

УДК 532.5.296:534.12

## ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ ЕГО ВЗРЫВНОМ КОЛЛАПСЕ

*Р.И. Нигматуллин, А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, Д.Ю. Топорков*

### Аннотация

Изучена степень роста малых отклонений от сферической формы кавитационного пузырька при его однократном сильном сжатии. В начале сжатия пары жидкости в полости пузырька находятся в состоянии насыщения. Отклонения от сферичности принимаются в виде сферических гармоник степени  $n = 2, 3, \dots$ . Движение пара в пузырьке и окружающей жидкости представляется как суперпозиция сферической составляющей и ее несферического возмущения. Сферическая составляющая движения пара и жидкости описывается уравнениями газовой динамики, так как в финальной высокоскоростной стадии сжатия в пузырьке могут возникать ударные волны, становится существенной сжимаемость жидкости. При этом учитываются нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесность испарения и конденсации на межфазной поверхности. Применяются реалистичные широкодиапазонные уравнения состояния. При описании несферической составляющей движения учитывается влияние вязкости жидкости, поверхностного натяжения, плотности пара в пузырьке, неоднородности его давления. Коллапс кавитационного пузырька в воде и ацетоне рассматривается при давлении жидкости  $p_\infty$ , начальном радиусе пузырька  $R_0$ , температуре жидкости  $T_0$ , изменяющихся в диапазонах  $250 \leq R_0 \leq 1000$  мкм,  $1 \leq p_\infty \leq 50$  бар,  $20 \leq T_0 \leq 40$  °С у воды и  $0 \leq T_0 \leq 20$  °С у ацетона. В частности, установлено, что при  $R_0 = 500$  мкм,  $p_\infty \leq 50$  бар,  $T_0 = 20$  °С у воды и  $T_0 = 0$  °С у ацетона амплитуда малой несферичности пузырька в виде отдельных сферических гармоник может возрасти при сжатии в воде до 2000 раз, в ацетоне до 150 раз. Исследована зависимость роста несферичности от ряда важных в этом отношении факторов, таких как начальный радиус пузырька, давление жидкости, вязкость жидкости, испарение и конденсация на поверхности пузырька, наличие пара в пузырьке, теплопроводность в паре и жидкости и т. д.

**Ключевые слова:** кавитационный пузырек, паровой пузырек, коллапс пузырька, сжатие пузырька, искажение сферической формы, деформация пузырька.

### Введение

Одной из наиболее привлекательных для теории и приложений особенностей динамики пузырьков в жидкости являются экстремально высокие значения давления, плотности и температуры, которых можно достигнуть в определенных условиях в полости пузырька. В частности, к настоящему времени считается экспериментально установленным, что в пузырьке при коллапсе на режиме периодической сонолюминесценции возникает плазма с температурой более 16000 К [1]. Некоторые теоретические исследования показывают, что при сжатии пузырька в акустической волне в его полости могут достигаться условия для протекания термоядерных реакций [2–4]. Возможность реализации пузырькового термояда, вообще говоря, не отрицается, хотя имеющиеся на этот счет экспериментальные

данные [5–7] в настоящее время вызывают скептицизм, поскольку пока другим исследователям их повторить не удается. В настоящей работе вопрос о пузырьковом термояде не обсуждается.

На пути значительного повышения степени сжатия содержимого пузырька возникает много проблем, и одной из наиболее серьезных среди них считается рост несферичности пузырька при коллапсе [8–12]. Если этого не учитывать, то при попытке усиления сжатия пузырька можно получить не усиление сжатия, а разрушение пузырька (потерю его односвязности или распад на более мелкие образования). Наиболее сильного сжатия можно добиться только тогда, когда пузырек при коллапсе будет близким к сферическому. Поэтому уяснение особенностей развития малой несферичности пузырька при его коллапсе представляется весьма важным.

В настоящей работе изучается рост амплитуды малых возмущений сферической формы пузырька при его однократном сильном (взрывном) сжатии (коллапсе). Обычно за взрывным коллапсом следует ряд затухающих радиальных отскоков. Здесь они не рассматриваются в силу того, что интенсивность сжатия содержимого пузырька на стадии отскоков меньше. Учитывая малость возмущений сферичности пузырька, рассмотрение проводится для возмущений в виде отдельных сферических гармоник  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  (степени  $n$  порядка  $m$ ). Полученные результаты, используя суперпозицию, можно применить и для оценки роста несферичности любого спектра. Для этого нужно воспользоваться распределением амплитуд по гармоникам в спектре начального возмущения, исследование которого для различных возможных условий сжатия пузырька представляет отдельную проблему.

Изучается зависимость роста амплитуды малой несферичности пузырька при его коллапсе от ряда наиболее важных в этом отношении факторов. К ним, в частности, относятся начальный радиус пузырька, давление жидкости, вязкость жидкости, испарение и конденсация на поверхности пузырька, наличие пара в пузырьке, теплопроводность в паре и жидкости и т. д. Пузырек принимается кавитационным, поскольку в таком случае при сжатии давление в полости из-за конденсации растет медленнее, чем в пузырьке, заполненном неконденсируемым газом. В результате сжатие получается более сильным. В качестве жидкости рассматриваются вода и ацетон. Вода взята потому, что является наиболее распространенной жидкостью, а ацетон более подходит для реализации в пузырьке радиально сходящихся ударных волн.

При выборе методики исследования использовался накопленный в литературе опыт изучения устойчивости сферичности пузырька на режиме однопузырьковой сонолюминесценции (SBSL) [13, 14]. В настоящей работе применяется подход, в котором движение пара и жидкости расщепляется на сферическую и несферическую составляющие [15]. Для описания сферической составляющей на режиме SBSL используются как модель Рэлея–Плессета (жидкость слабосжимаемая, давление газа в пузырьке однородно) [16–20], так и полная гидродинамическая модель [2, 3, 21–26]. Сравнение показывает [25], что в финальной высокоскоростной стадии сжатия модель Рэлея–Плессета становится неадекватной. Поэтому в настоящей работе в качестве основной для описания сферической составляющей используется полная гидродинамическая модель Р.И. Нигматулина [3] с соответствующими уравнениями состояния. Движение жидкости и пара в ней описывается уравнениями газовой динамики с широкодиапазонными уравнениями состояния [27, 28], построенными по экспериментальным данным. Учитываются нестационарная теплопроводность в обеих средах, неравновесные процессы испарения и конденсации на межфазной границе. Данная модель позволяет проводить детальное изучение динамики пузырька в ходе всего сжатия как в его низкоскоростном начале, так и в высокоскоростном конце. Решение отыскивается численно методом Годунова [29]

с применением подвижной сетки. Полученный закон изменения радиуса пузырька служит в качестве входных данных для расчета эволюции искажения его сферичности. Подобный прием для изучения устойчивости сферичности пузырька на режиме SBSL применяли [15].

При описании несферической составляющей движения в настоящей работе, как и в ряде других [13, 30–36], жидкость считается несжимаемой, а плотность в пузырьке – однородной. В результате этого, если не использовать других упрощений, для описания эволюции искажения сферичности получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в свободном члене которого имеются интегралы от функции, характеризующей нестационарный характер диффузии завихренности жидкости [31]. Эта функция определяется из уравнения в частных производных с интегральным граничным условием. Решение уравнений, полученных центрально-разностной аппроксимацией пространственных производных, находится численно методом Рунге–Кутты высокого порядка точности [37]. Для учета влияния вязкости жидкости на эволюцию отклонения в настоящей работе применяется способ, предложенный в [31]. Известны и другие методы [32, 35, 38, 39], которые можно получить из [31] при ряде дополнительных упрощающих предположений. В отличие от других работ [33, 40] расчет диффузии завихренности в настоящей работе производится конечно-разностным методом [41].

Влияние плотности газа на эволюцию поверхности пузырька учитывается, как правило, лишь при определении радиальной (сферической) составляющей движения пузырька. Плотностью газа пренебрегают ввиду того, что она значительно повышается лишь кратковременно в конце сжатия пузырька. Расчеты искажения на режиме SBSL с учетом влияния плотности газа на эволюцию искажения выполнены в [15, 34, 42–44]. Наиболее предпочтительным представляется способ, описанный в [44], где наряду с учетом плотности газа учитывается и градиент его давления при радиальном движении. Следует отметить, что при учете плотности газа влияние неустойчивости Рэлея–Тейлора, как правило, уменьшается. В настоящей работе влияние плотности пара учитывается согласно [44].

Возможность расщепления на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение при сильном сжатии пузырька исследована в [45]. В этой работе показано, что полученные при таком расщеплении оценки роста малых возмущений сферичности пузырька удовлетворительно согласуются с результатами применения полной гидродинамической модели без расщепления на сферическую и несферическую составляющие.

## 1. Постановка задачи

Изучается эволюция малых искажений сферичности кавитационного (парового) пузырька при его сильном (взрывном) сжатии (коллапсе) в жидкости (воде и ацетоне). Начальные значения радиуса пузырька  $R_0$ , температуры  $T_0$  и давления  $p_0$  жидкости варьируются в довольно широких диапазонах. В начале сжатия жидкость покоится, пар в пузырьке находится в состоянии насыщения при температуре  $T_0$ . Поверхность пузырька имеет малую несферичность в виде отдельной сферической гармоники. Несферичность остается малой вплоть до конца коллапса. В рассматриваемых условиях пузырек быстро и сильно сжимается (радиус пузырька к концу сжатия уменьшается в десятки раз). Основное внимание уделяется росту амплитуды отклонения от сферической формы. Следующие за коллапсом радиальные отскоки, сопровождаемые более слабыми сжатиями, когда развивается важная для SBSL [14] параметрическая неустойчивость сферичности, здесь не рассматриваются.

**1.1. Поверхность пузырька.** Уравнение поверхности пузырька в сферических координатах  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  с координатой  $r$ , отсчитываемой от центра пузырька, имеет вид

$$r = R(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

Здесь  $t$  – время,  $R(t)$  – радиус сферической составляющей формы пузырька (радиус пузырька),  $Y_{nm}$  – сферическая гармоника степени  $n$  порядка  $m$ ,  $a_{nm}(t)$  – соответствующая размерная амплитуда. Степень несферичности пузырька характеризуется величиной  $\varepsilon_{nm} = a_{nm}(t)/R(t)$ . При всех  $n$ ,  $m$  амплитуда  $|\varepsilon_{nm}|$  полагается малой

$$|\varepsilon_{nm}| \ll 1.$$

С учетом малости несферичности пузырька движение жидкости и пара представляется в виде суперпозиции сферической (радиальной) составляющей и ее несферического возмущения. Ввиду малости искажений сферичности изучение этих искажений проводится отдельно для каждого  $\varepsilon_{nm}$ , так что уравнение поверхности пузырька принимается в виде

$$r = R(t)[1 + \varepsilon_{nm}(t)Y_{nm}(\theta, \varphi)].$$

Поскольку эволюция малых возмущений сферичности пузырька от номера  $m$  не зависит, в последующем для краткости он опускается, поэтому уравнение поверхности пузырька принимает вид  $r = R(t)[1 + \varepsilon_n(t)Y_n]$ .

Следует отметить, что в финальной стадии сильного сжатия температура на поверхности пузырька становится выше критической. В результате различие между паром и жидкостью исчезает. В настоящей работе при температуре выше критической за границу пузырька принимается лагранжева поверхность, которая ранее представляла поверхность пузырька.

**1.2. Радиальная динамика.** Для описания радиального движения и пара, и жидкости используется следующая система уравнений [3, 19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w r^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w^2 r^2 + p r^2) &= 2pr, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e r^2) + \frac{\partial}{\partial r}[w r^2(\rho e + p)] &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $w$  – радиальная компонента вектора скорости  $w$ ,  $p$  – давление,  $e = U + w^2/2$  – удельная полная энергия,  $U$  – удельная внутренняя энергия,  $T$  – температура,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности.

Граничные условия вдали от пузырька ( $r \rightarrow \infty$ ) и на межфазной поверхности ( $r = R$ ) имеют вид [3, 19]:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty : \quad p &= p_0, \quad T = T_0; \\ r = R(t) : \quad \dot{R} &= w_l + \frac{j}{\rho_l} = w_g + \frac{j}{\rho_g}, \quad p_l = p_g - \frac{4\mu_l w_l}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \\ \kappa_l \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_l &- \kappa_g \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_g = j l(p_g), \quad T_l = T_g, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mu_l$  – коэффициент вязкости жидкости,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $l$  – теплота парообразования,  $j$  – интенсивность фазовых превращений (скорость испарения и конденсации, отнесенная к единице поверхности). Нижние индексы  $l$  и  $g$  указывают на отношение к жидкости и пару соответственно. Интенсивность фазовых превращений  $j$  определяется выражениями [19]

$$j = \frac{\alpha'}{\sqrt{2\pi R_g}} \left( \frac{p_S(T)}{\sqrt{T}} - \frac{\chi p_g}{\sqrt{T}} \right),$$

$$\chi = \exp(-\Omega^2) - \Omega \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Omega} \exp(-x^2) dx \right), \quad \Omega = \frac{j \sqrt{R_g T}}{\sqrt{2} p_g}.$$

Здесь  $\alpha'$  – коэффициент аккомодации,  $R_g$  – газовая постоянная для пара,  $p_S$  – давление насыщения.

