев, Григорьев и Дмитриев. Известно, что Андрей старше Андреева на 1 год, Боря старше Борисова на 2 года, Вася старше Васильева на 3 года и Гриша старше Григорьева на 4 года. Кто старше – Дима или Дмитриев и на сколько?

Ответ. Дима младше Дмитриева на 10 лет.

Решение. Пусть возраст Димы отличается от возраста Дмитриева на x лет. Сумма возрастов, посчитанная «по именам» и «по фамилиям» одинаковы. Значит, $1 + 2 + 3 + 4 + x = 0$, откуда $x = -10$.

4. Последовательность функций $f_k(x)$ строится по следующему правилу:

$$f_1(x) = \frac{2}{2-x} \text{ и } f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Решите уравнение $f_{2015}(x) = 2015$.

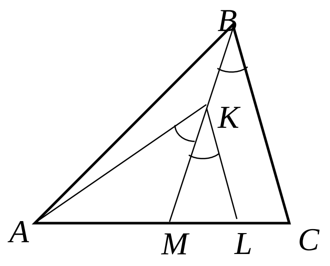
Ответ: $-2/2013$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$f_2(x) = \frac{2-x}{1-x},\ f_3(x) = 2 - \frac{2}{x},\ f_4(x) = x.$$

Далее все вычисления повторяются, то есть последовательность имеет период 2: $f_{n+4}(x) = f_n(x)$. В частности, $f_{2015}(x) = f_3(x) = 2 - \frac{2}{x} = 2015$. Решая это несложное уравнение, получим $x = -\frac{2}{2013}$.

5. Точка K лежит на медиане BM треугольника ABC, причем углы AKM и MBC равны. Докажите, что $AK = BC$.



AKM

Решение. У задачи есть множество решений. Приведем только идеи.

1) С использованием теоремы синусов для треугольников и MBC.

2) Проведем прямую $KL \parallel BC$. Тогда нужное равенство следует из свойства биссектрисы в треугольнике AKL и из подобия треугольников MKL и MBC.

3) Также можно продолжить KL дальше, построив параллелограмм $BKPC$.

4) Отложим отрезок $AN = AK$, N лежит также на прямой BM. Тогда окажется, что $\Delta AMN = \Delta CMB$.

5) Аналогично можно отложить $CE = AK$, точка E лежит на BM.

6. Найти все квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ такие, что p и q являются корнями соответствующего уравнения.

Ответ. 1) $x^2 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x^2 - 0{,}5x - 0{,}5 = 0$.

Решение. Подставляем p и q в уравнение, получаем систему из двух уравнений. Решая ее, получаем три ответа.

Примечание. Использование для решения теоремы Виета может привести к потере решения, так как пара (p, q) может не охватывать обоих корней уравнения (если $p = q$).

7. При каких m уравнение относительно x вида $x^4 - (3m + 2)\, x^2 + m^2 = 0$ имеет четыре корня, являющиеся членами арифметической прогрессии.

Ответ. $m = 6$ или $m = -6/19$.

Решение. Ясно, что решения в виде прогрессии для биквадратного уравнения могут иметь только вид $\{-3a, -a, a, 3a\}$. При этом у уравнения $t^2 - (3m + 2)t + m^2 = 0$ будут корни $t = a^2$ и $t = 9a^2$. По теореме Виета составляем систему уравнений $\{10a^2 = 3m + 2;\ 9a^4 = m^2\}$. Исключая из нее a, получаем уравнение $9(3m + 2)^2 = 100\, m^2$, решениями которого будут $m = 6$ и $m = -6/19$. Оба они подходят, так как $3m + 2 \geq 0$.

8. Дан тетраэдр $ABCD$ такой, что все углы граней в точке D – прямые. Пусть площади этих граней есть p, q и r. Найти площадь s грани ABC. (Аналогом какой планиметрической теоремы является эта задача?).

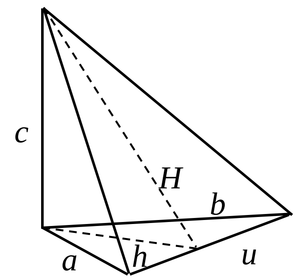
Ответ. $s^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

Решение. Пусть $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$. Тогда $p = ab/2$, $q = bc/2$, $r = ca/2$. С другой стороны, стороны треугольника ABC равны $u = \sqrt{a^2+b^2}$, $v = \sqrt{b^2+c^2}$, $w = \sqrt{c^2+a^2}$. По формуле Герона имеем

$$16s^2 = (u + v + w)(u + v - w)(u - v + w)(-u + v + w) = ((u + v)^2 - w^2)(w^2 - (u - v)^2) =$$
$$= (2uv + u^2 + v^2 - w^2)(2uv - u^2 - v^2 + w^2)$$

Учтем, что $u^2 + v^2 - w^2 = 2b^2$, так что

$$16s^2 = 4u^2v^2 - 4b^4 = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 16\,(p^2 + q^2 + r^2)$$



Как мы видим, искомая формула является аналогом теоремы Пифагора.

2 способ. Опустим высоту на сторону u. Имеем $S = \frac{1}{2}Hu$. Но $H^2 = h^2 + c^2$, так что $S^2 = \frac{1}{4}H^2u^2 = \frac{1}{4}(h^2 + c^2)u^2 = \frac{1}{4}(h^2u^2 + c^2u^2) = \frac{1}{4}(h^2u^2 + c^2(a^2 + b^2)) = (\frac{1}{2}hu)^2 + (\frac{1}{2}ca)^2 + (\frac{1}{2}bc)^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

9. На шахматной доске 8×8 между некоторыми клетками вставлены перегородки. Назовем такую доску «лабиринтом». Лабиринт считается «хорошим», если ладья может обойти все поля доски, не прыгая через перегородки, в противном случае – плохим. Каких лабиринтов больше: «хороших» или «плохих»?

Ответ. Плохих лабиринтов больше.

Решение. Рассмотрим угловую клетку. Ее можно отделить от остальных двумя перегородками, всего 4 способа. В одном случае из 4 (обе перегородки поставлены) эта угловая клетка будет недоступна для ладьи. Значит, хороших лабиринтов (у которых эта клетка доступна) – не более ¾ от всего количества лабиринтов. Из них не более ¾ «хороши» с учетом второй угловой клетки и т.д. То есть, не более $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} < \frac{1}{2}$ лабиринтов могут быть «хорошими».

10. Среди вершин правильного $(2n + 1)$-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Они соединяются отрезками. С какой вероятностью получится остроугольный треугольник?

Ответ. $p = \frac{n+1}{2(2n-1)}$.

Решение. Зафиксируем одну из вершин (M). В качестве остальных вершин треугольника можно взять любые две из оставшихся, всего $C_n^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n - 1)$ вариантов. Рассмотрим, при каких условиях треугольники будут остроугольными. Угол ABC будет острым, если между A и C лежит не более $(n - 1)$ вершин.

Все вершины, кроме M, разделим на две равные группы $A_1, A_2, \ldots A_n$ и $A_{n+1}, \ldots A_{2n}$. Если две оставшиеся вершины лежат в одной группе, то угол при одной из них будет тупым. Поэтому в каждой группе есть по вершине. Пусть, например, в первой группе выбрана вершина A_i, а во второй – A_j. Углы при этих вершинах острые. Чтобы острым был и угол A_iMA_j, должно выполняться ограничение $j - i \leq n$. Итак, $1 \leq i \leq n$, $n + 1 \leq j \leq i + n$, последнему неравенству отвечают i решений. Итак, всего имеем $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ благоприятствующих событий.