Эффект вязкости жидкости в уравнениях (1) и в условиях на межфазной границе (2) описывается без учета сжимаемости жидкости и влияния вязкости на изменение энергии. Анализ показывает, что такие допущения приемлемы.

Входящие в уравнения состояния функции давления  $p$  и внутренней энергии  $U$  представляются в виде суммы потенциальных  $p^{(p)}$ ,  $U^{(p)}$  и тепловых  $p^{(T)}$ ,  $U^{(T)}$  компонент и константы  $U^{(ch)}$  в выражении для  $U$  [19]

$$p(\rho, T) = p^{(p)}(\rho) + p^{(T)}(\rho, T), \quad U(\rho, T) = U^{(p)}(\rho) + U^{(T)}(T) + U^{(ch)}. \quad (3)$$

Для описания потенциальных компонент используется обобщенный потенциал Борна – Майера. При этом

$$p^{(p)}(\rho) = \rho^2 \frac{dU^{(p)}}{d\rho}, \quad U^{(p)}(\rho) = \frac{A}{\eta \rho_0 b} \exp \left[ b \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\eta} \right) \right] - \frac{K}{\xi \rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\xi + U^\circ.$$

Константа  $U^\circ$  определяется из выражения  $U^{(p)}(\rho^\circ) = 0$ , в котором  $\rho^\circ$  соответствует равенству  $p^{(p)}(\rho^\circ) = 0$ . Тепловые компоненты вычисляются по формулам

$$p^{(T)}(\rho, T) = \rho \Gamma(\rho) U^{(T)}, \quad U^{(T)} = c_V T,$$

где

$$\Gamma(\rho) = \frac{R_g}{c_V M} \left( g_1 + (1 - g_1) \exp(-(\rho/\rho_1)^{\zeta_1}) + \sum_{k=2}^3 g_k \exp(-(\rho/\rho_k)^{\zeta_k}) \right).$$

Теплоемкости  $c_V$  жидкости и пара полагаются постоянными. Диссоциация и ионизация пара не учитываются, поскольку на изменение радиуса они практически не влияют в силу малости времени их проявления.

**1.3. Деформация пузырька.** Для описания эволюции амплитуды отклонения  $a_n$  применяется модель [31], в которой учет влияния плотности пара производится согласно [44]:

$$(1 + q_n) \ddot{a}_n + \left[ 3 \frac{\dot{R}}{R} + 2(n+1)(n+2) \frac{\nu_l}{R^2} \right] \dot{a}_n +$$

$$+ \left[ \omega_n^2 + \frac{4\nu_l(n^2-1)\dot{R}}{R^3} - (n-1)(1-q_n) \frac{\ddot{R}}{R} \right] a_n +$$

$$+ \frac{n(n+1)}{R} \left[ \frac{\nu_l Q_n(R, t)}{R} + \frac{2\nu_l(2n+1)}{R^{2-n}} \alpha_n + \frac{\dot{R}}{R} \beta_n \right] = 0, \quad (4)$$

$$\alpha_n = -\frac{n+1}{2n+1} \int_R^\infty \frac{Q_n}{r^n} dr, \quad \beta_n = \int_R^\infty \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \left( \frac{R}{r} \right)^n Q_n dr,$$

$$q_n = \frac{(n+1)\bar{\rho}_g}{n\rho_{l0}}, \quad \omega_n^2 = (n^2-1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho_{l0}R^3}.$$

Здесь  $\bar{\rho}_g$  – средняя (по объему пузырька) плотность пара в его сферической составляющей движения,  $\rho_{l0}$  – невозмущенное значение плотности жидкости,  $\nu_l = \mu_l/\rho_{l0}$  – кинематический коэффициент вязкости,  $Q_n(r, t)$  – функция, описывающая завихренность движения жидкости. В рамках этой модели газ предполагается гомобарическим, жидкость – вязкой несжимаемой, учитывается ее вихревое движение. В ходе всего сжатия при описании несферического возмущения плотность жидкости полагается постоянной. Функция  $Q_n(r, t)$  вводится следующим образом [31]:

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times \left( \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(r, t) P_n(\cos \theta) \right) \mathbf{e}_r,$$

где  $\mathbf{e}_r$  – единичный вектор радиальной координаты  $r$ . Функция  $Q_n(r, t)$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial Q_n}{\partial t} + \dot{R}R^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Q_n}{r^2} \right) + \nu_l \left[ \frac{n(n+1)Q_n}{r^2} - \frac{\partial^2 Q_n}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (5)$$

и граничных условий

$$Q_n(R, t) = \frac{2}{n+1} \left[ (n+2)\dot{a}_n - (n-1)\frac{\dot{R}}{R}a_n + (2n+1)R^{n-1}\alpha_n \right], \quad (6)$$

$$Q_n(\infty, t) = 0.$$

Используемая в работе [26] модель эволюции отклонения без учета влияния плотности пара и неоднородности его давления может быть получена из уравнений (4)–(6) при  $q_n = 0$ .

**1.4. Начальные условия и входные данные.** В начале коллапса ( $t = 0$ ) температура пара и жидкости  $T = T_0$ , их скорость  $\mathbf{w} = 0$ , давление пара равно  $p_S(T_0)$  – давлению насыщения при температуре  $T_0$ , давление жидкости  $p = p_\infty$ , радиус пузырька  $R = R_0$ , скорость его изменения  $\dot{R} = 0$ . Значения  $R_0$ ,  $T_0$  и  $p_\infty$  варьируются в диапазонах:  $250 \leq R_0 \leq 1000$  мкм,  $0 \leq T_0 \leq 40$  °C,  $1 \leq p_\infty \leq 50$  бар. Там, где не оговорено противное, считается, что  $p_\infty = 15$  бар,  $R_0 = 500$  мкм,  $T_0 = 20$  °C для воды и  $T_0 = 0$  °C для ацетона. Амплитуда искажения в начале сжатия  $\varepsilon_n(0) = \varepsilon_{n,0}$ , скорость ее изменения  $\dot{\varepsilon}_n(0) = \dot{\varepsilon}_{n,0} = 0$ , начальная завихренность отсутствует  $Q_n(r, 0) = Q_{n,0}(r) = 0$ .

При рассмотрении кавитационного пузырька в воде принимается, что коэффициент аккомодации  $\alpha' = 0.04$ , удельная теплоемкость жидкости  $c_{V,l} = 4150$  м<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>К, удельная теплоемкость пара  $c_{V,g} = 1430$  м<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>К, газовая постоянная  $R_g = 461.9$  м<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>К. В случае ацетона  $\alpha' = 1$ ,  $c_{V,l} = 1516.8$  м<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>К,  $c_{V,g} = 1148$  м<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>К,  $R_g = 143.3$  м<sup>2</sup>/c<sup>2</sup>К. Константы уравнений состояния  $U^{(ch)}$ ,  $\rho_0$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $K$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $g_k$ ,  $\rho_k$ ,  $\zeta_k$  и зависимости  $\mu_l$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa_l$ ,  $\kappa_g$ ,  $p_S$ ,  $l$  от температуры  $T$  взяты из [28] для воды и из [27] для ацетона.

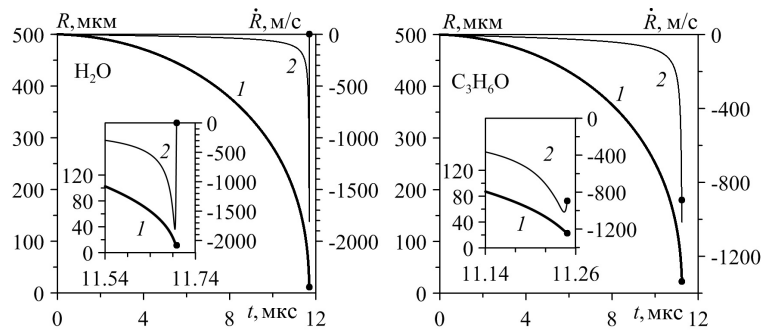


Рис. 1. Изменение радиуса  $R$  (кривые 1) и скорости  $\dot{R}$  (кривые 2) пузырька при его коллапсе. Точками отмечены значения в момент экстремального сжатия пара в пузырьке  $t_c$  в ходе коллапса (на отрезке  $0 \leq t \leq t_c$ ), в частности  $R_c \approx 11.1$  мкм для воды ( $\text{H}_2\text{O}$ ) и 22.7 мкм для ацетона ( $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$ )

## 2. Радиальная составляющая движения жидкости и пара и рост несферичности пузырька при сжатии

**2.1. Особенности радиальной составляющей движения жидкости и пара.** Ряд особенностей радиальной составляющей движения пара в кавитационном пузырьке, окружающей жидкости и межфазной поверхности при сильном сжатии пузырька в воде и ацетоне, иллюстрируют рис. 1, 2. На рис. 1 показано изменение радиуса  $R$  и скорости  $\dot{R}$ . Видно, что на довольно продолжительном начальном участке величина скорости сжатия  $\dot{R}$  относительно невелика (так, для ацетона  $|\dot{R}| < 300$  м/с при  $0 \leq t < 11$  мкс, где  $R > 100$  мкм,  $R/R_0 > 0.2$ ). Однако в конце сжатия она сначала быстро растет до 1800 м/с в воде и 1000 м/с в ацетоне, после чего еще быстрее падает.

Деформации пузырька в настоящей работе изучаются лишь до времени  $t_c$ , когда давление, температура и плотность в центре его полости достигают в ходе сжатия своих экстремально больших значений. В случае воды  $t_c = t_{\min}$ , где  $t_{\min}$  – момент достижения радиусом пузырька своего минимального значения  $R_{\min}$ , то есть  $R_{\min} = R(t_{\min}) = R_c = R(t_c)$ . В начале следующего за сжатием расширения пузырька на очень коротком отрезке  $t_{\min} \leq t \leq t_*$  давление, температура и плотность в центре пузырька могут еще немного возрасти, однако этот рост не зависит от текущего изменения формы пузырька. Поэтому деформации пузырька в воде в промежутке  $t_{\min} \leq t \leq t_*$  не рассматриваются. В случае ацетона  $t_c < t_{\min}$  ( $R_c > R_{\min}$ ). Однако эволюция несферичности пузырька на очень небольшом отрезке  $t_c \leq t \leq t_{\min}$  ( $R_c \geq R \geq R_{\min}$ ) интереса не представляет, поскольку на величину экстремального сжатия пара она уже не влияет. В силу этого деформации пузырька в ацетоне в промежутке  $t_c \leq t \leq t_{\min}$  не рассматриваются.

При сжатии пузырька в воде  $R_c = R_{\min} = 11.1$  мкм, а в ацетоне  $R_c = 22.7$  мкм,  $R_{\min} = 21.3$  мкм.

На рис. 2 приведены радиальные распределения давления, плотности, температуры и скорости в полости пузырька в шесть последовательных моментов времени конца его коллапса. Видно, что содержимое кавитационного пузырька в воде во всей его полости, за исключением тонкого теплового слоя в окрестности его границы, сжимается относительно однородно, радиальный профиль скорости имеет линейный характер. В отличие от этого, внутри пузырька в ацетоне возникает сходящаяся ударная волна. Ее интенсивность по мере распространения к центру быстро нарастает. В результате экстремальные значения всех представленных на рисунке

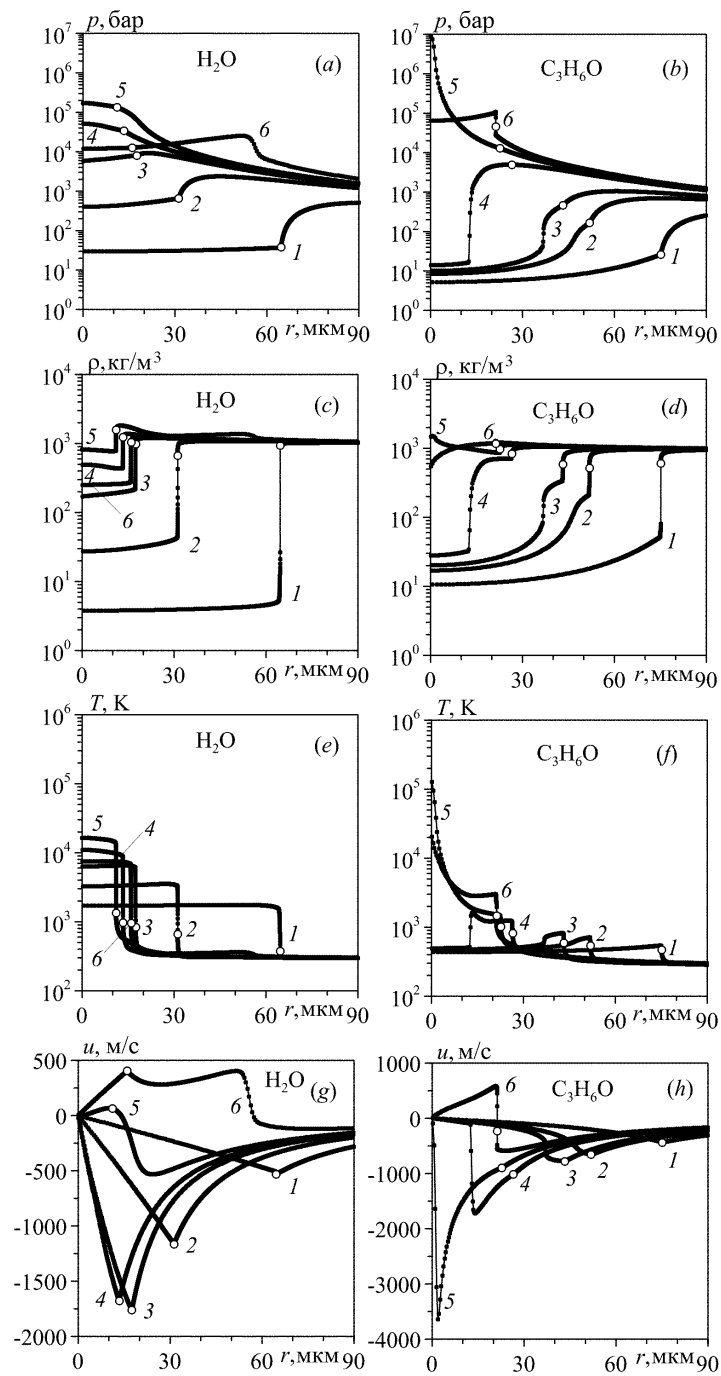


Рис. 2. Радиальные распределения давления, плотности, температуры и скорости в паре и жидкости в конце сжатия пузырька в воде и ацетоне в пять последовательных моментов времени (кривые 1–5). Кривые 5 относятся к моменту экстремального сжатия пара  $t_c$ , кривые 6 – к моменту последующего расширения пузырька в воде и моменту достижения минимального радиуса в ацетоне. Точки соответствуют ячейкам расчетной сетки, полые кружки – поверхности пузырька



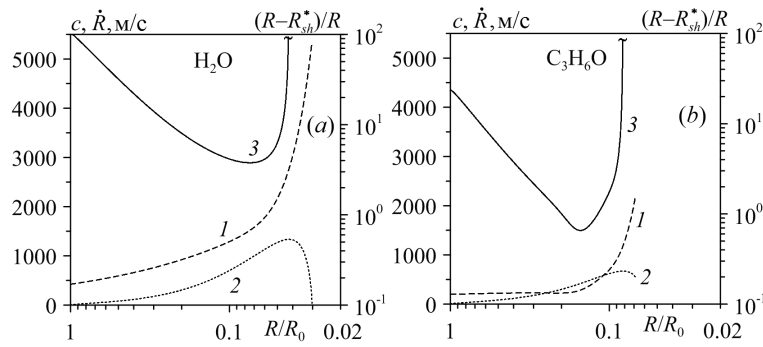


Рис. 3. Изменение при сжатии кавитационного пузырька в воде и ацетоне скорости звука  $c$  в паре на поверхности пузырька (кривые 1), скорости сжатия  $\dot{R}$  (кривые 2) и рассчитанного по формуле (9) безразмерного расстояния  $(R - R_{sh}^*)/R$  между местом возможного образования ударной волны  $R_{sh}^*$  и положением поверхности пузырька  $R$  в момент отхода от нее характеристики, на которой может образоваться ударная волна (кривые 3)

параметров в пузырьке в ацетоне оказываются многократно больше, чем в пузырьке в воде. В случае ацетона момент  $t_c$  совпадает с моментом фокусировки ударной волны в центре пузырька.

В случае воды увеличение давления жидкости  $p_\infty$  приводит к росту неоднородности радиальных распределений газодинамических параметров в пузырьке в конце его сжатия. При этом, как показывают расчеты, ударно-волновой режим сжатия содержимого пузырька отсутствует как минимум до  $p_\infty \sim 100$  бар. При сжатии кавитационного пузырька в ацетоне даже при давлении жидкости  $p_\infty \sim 1$  бар в финале сжатия в полости пузырька формируется ударная волна.

Для оценки времени и места возникновения ударной волны в пузырьке при его сжатии можно воспользоваться задачей о поршне. Хорошо известна формула [46]

$$x_{sh}^* - x_{p,0} = \frac{2c_0^2}{(\gamma + 1)\ddot{x}_{p,0}}, \quad (7)$$

выражающая расстояние между местом возникновения ударной волны и поршнем, ускоренно вдвигаемом в неограниченную трубу с газом. Здесь  $x$  – осевая координата, направленная вдоль трубы,  $x_{p,0}$  – начальное (при  $t = 0$ ) положение поршня,  $\ddot{x}_{p,0}$  – начальное ускорение поршня,  $c_0$  – невозмущенная скорость звука в газе,  $x_{sh}^*$  – координата места возникновения ударной волны, которая образуется при  $t^* = 2c_0/(\gamma + 1)|\dot{x}_{p,0}|$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Формула (7) описывает наиболее простой случай, когда газ в трубе идеальный, начальная скорость поршня  $\dot{x}_{p,0}$  равна нулю, а ударная волна формируется на характеристике, уходящей от поршня при  $t = 0$ . Аналогичная (7) формула в случае произвольного уравнения состояния и характеристики, уходящей от поршня в произвольный момент времени, когда скорость поршня не равна нулю, что и имеет место в рассматриваемом процессе сжатия пузырька, имеет вид

$$\frac{x_{sh}^* - x_p}{L} = \left(1 - \frac{\dot{x}_p}{c_p}\right) \frac{c_p^2}{k_p L \ddot{x}_p}, \quad k_p = 1 + \frac{\rho_p c'(\rho_p)}{c_p}. \quad (8)$$

Здесь  $x_p$ ,  $\dot{x}_p$ ,  $\ddot{x}_p$ ,  $\rho_p$ ,  $c_p$  – положение, скорость и ускорение вдвигаемого против оси  $x$  поршня ( $\dot{x}_p < 0$ ,  $\ddot{x}_p < 0$ ), плотность и скорость звука на его поверхности в момент времени  $t$ , соответствующий возникновению на поршне уходящей характеристики, на которой затем при  $t^* = t - 2c_p/(\gamma + 1)|\dot{x}_p|$  формируется ударная

волна,  $x_{sh}^*$  – координата места возникновения ударной волны,  $L$  – характерная длина.

На рис. 3 приведено изменение скорости звука в паре  $c$  на поверхности кавитационного пузырька в воде и ацетоне при его сжатии и скорости сжатия  $\dot{R}$ , полученных по модели настоящей работы, но без учета эффектов теплопроводности и испарения и конденсации, чтобы исключить влияние теплового пограничного слоя. Дано также изменение величины  $(R - R_{sh}^*)/R$ , вычисленной по формуле

$$\frac{R_{sh}^* - R}{R} \approx \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{c^2}{kR\ddot{R}}, \quad k = 1 + \frac{\rho c'(\rho)}{c}. \quad (9)$$

Эта формула получается из (8), если в качестве входящих в нее параметров газа и поршня взять соответствующие характеристики пара и поверхности пузырька. Разность  $R - R_{sh}^*$  представляет собой оценку расстояния от поверхности пузырька в момент времени  $t$ , соответствующий возникновению на поверхности уходящей характеристики, на которой возможно формирование ударной волны, до места ее возможного формирования (в момент  $t^* \approx t - c/k\ddot{R}$ ). Согласно (9) ударная волна в пузырьке образуется, если  $(R - R_{sh}^*)/R < 1$ . Из рис. 3 следует, что полученное по формуле (9) минимальное расстояние между местом возможного формирования ударной волны и поверхностью кавитационного пузырька в воде в ходе всего процесса ускоренного сжатия ( $\ddot{R} < 0$ ) остается значительно превышающим радиус пузырька

$$\min_t (R - R_{sh}^*)/R > 4,$$

так что можно заключить, что ударной волны в пузырьке не возникнет. В случае пузырька в ацетоне имеем

$$\min_t (R - R_{sh}^*)/R \approx 0.66,$$

то есть ударная волна в пузырьке будет возникать. Расчеты по модели настоящей работы (без учета теплопроводности и испарения и конденсации) показывают, что ударная волна в пузырьке в воде действительно не образуется, а в пузырьке в ацетоне она возникает при  $(R - R_{sh}^*)/R \approx 0.55$ .

**2.2. Рост несферичности кавитационного пузырька при сжатии.** Сферическая форма пузырька при его сжатии, как известно [10, 11], неустойчива. Ее возмущения в ходе сжатия совершают колебания с возрастающей амплитудой. Если бы пузырек был пустым, то он бы в ходе сжатия, скорее всего, разрушился. Однако пузырек всегда не пуст, так что его быстрое сжатие завершается при некотором ненулевом радиусе  $R_{\min}$ . Поэтому результатом развития неустойчивости сферической формы не обязательно будет разрушение пузырька. В качестве меры роста несферичности в виде отдельной гармоники  $Y_n(\theta, \varphi)$  примем величину  $|\varepsilon_n(t)/\varepsilon_{n,0}|$  – модуль отношения текущей безразмерной амплитуды искажения сферичности  $\varepsilon_n(t) = a_n(t)/R(t)$  к ее значению в начале сжатия  $\varepsilon_n(0) = \varepsilon_{n,0}$ . По максимальному значению величины  $|\varepsilon_n(t)/\varepsilon_{n,0}|$  в ходе коллапса пузырька можно отчасти судить о реализуемости сильного сжатия его содержимого. Так, если окажется, что этот максимум в ходе сжатия составляет  $\sim 10^{10}$ , то очевидно, суперсжатие содержимого пузырька нереализуемо, поскольку для сохранения целостности пузырька его начальная несферичность должна быть нереально малой:  $|\varepsilon_{n,0}| < 10^{-10}$ . Если окажется, что максимум величины  $|\varepsilon_n(t)/\varepsilon_{n,0}|$  в ходе сжатия составляет  $\sim 100$ , то возможность суперсжатия пузырька остается. Естественно, что для более строгого обоснования этой возможности необходимо применять более точные модели (см.,

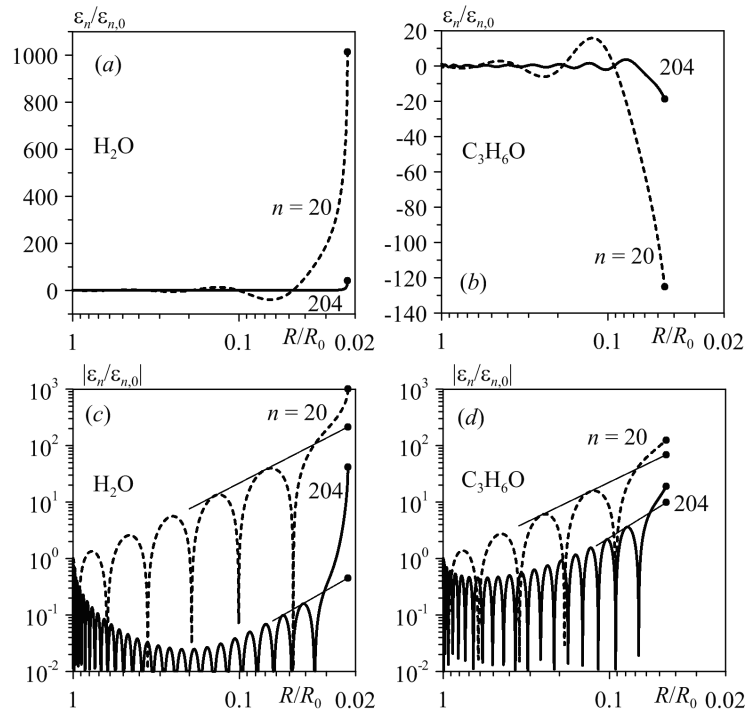


Рис. 4. Эволюция относительной безразмерной амплитуды искажения сферичности пузырька  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}$  при его сжатии в воде и ацетоне в обычной (a, b) и логарифмической (c, d) шкалах для номеров  $n = 20$  и 204. Отрезками прямых показан рост амплитуды колебаний  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  по степенному закону  $\alpha(R/R_0)^\beta$  с константами  $\alpha$ ,  $\beta$ , определяемыми по двум локальным максимумам, предшествующим локальному максимуму в момент  $t_c$ . Точками отмечены значения, соответствующие времени  $t_c$

например, [45]), в которых учитывается нелинейное взаимодействие между деформациями пузырька по отдельным гармоникам, влияние несферичности пузырька на несферичность сжатия его содержимого и т. д. Кроме того, нужно изучить такие вопросы, как спектр несферичности пузырька в начале сжатия, влияние неоднородности полей давления и скорости жидкости в окрестности пузырька и т. д. Все они весьма непросты, требуют отдельных исследований и в настоящей работе не рассматриваются.

Типичное изменение величины  $\varepsilon_n(t)/\varepsilon_{n,0}$  в ходе сжатия иллюстрирует рис. 4. В логарифмической шкале лучше видна эволюция  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}$  на начальном участке сжатия, где  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}| \sim 1$ . Кривые для  $n = 20$  характеризуют изменение возмущений сферичности пузырька в виде  $Y_n(\theta, \varphi)$  с  $n < n^*$  ( $n^* = 20$  для воды и 30 для ацетона). В области  $n > n^*$  увеличение  $n$  приводит ко все более сильному проявлению вязкости жидкости в начале сжатия пузырька, так что изменение возмущения сферичности постепенно начинает приобретать вид, наблюдаемый при  $n = 204$ . Видно, что как при  $n = 20$ , так и при  $n = 204$  величина  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}$  изменяется в виде колебаний относительно соответствующего сферической форме значения  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0} = 0$ . При  $n = 20$  амплитуда этих колебаний в ходе всего сжатия монотонно возрастает, а при  $n = 204$  сначала убывает, а затем возрастает, причем к финалу сжатия почти так же, как и при  $n = 20$ . Частота колебаний  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}$  в ходе сжатия при  $n = 20$  меньше, чем при  $n = 204$ , меньше и ее изменение. В самом конце сжатия величина  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  резко увеличивается.

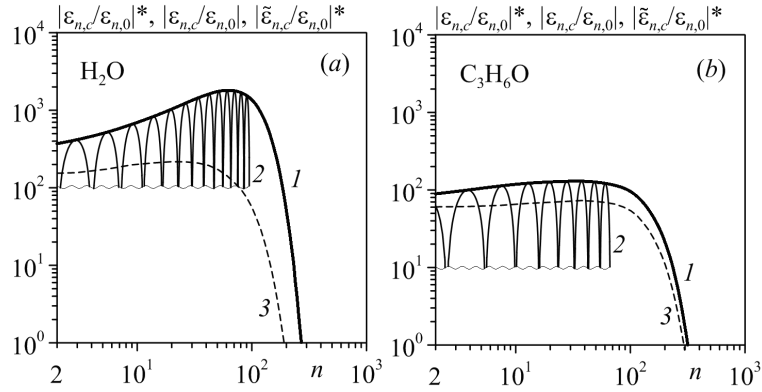


Рис. 5. Огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (кривые 1) зависимостей величины  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$ , характеризующей рост несферичности пузырька при его сжатии, от номера гармоники  $n$  и фрагменты самих этих зависимостей (кривые 2, нижняя часть этих кривых обрезана волнистой линией) для пузырьков в воде и ацетоне. Зависимости  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  от  $n$  (кривые 3) построены по значениям величины  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  (рис. 4), полученным для набора номеров  $n$ , которым соответствуют локальные максимумы зависимости  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  от  $n$

Известно [11], что амплитуда колебаний величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при схлопывании пустого пузырька в невязкой несжимаемой жидкости без учета поверхностного натяжения зависит от  $R/R_0$  по степенному закону  $\alpha(R/R_0)^\beta$ , где  $\alpha, \beta$  – константы (в [11]  $\alpha = 1, \beta = -1.25$ ). На рис. 4 видно, что и в рамках модели настоящей работы аналогичный закон изменения амплитуды колебаний величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  имеет место в ходе почти всего сжатия при  $n = 20$  и в ходе почти всей его заключительной части при  $n = 204$ . При этом константы  $\alpha, \beta$  нужно определять по двум локальным максимумам, предшествующим локальному максимуму в момент  $t_c$ . В обоих случаях (и при  $n = 20$ , и при  $n = 204$ ) в самом конце сжатия величина  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  растет значительно быстрее, чем по указанному степенному закону. В результате значение величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  в момент  $t_c$  (отмечено точками на кривых) оказывается существенно большим, чем значение  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  (отмечено точками на прямых) амплитуды колебаний  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при ее росте по степенному закону.

Как отмечалось выше, основной целью настоящей работы является получение оценок роста несферичности пузырька при его сжатии, поскольку эти оценки позволяют отчасти судить о возможности реализации суперсжатия содержимого пузырька. Из-за колебательного характера роста величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при сжатии пузырька ее значение  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  сильно зависит от фазы колебаний в момент  $t_c$ . Поэтому для оценки роста амплитуды несферичности пузырька при сжатии на основе значений  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  необходимо как-то варьировать соответствующую  $t_c$  фазу колебаний, например, меняя значения  $\varepsilon_n(0)$  и  $\dot{\varepsilon}_n(0)$ , что неудобно. Рост несферичности можно оценивать величиной  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$ , однако такая оценка, как видно на рис. 4, может оказаться сильно заниженной. Используемый в настоящей работе способ оценки основан на том, что величина  $\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}$  по мере изменения  $n$  также колеблется относительно нуля. В результате у зависимости величины  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  от  $n$  возникают локальные максимумы. Их огибающая  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  и применяется для оценок роста амплитуды несферичности пузырька при его сжатии (рис. 5). Таким образом, в качестве оценки роста несферичности при фиксированном  $n$  принимается соответствующее этому  $n$  значение на огибающей  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$ .

Форма огibaющих  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (рис. 5) показывает, что амплитуда безразмерных возмущений сферичности рассматриваемых кавитационных пузырьков  $|\varepsilon_n|$  может возрастать к концу сжатия до 1800 раз в воде и 130 раз в ацетоне. Максимумы достигаются при  $n = n_m \approx 65$  и 35 соответственно. По мере увеличения  $n$  величина  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  возрастает при  $n < n_m$  (в 4.9 раза для воды и в 1.5 раза для ацетона) и довольно быстро убывает при  $n > n_m$ , так что, начиная с  $n = 270$  и 320 соответственно, несферичность пузырька в конце сжатия оказывается меньше, чем в его начале.

Таким образом, максимум роста амплитуды несферичности кавитационного пузырька при его коллапсе в воде намного (в  $\sim 14$  раз) больше, чем в ацетоне. Столь большая разница обусловлена в основном двумя факторами: глубиной коллапса, характеризуемой отношением  $R_c/R_0$  (чем меньше это отношение, тем глубже коллапс), и величиной всплеска несферичности в конце коллапса (в малой окрестности времени  $t_c$ ). Влияние этих факторов наглядно иллюстрируют представленные на рис. 5 штриховые кривые  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (кривые 3), которые представляют собой оценку роста амплитуды несферичности пузырька, подобную  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$ , но без учета всплеска величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  в конце коллапса. При  $n < 30$  различие кривых  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  для воды и ацетона объясняется главным образом разницей в глубине коллапса (при  $n > 30$  важную роль начинает играть также и вязкость жидкости, о чем будет сказано ниже). Коллапс пузырька в воде примерно в 2 раза глубже, чем в ацетоне. В результате несферичность пузырька в воде растет больше. Для каждой среды различие между кривыми  $|\tilde{\varepsilon}_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  и  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  обусловлено величиной финального всплеска величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$ . Как видно на рис. 4 и 5, у пузырька в воде величина этого всплеска значительно больше. Это объясняется тем, что в случае воды плотность в полости пузырька вне тонкого теплового слоя вплоть до конца сжатия значительно меньше, чем плотность в жидкости (рис. 2). В результате в самом конце сжатия, когда  $\dot{R} > 0$ , развивается неустойчивость Рэлея–Тейлора, что и вызывает резкий рост несферичности. В случае пузырька в ацетоне неустойчивость Рэлея–Тейлора практически отсутствует, поскольку плотность среды в полости пузырька в конце сжатия оказывается весьма близкой к плотности окружающей жидкости (рис. 2). Вместе с тем, относительно небольшой финальный всплеск, как видно, возникает и в этом случае. Однако здесь он появляется лишь за счет малости ускорения  $|\ddot{R}|$  при переходе от ускоряющегося сжатия, когда  $\dot{R} < 0$ , к замедляющемуся, когда  $\dot{R} > 0$ .

**2.3. Влияние вязкости жидкости.** На рис. 6 видно, что демпфирующее влияние вязкости жидкости на рост амплитуды несферичности пузырька в ходе сжатия в интервале  $n < 20$  для воды и  $n < 30$  для ацетона несущественно, а при больших значениях номера  $n$  по мере его увеличения быстро возрастает. Без учета влияния вязкости несферичность пузырька с ростом  $n$  увеличивается, а при учете вязкости после некоторого  $n$  ( $\approx 65$  для воды и 35 для ацетона) довольно быстро уменьшается. Это объясняется тем, что, как следует из уравнения эволюции амплитуды возмущения (4), демпфирующее влияние вязкости жидкости при сжатии возрастает пропорционально  $n^2$  (второе слагаемое в скобках при  $\dot{a}_n$ ). Таким образом, в ограничении роста высокочастотных возмущений сферичности пузырька вязкость жидкости играет очень важную роль.

Для анализа вязкого демпфирования можно воспользоваться числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 R u}{(n+1)(n+2)\mu_l},$$

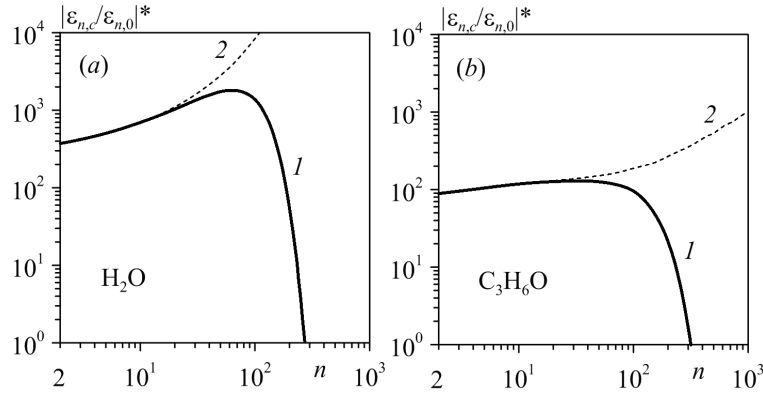


Рис. 6. Огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  с учетом (кривые 1) и без учета (кривые 2) влияния вязкости жидкости для пузырьков в воде и ацетоне

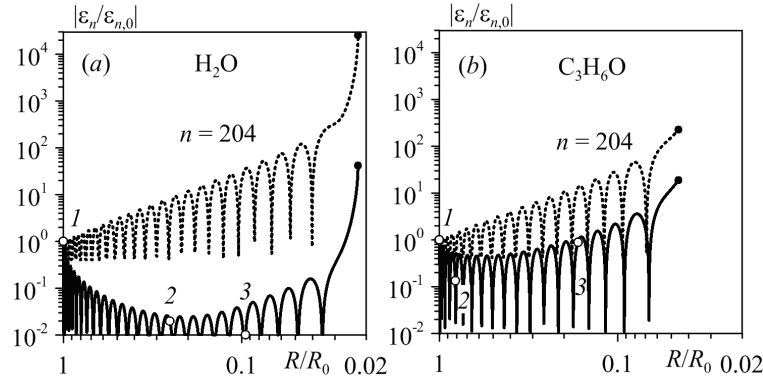


Рис. 7. Эволюция величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при сжатии пузырька с учетом и без учета вязкости жидкости; точкой отмечен момент  $t_c$ ; 1–3 – моменты, когда соответственно  $Re = 0.382, 1, 10$  для воды и  $Re = 0.845, 1, 10$  для ацетона

где  $u = \sqrt{2p_\infty R_0^3 / 3\rho_0 R^3}$ . Это формула для скорости  $u$  получается из соотношения для полной энергии свободных незатухающих радиальных колебаний сферического адиабатического пузырька в диапазоне от  $R_c$  до  $R_0$ .

Расчеты показывают, что на отрезках сжатия, где  $Re > Re_{cr} \approx 10$ , влияние вязкости незначительно. На этих отрезках амплитуда искажений нарастает в режиме колебаний. Так, для пузырька в воде (ацетоне) область с  $Re > Re_{cr}$  при  $n \leq 38$  ( $n \leq 58$ ) включает всю стадию сжатия, а при  $n > 38$  ( $n > 58$ ) только ее часть. С уменьшением числа  $Re$  от  $Re_{cr}$  до  $\sim 1$  скорость роста амплитуды колебаний несферичности падает до нуля, а при  $Re < 1$  колебания становятся затухающими. В частности, для пузырька в воде (ацетоне) амплитуда колебаний искажения с  $n = 204$  в ходе сжатия (рис. 7) при  $0.253 \leq R/R_0 \leq 1$  ( $0.816 \leq R/R_0 \leq 1$ ), где  $Re < 1$ , уменьшается, затем при  $R/R_0 < 0.253$  ( $R/R_0 < 0.816$ ), где  $Re > 1$ , постепенно начинает расти. С некоторого радиуса при  $R/R_0 < 0.095$  ( $R/R_0 < 0.167$ ), где  $Re > Re_{cr}$ , она увеличивается практически аналогично невязкому случаю.

**2.4. Влияние завихренности жидкости.** Влияние завихренности жидкости иллюстрирует рис. 8. Завихренность генерируется вязкостью жидкости, а потому ее влияние сказывается лишь при тех значениях  $n$ , при которых проявляется

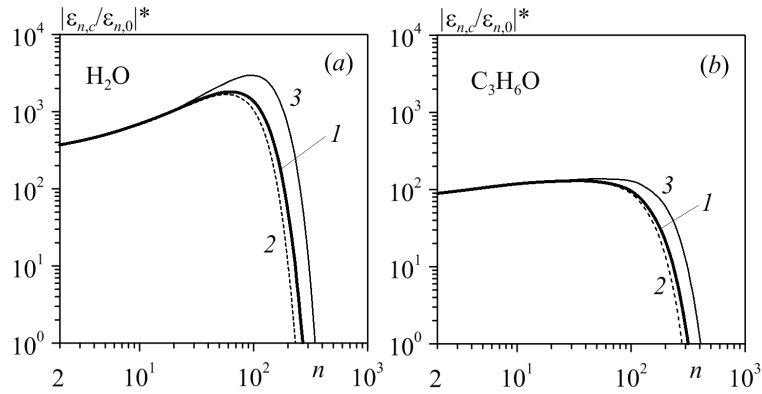


Рис. 8. Огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  с полным учетом завихренности жидкости в (4) (кривые 1), без ее учета вне поверхности пузырька (кривые 2) и при ее полном пренебрежении (кривые 3)

влияние вязкости. Без учета влияния завихренности жидкости вне поверхности пузырька (кривые 2), уравнение (4) сводится к равенству, которое, если в нем положить  $q_n = 0$ , имеет вид

$$\ddot{a}_n + \left[ 3\frac{\dot{R}}{R} + 2(2n+1)(n+2)\frac{\nu_l}{R^2} \right] \dot{a}_n + \left[ \omega_n^2 + \frac{2\nu_l(n-1)(n+2)\dot{R}}{R^3} - (n-1)\frac{\ddot{R}}{R} \right] a_n = 0.$$

Если влиянием завихренности жидкости пренебрегается полностью (кривые 3), то уравнение (4) упрощается до выражения, которое при  $q_n = 0$  становится следующим:

$$\ddot{a}_n + \left[ 3\frac{\dot{R}}{R} + 2(n+1)(n+2)\frac{\nu_l}{R^2} \right] \dot{a}_n + \left[ \omega_n^2 + \frac{4\nu_l(n^2-1)\dot{R}}{R^3} - (n-1)\frac{\ddot{R}}{R} \right] a_n = 0.$$

На рис. 8 видно, что завихренность на поверхности пузырька приводит к уменьшению роста его несферичности (кривая 2 ниже кривой 3), а завихренность жидкости вне поверхности увеличивает этот рост (кривая 1 выше, чем кривая 2). При этом влияние завихренности жидкости вне поверхности пузырька меньше (кривая 1 ниже кривой 3). Это объясняется ростом скорости сжатия пузырька, в результате чего эффект новой генерируемой на поверхности пузырька завихренности оказывается более существенным, чем обратное влияние ранее созданной и распространившейся в жидкость по диффузионному закону. Более подробный анализ влияния вихревого движения жидкости на форму пузырька при его радиальных колебаниях можно найти в [39]. При полном пренебрежении завихренностью величина  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  при  $n > 30$  в воде и  $n > 40$  в ацетоне завышается, максимальное значение  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  незначительно возрастает; незначительно увеличивается и номер  $n$ , при котором оно достигается.

**2.5. Влияние поверхностного натяжения.** Для анализа влияния поверхностного натяжения можно воспользоваться числом Вебера, определенным по формуле

$$\text{We} = \frac{\rho_l \omega R u^2}{(n+1)(n+2)\sigma},$$

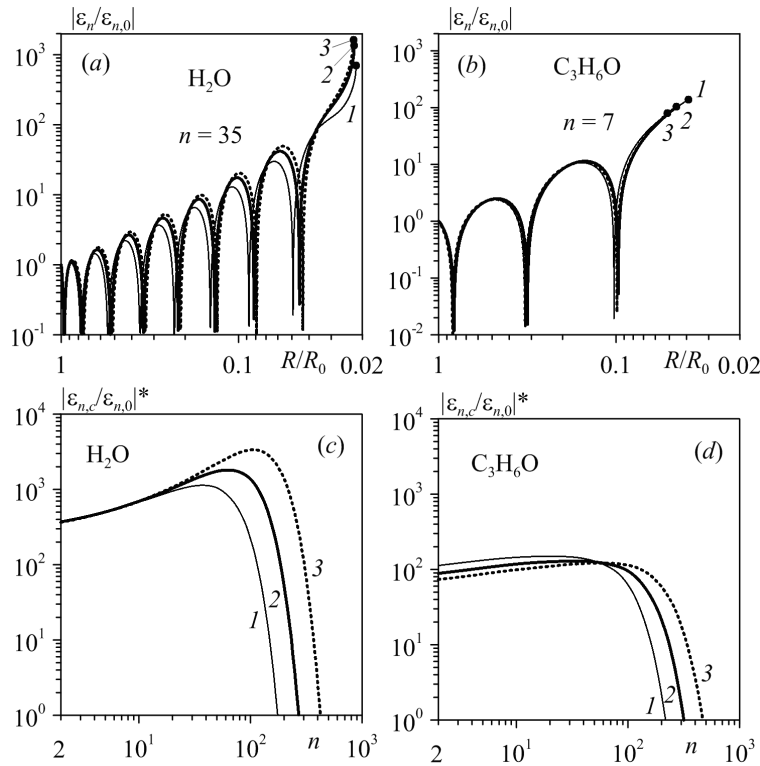


Рис. 9. Эволюция величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при сжатии пузырька (точкой отмечен момент  $t_c$ ) (a, b) и огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (c, d) при  $R_0 = 250$  мкм (кривые 1),  $R_0 = 500$  мкм (кривые 2) и  $R_0 = 1000$  мкм (кривые 3)

где, как и в формуле для  $\text{Re}$ ,  $u = \sqrt{2p_\infty R_0^3 / 3\rho_{l0} R^3}$ . Расчеты показывают, что на отрезках сжатия, где  $\text{We} > \text{We}_{cr} \approx 10$ , эффект поверхностного натяжения незначителен.

С уменьшением числа  $\text{We}$  в области  $\text{We} < \text{We}_{cr}$  влияние поверхностного натяжения возрастает. Проявляется оно в основном в уменьшении периода колебаний величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$ , слабо влияя на их амплитуду. В частности, при пренебрежении поверхностным натяжением завышение величины периода колебаний достигает 30% при  $\text{We} \approx 1$  и около 3 раз при  $\text{We} \approx 0.1$ .

На рост амплитуды несферичности пузырька к моменту  $t_c$  влияние поверхностного натяжения незначительно (огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  с учетом и без учета влияния поверхностного натяжения различаются незначительно).

**2.6. Влияние начального радиуса пузырька.** Влияние начального радиуса пузырька  $R_0$  на рост его несферичности характеризует рис. 9. Видно, что для воды в интервале  $n < 10$ , где влияние вязкости незначительно для всех представленных значений  $R_0$ , огибающие практически совпадают. Это объясняется тем, что величина отношения  $R_c/R_0$ , характеризующего глубину коллапса, для  $R_0 = 250, 500$  и  $1000$  мкм примерно одинакова и равна 0.022. Вместе с тем по мере уменьшения  $R_0$  демпфирующее влияние вязкости возрастает. В результате при тех значениях  $n$ , при которых оно существенно, амплитуда возмущения сферичности в конце коллапса с уменьшением  $R_0$  убывает. В итоге, как видно по огибающим,



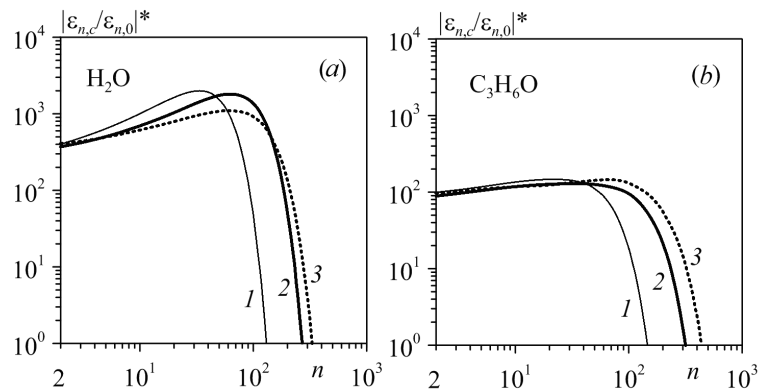


Рис. 10. Огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (a, b) при давлении жидкости  $p_\infty = 1$  бар (кривые 1),  $p_\infty = 15$  бар (кривые 2) и  $p_\infty = 50$  бар (кривые 3)

получается, что с уменьшением  $R_0$  от 1000 до 250 мкм уменьшаются и максимум величины  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (от 3370 до 1130), и номер  $n$ , при котором он достигается (от 110 до 40).

При сжатии кавитационного пузырька в ацетоне коллапс становится более глубоким, так что с уменьшением  $R_0$  от 1000 до 250 мкм величина  $R_c/R_0$  уменьшается от 0.0513 до 0.0391. В результате при тех значениях  $n$ , где влияние вязкости незначительно, амплитуда несферичности пузырька к концу его сжатия по мере уменьшения  $R_0$  растет сильнее (примерно в 2 раза). Как и в случае воды, с ростом  $n$  влияние вязкости для пузырьков меньшего размера возрастает быстрее. Максимум величины  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  для рассматриваемых значений  $R_0$  отличается незначительно (в 1.2 раза).

**2.7. Влияние давления жидкости.** Влияние давления жидкости  $p_\infty$  на рост несферичности пузырька при его сжатии характеризует рис. 10. Для  $p_\infty = 1$  бар сжатие оказывается более медленным и, как следствие, более глубоким, чем для  $p_\infty = 15$  и 50 бар, при которых глубина получается практически одинаковой. Это объясняется в основном тем, что при более медленном сжатии в пузырьке остается меньше пара в силу более продолжительного времени конденсации. Несмотря на это, в случае пузырька в ацетоне для тех номеров  $n$ , где влияние вязкости жидкости мало, рост несферичности пузырька оказывается слабо зависящим от давления жидкости (максимум не превышает 146 раз, а различие максимумов не превышает 13%). В случае пузырька в воде различие результатов для разных  $p_\infty$  больше, что обусловлено влиянием неустойчивости Рэлея–Тейлора в финальной стадии сжатия. Как следствие, при  $n < 60$  больший рост амплитуды возмущений наблюдается при  $p_\infty = 1$  бар. Значения максимумов роста для  $p_\infty = 1$  и 15 бар оказываются близкими – 2000 и 1800 соответственно, в то время как при  $p_\infty = 50$  бар эта величина примерно равна 1200.

Для пузырьков и в воде, и в ацетоне увеличение  $p_\infty$  приводит к расширению интервала номеров  $n$ , для которых  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^* > 1$ . Это свидетельствует об ослаблении демпфирующего воздействия вязкости жидкости. Последнее является результатом того, что с увеличением  $p_\infty$  увеличивается и скорость сжатия пузырька  $\dot{R}$ .

**2.8. Влияние температуры жидкости.** На рис. 11 видно, что увеличение температуры жидкости  $T_0$  на 20 °С (воды от 20 °С до 40 °С и ацетона от 0 °С

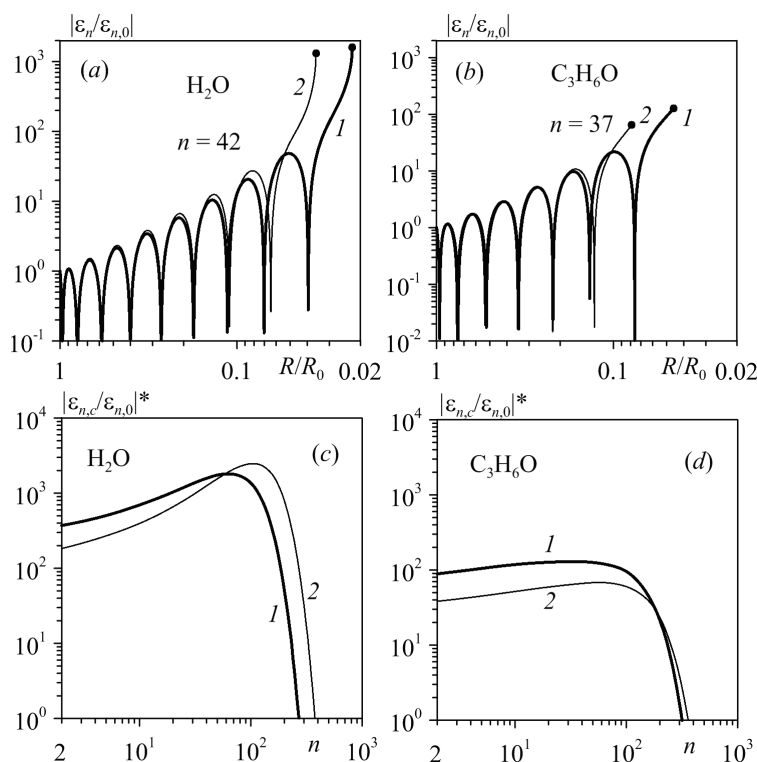


Рис. 11. Эволюция величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при сжатии пузырька (точкой отмечен момент  $t_c$ ) (a, b) и огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (c, d) при начальной температуре: воды  $T_0 = 293.15$  К (кривые 1) и  $T_0 = 313.15$  К (кривые 2) и ацетона  $T_0 = 273.15$  К (кривые 1) и  $T_0 = 293.15$  К (кривые 2)

до  $20^\circ\text{C}$ ) приводит к примерно двукратному уменьшению роста несферичности для возмущений с номером  $n$  в диапазоне, где влияние вязкости жидкости несущественно. Указанные изменения обусловлены тем, что повышение температуры жидкости вызывает возрастание массы пара в пузырьке и скорости звука в паре. В результате коллапс пузырька становится менее глубоким (сжатие завершается при больших значениях  $R_c$ ), что и приводит к меньшей несферичности пузырька в момент  $t_c$ . Максимум роста несферичности пузырька в воде немного увеличивается, а пузырька в ацетоне, наоборот, почти в 2 раза уменьшается. При этом значение  $n$ , при котором достигается максимум, в обоих случаях увеличивается. Данные изменения связаны с тем, что с ростом температуры вязкость жидкости уменьшается.

Следует отметить, что с ростом температуры жидкости  $T_0$  в результате увеличения в пузырьке массы пара и скорости звука достигаемые в пузырьке в момент  $t_c$  экстремальные значения давления и температуры уменьшаются.

**2.9. Влияние тепломассопереноса на поверхности пузырька.** Если пренебрегать тепломассопереносом, то увеличивается радиус пузырька в момент  $t_c$  (в воде от  $R_c = 11.12$  мкм до  $R_c = 15.14$  мкм, а в ацетоне от  $R_c = 22.75$  мкм до  $R_c = 34.27$  мкм). Это объясняется тем, что при отсутствии тепломассопереноса в пузырьке к концу его коллапса остается больше пара. На рис. 12 видно, что в результате уменьшения глубины коллапса рост несферичности пузырька в ацетоне

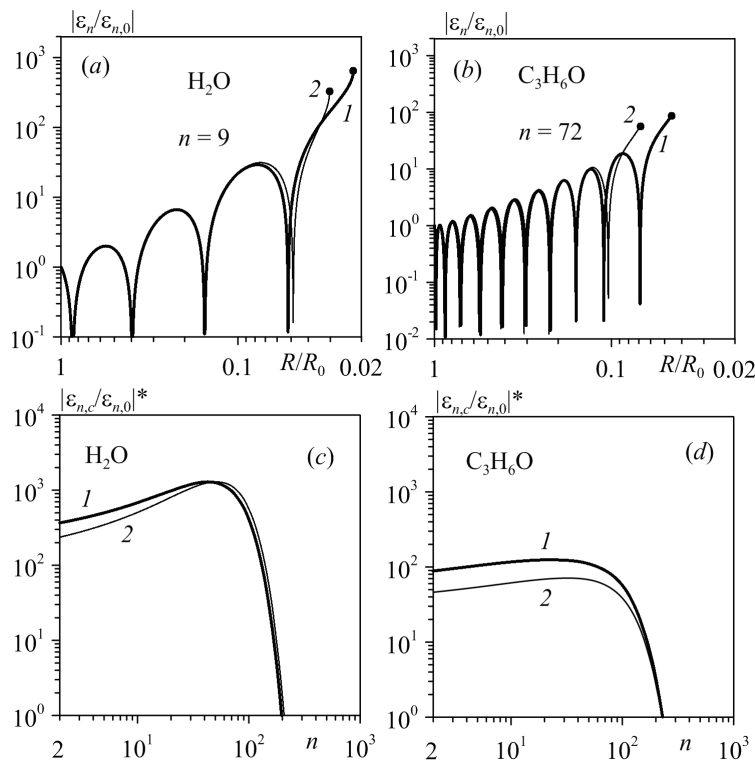


Рис. 12. Эволюция величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  при сжатии пузырька (точкой отмечен момент  $t_c$ ) (a, b) и огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  (c, d) с учетом (кривые 1) и без учета (кривые 2) тепломассопереноса. Все результаты получены без учета зависимости вязкости и поверхностного натяжения от температуры

оказывается меньше (до 2 раз для длинноволновых искажений сферичности). Аналогичная картина наблюдается и при  $n < 50$  у пузырька в воде, где без учета тепломассопереноса рост длинноволновых искажений сферичности занижается до 1.7 раз. Вместе с тем без учета тепломассопереноса плотность среды в пузырьке и радиальное ускорение в конце сжатия, где  $R > 0$ , принимают меньшие значения. В случае пузырька в воде это приводит к тому, что с ростом  $n$  увеличивается влияние неустойчивости Рэля–Тейлора. В итоге, с ростом  $n$  огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$ , полученные с учетом и без учета тепломассопереноса, сближаются.

В случае частичного учета тепломассопереноса на начальной части сжатия пузырька завышение его радиуса в конце коллапса и занижение роста его несферичности уменьшаются. Так, для пузырька в ацетоне при учете тепломассопереноса до повышения температуры на границе пузырька от  $0^\circ\text{C}$  в начале сжатия до  $48^\circ\text{C}$  (при этом радиус пузырька  $R$  уменьшается до 200 мкм, а скорость сжатия  $\dot{R}$  возрастает до 115 м/с)  $R_c = 23.85$  мкм, величина максимального роста несферичности занижается на 3.8% (при  $n = 2$  – на 7.6%). В случае пузырька в воде при учете тепломассопереноса до повышения температуры на границе пузырька от  $20^\circ\text{C}$  в начале сжатия до  $24^\circ\text{C}$  (как и в случае воды,  $R$  уменьшается до 200 мкм,  $\dot{R}$  возрастает до 115 м/с)  $R_c = 12.47$  мкм, величина максимального роста несферичности уменьшается на 2.5% (при  $n = 2$  – на 15.6%).

Следует отметить, что пренебрежение тепломассопереносом на заключительной стадии сжатия упрощает вычисления, поскольку позволяет избежать ряда

сложностей расчета нестационарной теплопроводности и неравновесных испарения и конденсации на межфазной границе при больших температурах в силу сильной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

**2.10. Влияние уравнения состояния пара.** Уравнения состояния (УРС) Нигматулина–Болотновой (3) можно применять для пара в широком диапазоне изменения его плотности и температуры как при наличии, так и при отсутствии в нем ударных волн. Вместе с тем обусловленные фокусировкой ударных волн супервысокотемпературные процессы в пузырьке вследствие их кратковременности и локализованности в небольшой окрестности центра пузырька для целей настоящей работы не играют какой-либо существенной роли. На довольно продолжительном отрезке времени сжатия пар во всей полости пузырька, за исключением ее узкой приграничной области, ведет себя как идеальный газ, а в этой узкой области величины термодинамических параметров близки к их значениям в окрестности линии насыщения, вплоть до критической точки. Затем на относительно коротком промежутке времени радиус пузырька быстро уменьшается. В результате давление пара быстро возрастает до больших значений. В силу этого можно ожидать, что наиболее существенную роль в моделировании состояния пара играет правильное описание его состояния в окрестности линии насыщения и критической точки и направленности последующего изменения состояния при быстром адиабатическом сжатии. Этим требованиям удовлетворяет следующая модификация УРС Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{R_g T}{V - kV_{\text{crit}}} - \frac{a}{(V/V_{\text{crit}})^\delta}, \quad U = c_V T - \frac{a}{\rho_{\text{crit}}(\delta - 1)} \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} \right)^{\delta-1}, \quad (10)$$

где  $V = 1/\rho$ ,  $V_{\text{crit}} = 1/\rho_{\text{crit}}$ , индексом “crit” обозначаются параметры критического состояния (воды  $p_{\text{crit}} = 221.15$  бар,  $\rho_{\text{crit}} = 317.76$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_{\text{crit}} = 647.27$  К; ацетона  $p_{\text{crit}} = 47.61$  бар,  $\rho_{\text{crit}} = 273$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_{\text{crit}} = 508.15$  К). Соответствующая (10) изентропа имеет вид  $[p + a(V/V_{\text{crit}})^{-\delta}](V - kV_{\text{crit}})^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = R_g/c_V + 1$  – показатель адиабаты (для воды  $\gamma = 1.323$ , для ацетона  $\gamma = 1.125$ ). Выражение (10) превращается в классическое уравнение состояния Ван-дер-Ваальса с  $\delta = 2$ . Наличие свободного параметра  $\delta$  позволяет точнее описать поведение пара в окрестности критической точки. Константы  $a$ ,  $k$  и  $\delta$  находятся из условия, что в критической точке  $p = p_{\text{crit}}$ ,  $\partial p/\partial V = 0$ ,  $\partial^2 p/\partial V^2 = 0$ . В частности, для воды  $k = 0.2215$ ,  $a = 998.3$  бар,  $\delta = 1.569$ , для ацетона  $k = 0.2275$ ,  $a = 209.3$  бар,  $\delta = 1.5891$ .

На рис. 13 дано сравнение изотерм и изентроп воды и ацетона, построенных по модифицированному УРС Ван-дер-Ваальса (10), УРС (3) и экспериментальным данным [47]. Как видно, уравнение (10) удовлетворительно описывает как состояние пара в окрестности линии насыщения и критической точки, так и направленность его изменения при быстром адиабатическом сжатии.

На рис. 14 видно, что использование для описания динамики пара модификации УРС Ван-дер-Ваальса (10) вместо широкодиапазонного уравнения состояния Нигматулина–Болотновой (3) в случае ацетона вносит лишь небольшие погрешности. В случае воды они также относительно невелики при длинноволновых возмущениях сферичности пузырька ( $2 \leq n \leq 10$ ). Для возмущений, испытывающих при сжатии максимальный рост, в воде ( $n \approx 65$ ) и ацетоне ( $n \approx 35$ ) величина  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  занижается в 2 и завышается в 1.3 раза соответственно.

**2.11. Влияние уравнения состояния жидкости.** УРС Нигматулина–Болотновой (3) построено в области жидкости по известным экспериментальным данным. Как и в случае с паром, его можно применять в широком диапазоне изменения

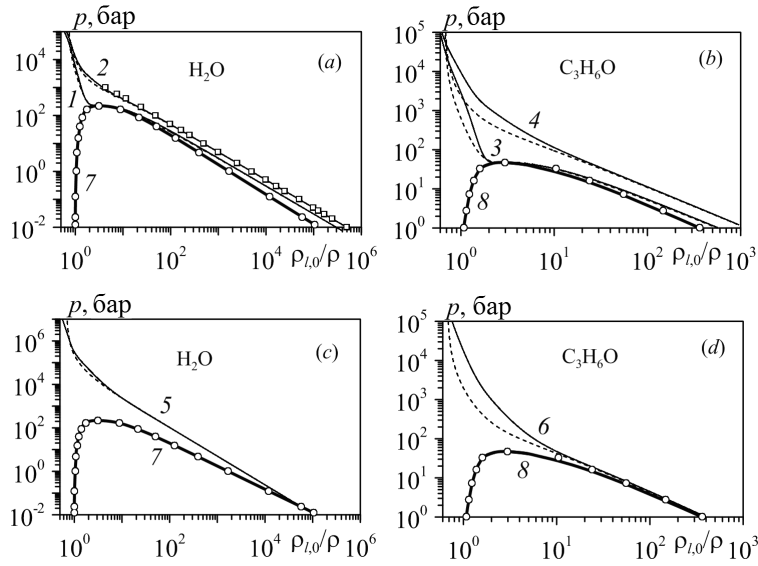


Рис. 13. Изотермы воды для  $T = T_{\text{crit}}, 1073 \text{ K}$  (кривые 1, 2) и ацетона  $T = T_{\text{crit}}, 1000 \text{ K}$  (кривые 3, 4) и изентропы для воды (кривые 5) и ацетона (кривые 6). Кривые 7, 8 – линии насыщения для воды и ацетона соответственно. Полые символы – экспериментальные данные из [27] и [47]. Сплошные кривые соответствуют УРС (3), пунктирные – УРС (10)

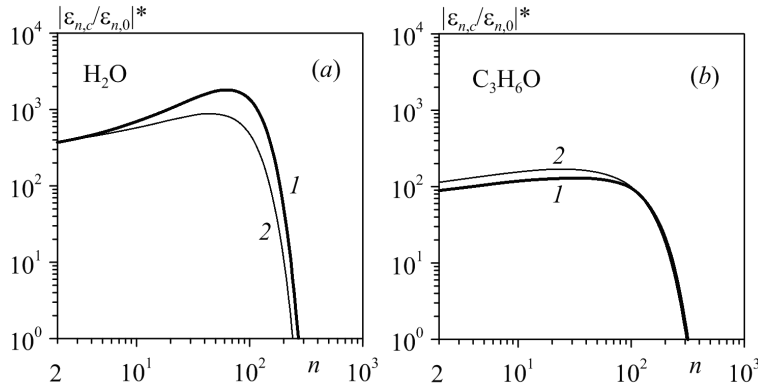


Рис. 14. Огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  при описании динамики пара и жидкости с УРС (3) (кривые 1), при замене для пара УРС (3) на уравнение (10) (кривые 2)

плотности и температуры жидкости как при наличии, так и при отсутствии в ней ударных волн. В рассматриваемых в настоящей работе задачах, несмотря на довольно значительную степень сжатия жидкости (до 1.8 раз в воде и 1.4 в ацетоне), ударные волны в жидкости в ходе сжатия не возникают. Поэтому можно предположить, что применение столь сложного УРС не является необходимым. Результаты расчетов показывают, что если не учитывать эффекты теплопроводности и массообмена, то для изучаемых в настоящей работе задач можно применять УРС вида

$$p = (\gamma - 1)\rho U - \gamma M, \quad U = c_V T + \frac{\gamma M}{\rho}, \quad (11)$$

где  $\gamma, M$  – константы.

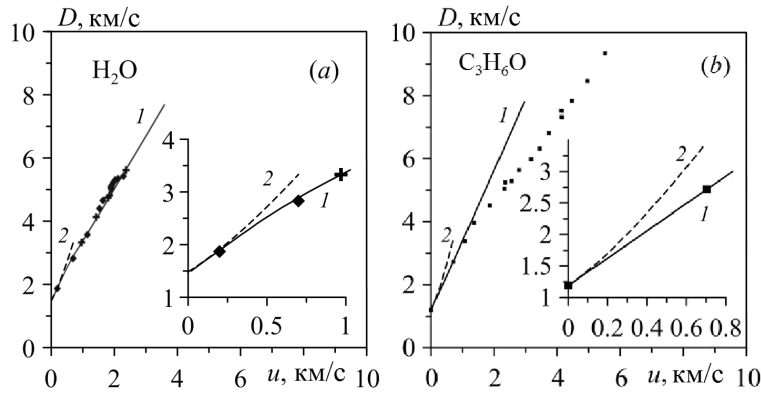


Рис. 15. Зависимости скорости ударной волны  $D$  от скорости среды  $u$  за ударной волной, полученные экспериментально (символы “■” – [48, 49], “+” – [50], “◆” – [51], по УРС Нигматулина – Болотновой (3) (кривые 1) и УРС (11) (кривые 2)

На рис. 15 представлено сравнение экспериментальных зависимостей скорости ударной волны  $D$  от скорости жидкости за ее фронтом  $u$  с теоретическими зависимостями, полученными по уравнениям состояния (3) и уравнениям (11) с  $\gamma = 6.64$ ,  $M = 3300$  бар для воды и  $\gamma = 7.7$ ,  $M = 1540$  бар для ацетона. Левая крайняя точка функции  $D(u)$  соответствует скорости звука в невозмущенной жидкости  $c_{l,0}$ . Указанные значения  $M$  и  $\gamma$  определяются из уравнений  $c_{l,0}^2 = \gamma(p_{l,0} + M)/\rho_{l,0}$ ,  $D'(0) = (\gamma + 1)/4 = D'(0)_{\text{exp}}$ , где  $D(u) = (\gamma + 1)u/4 + [((\gamma + 1)u/4)^2 + c_{l,0}^2]^{1/2}$ ,  $D'(0)_{\text{exp}}$  – значение производной, рассчитанное по экспериментальным данным (по двум крайним слева экспериментальным точкам рис. 15),  $p_{l,0} = 15$  бар: для воды  $c_{l,0} = 1483$  м/с,  $\rho_{l,0} = 998$  кг/м<sup>3</sup>, для ацетона  $c_{l,0} = 1189$  м/с,  $\rho_{l,0} = 810$  кг/м<sup>3</sup>.

Из рис. 15 следует, что УРС Нигматулина – Болотновой дает близкие к экспериментальным данным результаты в значительно более широком, чем уравнения (11), диапазоне интенсивности ударной волны. Однако для рассматриваемых в настоящей работе задач это несущественно, поскольку ударные волны в жидкости в них отсутствуют.

При постоянной энтропии из (11) следует известное уравнение в форме Тэта

$$p = (p_{l,0} + M) \left( \frac{\rho}{\rho_{l,0}} \right)^\gamma - M. \quad (12)$$

На рис. 16 приведено сопоставление зависимостей давления от плотности для изэнтроп уравнений Нигматулина – Болотновой (3) и Тэта (12) с указанными выше значениями  $\gamma$  и  $M$  для воды и ацетона в интервале, соответствующем рассматриваемым в настоящей работе задачам. Видно, что согласование кривых вполне удовлетворительное.

При замене УРС Нигматулина – Болотновой (3) на УРС (11) огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  зависимостей  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  от номера  $n$  в том случае, когда влияние теплообмена при сжатии пузырька не учитывается, графически не изменяются, сохраняя вид представленных на рис. 12 кривых 2 и для воды, и для ацетона. К сожалению, относительно несложные УРС (11) неудовлетворительно описывают изотермы жидкости. Поэтому если нужны более точные, чем без учета эффектов теплопроводности и массообмена, результаты, то применять УРС (11) в рассматриваемых задачах нельзя.

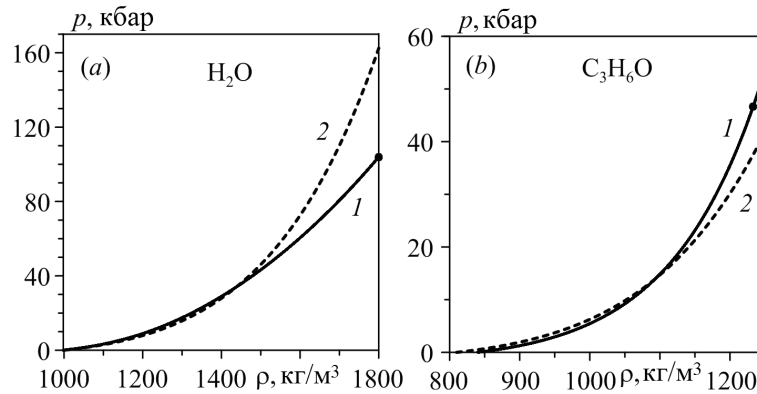


Рис. 16. Изентропы УРС Нигматулина–Болотновой (3) (кривые 1) и Тэта (12) (кривые 2) для воды и ацетона. Точками отмечено максимальное значение плотности в жидкости в конце коллапса пузырька

**2.12. Простейшая аппроксимация эволюции и роста несферичности пузырька при сжатии.** В наиболее продолжительной начальной низкоскоростной стадии сжатия влияние сжимаемости жидкости мало, давление пара в пузырьке намного меньше давления окружающей жидкости, то есть пузырек ведет себя как пустая полость в несжимаемой жидкости. Поэтому при  $n < 40$ , когда влияние вязкости относительно невелико, для описания эволюции  $\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}$  можно воспользоваться решениями задачи о росте возмущений сферичности пустого пузырька при его радиальном схлопывании в невязкой несжимаемой жидкости без учета поверхностного натяжения. Точное решение этой задачи в гипергеометрических функциях и его асимптотика для  $R \rightarrow 0$  приведены в [11]. Приближенное решение для всего сжатия получено в [36]. При больших  $n$  оно имеет вид

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n,0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{5/4} \cos y_n, \quad y_n = 3\delta_n \ln(R/R_0), \quad \delta_n = \frac{1}{12} (24n - 25)^{1/2}. \quad (13)$$

Из рис. 17, *a, b* следует, что для представленных значений  $n$  искажение сферичности пузырька практически на всем протяжении сжатия увеличивается в виде нарастающих колебаний из-за проявления неустойчивости Биркгоффа–Плессета [9–11, 30, 45, 52]. Изменение амплитуды колебаний величины  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  согласно выражению (13) хорошо соответствует численному решению на участке уменьшения радиуса пузырька примерно в 10 раз. Далее в численном решении из-за влияния пара колебания постепенно прекращаются, и величина  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  начинает расти быстрее, чем росла до этого амплитуда ее колебаний. Следует отметить, что и при других  $n \leq 40$  формула (13) довольно хорошо описывает изменение как амплитуды колебаний искажения при  $R/R_0 > 0.1$ , так и их частоту при  $0.7 > R/R_0 > 0.15$ .

Формула (13) описывает сжатие пустой полости до нуля, в то время как полость с паром сжимается до  $R \approx R_c$ . Для оценки порядка величины  $R_c$  можно использовать адиабатическое сжатие пузырька до жесткого ядра Ван-дер-Ваальса. В таком случае имеем

$$R_c = R_0 \left( k \frac{\rho_{0,g}}{\rho_{\text{crit}}} \right)^{1/3}. \quad (14)$$

Из рис. 17 *a, b* следует, что это выражение дает значение  $R_c$ , довольно близкое к получаемому в расчетах в случае воды. В случае ацетона кавитационный пузырек сжимается сильнее, чем допускается жестким ядром Ван-дер-Ваальса.

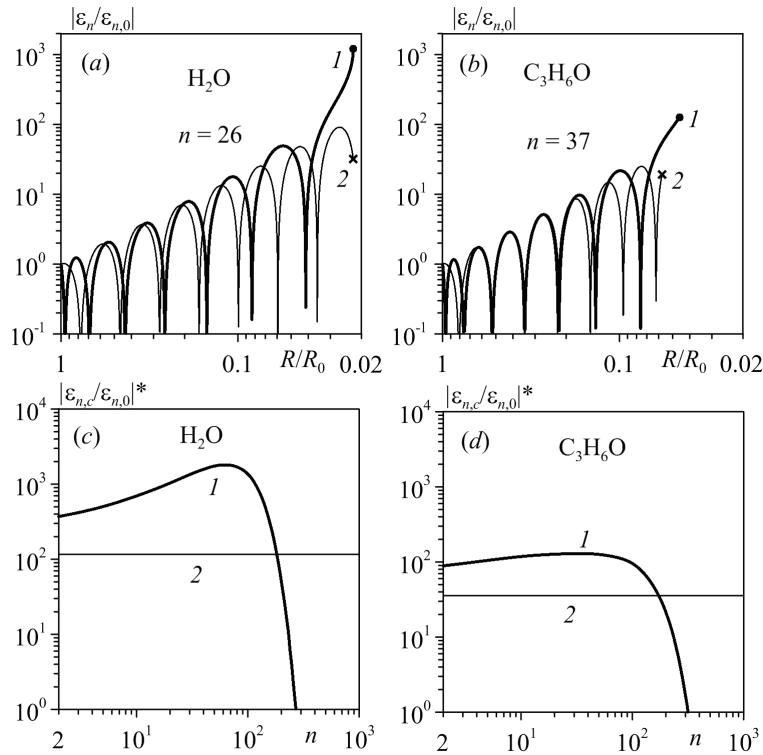


Рис. 17. Сравнение численного решения (1)–(6) для пузырька с паром (кривые 1) с приближенным решением (13) (кривые 2) для пустого пузырька. Точкой отмечен момент  $t_c$ , а крестиком – его аппроксимация (14)

На рис. 17, *c*, *d* приведены огибающие  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^*$  зависимостей  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|$  от номера  $n$ , полученные на основе формул (13), (14). Они представляют собой горизонтальные прямые  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^* \approx 100$  для воды и  $|\varepsilon_{n,c}/\varepsilon_{n,0}|^* \approx 36.5$  для ацетона. Несмотря на довольно большое отличие этих значений от получаемых в настоящей работе, они могут быть полезны для приближенных оценок роста амплитуды длинноволновой несферичности пузырька при коллапсе в случае воды и приближенных оценок не только роста амплитуды длинноволновой несферичности, но и максимальной по всем  $n$  величины роста амплитуды несферичности в случае ацетона.

### Заключение

Выполнено исследование роста амплитуды возмущений сферичности отдельного кавитационного пузырька в воде и ацетоне при его однократном сильном сжатии (коллапсе). Основное внимание уделено коллапсу кавитационного пузырька при давлении жидкости  $p_\infty = 15$  бар, начальном радиусе пузырька  $R_0 = 500$  мкм, температуре воды  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  и ацетона  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , с паром в пузырьке в начале сжатия в состоянии насыщения. Выбор таких значений обусловлен тем, что для них коллапс кавитационного пузырька получается довольно сильным. В частности, при таких условиях пузырек в конце коллапса сжимается так быстро, что пар в нем ведет себя как неконденсируемый газ.



Установлено следующее.

1. Сжатие содержимого кавитационного пузырька в воде является близким к однородному вплоть до его окончания. В отличие от этого при сжатии кавитационного пузырька в ацетоне в полости пузырька в конце сжатия возникает сходящаяся к его центру ударная волна. С увеличением давления  $p_\infty$  неоднородность радиальных распределений газодинамических параметров в пузырьке в воде в конце сжатия возрастает, однако ударно-волновой режим отсутствует как минимум до  $p_\infty \sim 100$  бар. При сжатии кавитационного пузырька в ацетоне даже при  $p_\infty \sim 1$  бар в финале сжатия в полости пузырька формируется ударная волна.

2. Амплитуда возмущений сферичности кавитационного пузырька в виде отдельных сферических гармоник  $Y_n(\theta, \varphi)$ , где  $n$  – номер гармоники, может возрастать к концу сжатия до 1800 раз у пузырька в воде и до 130 раз у пузырька в ацетоне. Столь большая разница (14 раз) обусловлена в основном двумя факторами: более глубоким сжатием пузырька в воде и более сильным проявлением у пузырька в воде неустойчивости Релея–Тейлора в конце коллапса. Максимум роста амплитуды несферичности достигается у гармоник с номером  $n_m \approx 65$  для пузырька в воде и  $n_m \approx 35$  для пузырька в ацетоне. При  $n < n_m$  рост несферичности по мере увеличения  $n$  возрастает (в 4.9 раз для воды и в 1.5 раза для ацетона), а при  $n > n_m$  довольно быстро убывает, так что при  $n > 270$  для воды и  $n > 320$  для ацетона амплитуда несферичности пузырька в конце сжатия оказывается меньше, чем в начале.

3. Влияние вязкости жидкости на рост длинноволновых возмущений ( $n < 20$  для воды и  $n < 30$  для ацетона) несущественно. Если влияние вязкости не учитывать, то рост несферичности при сжатии с увеличением  $n$  неограниченно возрастает, так что роль вязкости жидкости в ограничении роста коротковолновых возмущений является очень важной.

4. Влияние завихренности жидкости вне поверхности пузырька на рост его несферичности при сжатии относительно невелико. Это объясняется ростом скорости сжатия пузырька, в результате чего эффект новой генерируемой на поверхности пузырька завихренности оказывается более существенным, чем обратное влияние ранее созданной. Полное пренебрежение завихренностью приводит ко все большему завышению роста несферичности при  $n > 30$  в воде и  $n > 40$  в ацетоне. При этом максимальное значение роста несферичности возрастает незначительно, незначительно увеличивается и номер  $n$ , при котором оно достигается.

5. Влияние поверхностного натяжения на рост несферичности пузырька несущественно.

6. Влияние начального радиуса пузырька  $R_0$  в диапазоне  $250 \leq R_0 \leq 1000$  мкм на рост его несферичности для воды в интервале  $n < 10$  несущественно. С увеличением  $n$  оно увеличивается так, что максимум роста несферичности с увеличением  $R_0$  от 250 до 1000 мкм возрастает в 3 раза (от 1130 до 3370), а номер  $n$ , при котором он достигается, от 40 до 110. Рост несферичности пузырька в ацетоне при  $n < 60$  с изменением  $R_0$  в диапазоне  $250 \leq R_0 \leq 1000$  мкм изменяется в пределах 50%. Максимум же роста несферичности при вариации  $R_0$  в этом диапазоне изменяется еще меньше (на 23%).

7. Изменение давления жидкости  $p_\infty$  в интервале  $1 \leq p_\infty \leq 50$  бар мало влияет на рост несферичности пузырька в ацетоне при  $n \leq 40$ . Слабо зависит от  $p_\infty$  и величина максимума роста амплитуды несферичности (различие максимумов составляет не более 13%). При  $n > 40$  амплитуда несферичности пузырька при меньших значениях  $p_\infty$  растет меньше, причем с увеличением  $n$  это различие увеличивается. Во многом аналогичным образом характеризуется и влияние давления жидкости  $p_\infty$  на рост амплитуды несферичности пузырька в воде. При  $n < 60$

большой рост несферичности наблюдается при  $p_\infty = 1$  бар. Величины максимумов роста при  $p_\infty = 1$  и 15 бар оказываются близкими – 1800 и 2000 соответственно, при  $p_\infty = 50$  бар величина максимума составляет примерно 1200.

8. Увеличение температуры воды от 20 °С до 40 °С и ацетона от 0 °С до 20 °С приводит к примерно двукратному уменьшению роста несферичности для возмущений с номером  $n$  в диапазоне, где влияние вязкости жидкости несущественно. Указанные изменения обусловлены тем, что повышение температуры жидкости вызывает возрастание массы пара в пузырьке и скорости звука в паре. В результате коллапс пузырька становится менее глубоким. Максимум же роста несферичности пузырька в воде немного увеличивается, а пузырька в ацетоне, наоборот, почти в 2 раза уменьшается. При этом значение  $n$ , при котором достигается максимум, в обоих случаях увеличивается. Данные изменения связаны с тем, что с ростом температуры демпфирующее влияние вязкости уменьшается.

9. В случае пренебрежения тепломассопереносом в силу увеличения массы пара увеличивается радиус пузырька в конце коллапса. В результате без учета тепломассопереноса несферичность пузырька в ацетоне растет меньше (до 2 раз). Аналогичная картина наблюдается и при  $n < 50$  у пузырька в воде. Здесь различие роста несферичности с учетом и без учета тепломассопереноса меньше (до 1.7 раз). В случае пренебрежения тепломассопереносом плотность среды в пузырьке и радиальное ускорение в конце сжатия, где  $\ddot{R} > 0$ , принимают меньшие значения. Для пузырька в воде это приводит к тому, что с ростом  $n$  увеличивается влияние неустойчивости Рэлея–Тейлора. Таким образом, с ростом  $n$  различие роста несферичности пузырька с учетом и без учета тепломассопереноса сокращается.

10. При анализе формы пузырька широкодиапазонные уравнения состояния пара Нигматулина–Болотновой можно заменить на модифицированное уравнение Ван-дер-Ваальса с тремя свободными параметрами, определяемыми из известных условий в критической точке. Такая замена приводит к незначительным погрешностям роста амплитуды несферичности пузырька в случае ацетона. В случае воды погрешности также относительно невелики при длинноволновых возмущениях сферичности пузырька ( $2 \leq n \leq 10$ ). Величина же роста амплитуды возмущений, испытывающих при сжатии максимальный рост, в воде ( $n \approx 65$ ) и ацетоне ( $n \approx 35$ ) занижается в 2 и завышается в 1.3 раза соответственно.

11. При анализе формы пузырька нет необходимости и в широкодиапазонном уравнении состояния жидкости. Однако при этом нужно достаточно аккуратно описывать изотермы жидкости в окрестности линии насыщения. Если тепломассообмен не учитывать, то в качестве уравнения состояния жидкости можно принять уравнение Тэта. Характеристики роста амплитуды возмущений сферичности пузырька и в воде, и в ацетоне при этом практически не изменяются.

### Summary

*R.I. Nigmatulin, A.A. Aganin, M.A. Ilgamov, D.Yu. Toporkov.* Evolution of Perturbations in the Spherical Shape of a Cavitation Bubble during Its Implosive Collapse.

We study the growth of small deviations in the spherical shape of a cavitation bubble during its single strong compression. At the beginning of compression, the vapor in the bubble cavity is in the state of saturation. The deviations from sphericity are taken in the form of spherical harmonics of degree  $n = 2, 3, \dots$ . The dynamics of the vapor in the bubble and the surrounding liquid is presented as a superposition of the spherical component and its nonspherical perturbation. The spherical component of the liquid and vapor dynamics is described by gas dynamics equations since shock waves may arise in the bubble during the final high-speed stage of compression and the liquid compressibility becomes significant. The nonstationary heat conductivity of the liquid and vapor and the nonequilibrium of evaporation/condensation

on the interface are taken into account. Realistic wide-range equations of state are applied. The nonspherical component is described allowing for the effects of liquid viscosity, surface tension, density of the vapor in the bubble and inhomogeneity of its pressure. The collapse of the cavitation bubble in water and acetone is considered at the liquid pressure  $p_\infty$ , the initial radius  $R_0$  and the liquid temperature  $T_0$ , which vary in the ranges  $250 \leq R_0 \leq 1000$  mcm,  $1 \leq p_\infty \leq 50$  bar,  $20 \leq T_0 \leq 40$  °C for water and  $0 \leq T_0 \leq 20$  °C for acetone. It is found that in the case of  $R_0 = 500$  mcm,  $p_\infty \leq 50$  bar,  $T_0 = 20$  °C for water and  $T_0 = 0$  °C for acetone, the amplitude of the small nonsphericity of the bubble in the form of individual spherical harmonics may increase during compression up to 2000 times in water and up to 150 times in acetone. The growth of nonsphericity is studied as a function of a number of important factors such as the initial bubble radius, liquid pressure, liquid viscosity, evaporation/condensation on the bubble surface, the presence of vapor in the bubble, heat conductivity in the vapor and liquid, etc.

**Keywords:** cavitation bubble, vapor bubble, collapse of a bubble, compression of a bubble, distortion from a spherical shape, deformation of a bubble.

### Литература

1. *Flannigan D.J., Suslick K.S.* Inertially confined plasma in an imploding bubble // *Nature Physics*. – 2010. – V. 6. – P. 598–601.
2. *Moss W.C., Clarke D.B., Young D.A.* Calculated pulse widths and spectra of a single sonoluminescing bubble // *Science*. – 1997. – V. 276. – P. 1398–1401.
3. *Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. Jr., Taleyarkhan R.P.* The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids*. – 2005. – V. 17. – P. 107106-1–107106-31.
4. *Bass A., Ruuth S.J., Camara C., Merriman B., Putterman S.* Molecular dynamics of extreme mass segregation in a rapidly collapsing bubble // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – V. 101, No 23. – P. 234301-1–234301-4.
5. *Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C.* Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*. – 2002. – V. 295. – P. 1868–1873.
6. *Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. Jr., Nigmatulin R.I., Block R.C.* Additional evidence of nuclear emissions during acoustic cavitation // *Phys. Rev. E*. – 2004. – V. 69. – P. 036109-1–036109-11.
7. *Taleyarkhan R.P., West C.D., Lahey R.T. Jr., Nigmatulin R.I., Block R.C., Xu Y.* Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – V. 96. – P. 034301-1–034301-4.
8. *Birkhoff G.* Note on Taylor instability // *Quart. Appl. Math.* – 1954. – V. 12. – P. 306–309.
9. *Plesset M.S.* On the stability of fluid flows with spherical symmetry // *J. Appl. Phys.* – 1954. – V. 25. – P. 96–98.
10. *Birkhoff G.* Stability of spherical bubbles // *Quart. Appl. Math.* – 1956. – V. 13. – P. 451–453.
11. *Plesset M.S., Mitchell T.P.* On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // *Quart. Appl. Math.* – 1956. – V. 13. – P. 419–430.
12. *Kull H.J.* Theory of the Rayleigh–Taylor instability // *Phys. Rep.* – 1991. – V. 206. – P. 197–325.
13. *Hilgenfeldt S., Brenner M., Grossmann S., Lohse D.* Analysis of Rayleigh–Plesset dynamics for sonoluminescing bubbles // *J. Fluid Mech.* – 1998. – V. 365. – P. 171–204.

14. *Putterman S.J., Weninger K.P.* Sonoluminescence: How bubbles turn sound into light // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2000. – V. 32. – P. 445–476.
15. *Lin H., Storey B.D., Szeri A.J.* Rayleigh–Taylor instability of violently collapsing bubbles // *Phys. Fluid.* – 2002. – V. 14. – P. 2925–2928.
16. *Flynn H.G.* Cavitation dynamics. I. A mathematical formulation // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1975. – V. 57. – P. 1379–1396.
17. *Keller J.B., Miksis M.* Bubble oscillations of large amplitude // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1980. – V. 55. – P. 628–633.
18. *Prosperetti A., Crum L.A., Commander K.W.* Nonlinear bubble dynamics // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1986. – V. 83. – P. 502–514.
19. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 т. – М.: Наука, 1987.
20. *Нигматулин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К.* О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // *Докл. РАН.* – 1996. – Т. 348, № 6. – С. 768–771.
21. *Wu C.C., Roberts P.H.* Shock-wave propagation in a sonoluminescing gas bubble // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – V. 70. – P. 3424–3427.
22. *Wu C.C., Roberts P.H.* A model of sonoluminescence // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1994. – V. 445. – P. 323–349.
23. *Moss W.C., Clarke D.B., White J.W., Young D.A.* Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence // *Phys. Fluids.* – 1994. – V. 6. – P. 2979–2985.
24. *Аганин А.А., Нигматулин Р.И., Ильгамов М.А., Ахатов И.Ш.* Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // *Докл. РАН.* – 1999. – Т. 369, № 2. – С. 182–185.
25. *Aganin A.A.* Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* – 2000. – V. 33. – P. 157–174.
26. *Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю.* Искажение сферичности парового пузырька в дейтерированном ацетоне // *Докл. РАН.* – 2006. – Т. 408, № 6. – С. 767–771.
27. *Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х.* Широкодиапазонное уравнение состояния органических жидкостей на примере ацетона // *Докл. РАН.* – 2007. – Т. 415, № 5. – С. 617–621.
28. *Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х.* Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // *Теплофизика высоких температур.* – 2011. – Т. 49, № 2. – С. 310–313.
29. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
30. *Eller A.I., Crum L.A.* Instability of the motion of a pulsating bubble in a sound field // *J. Acoust. Soc. Am. Suppl.* – 1970. – V. 47. – P. 762–767.
31. *Prosperetti A.* Viscous effects on perturbed spherical flows // *Quart. Appl. Math.* – 1977. – V. 34. – P. 339–352.
32. *Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M.* Phase diagrams for sonoluminescing bubbles // *Phys. Fluids.* – 1996. – V. 8. – P. 2808–2826.
33. *Hao Y., Prosperetti A.* The effect of viscosity on the spherical stability of oscillating gas bubbles // *Phys. Fluids.* – 1999. – V. 11. – P. 1309–1317.
34. *Kwak H.-Y., Karng S.W., Lee Y.P.* Rayleigh–Taylor instability on a sonoluminescing gas bubble // *J. Korean Phys. Soc.* – 2005. – V. 46, No 4. – P. 951–962.

35. *Ильгамов М.А.* Качественный анализ развития отклонений от сферической формы при схлопывании полости в жидкости // Докл. РАН. – 2005. – Т. 401, № 1. – С. 37–40.
36. *Ильгамов М.А.* Расширение-сжатие и устойчивость полости в жидкости при сильном акустическом воздействии // Докл. РАН. – 2010. – Т. 433, № 2. – С. 178–181.
37. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
38. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. – 928 с.
39. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю.* Влияние вязкости жидкости на затухание малых искажений сферической формы газового пузырька // Прикл. механика и техн. физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 30–39.
40. *Wu C.C., Roberts P.H.* Bubble shape instability and sonoluminescence // Phys. Lett. A. – 1998. – V. 250. – P. 131–136.
41. *Aganin A.A., Khismatullina N.A.* Liquid vorticity computation in non-spherical bubble dynamics // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2005. – V. 48. – P. 115–133.
42. *Augsdorfer U.H., Evans A.K., Oxley D.P.* Thermal noise and the stability of single sonoluminescing bubbles // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 61. – P. 5278–5286.
43. *Yuan L., Ho C.Y., Chu M.-C., Leung P.T.* Role of gas density in the stability of single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. E. – 2001. – V. 64. – P. 016317-1–016317-6.
44. *Lin H., Storey B.D., Szeri A.J.* Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh–Plesset equation // J. Fluid Mech. – 2002. – V. 452. – P. 145–162.
45. *Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.* Эволюция малых искажений сферической формы парового пузырька при его сверхсжатии // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23, № 10. – С. 82–96.
46. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948. – 612 с.
47. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
48. *Трунин Р.Ф.* Ударная сжимаемость конденсированных веществ в мощных ударных волнах подземных ядерных взрывов // Усп. физ. наук. – 1994. – Т. 164, № 11. – С. 1215–1237.
49. *Трунин Р.Ф., Жерноклотов М.В., Кузнецов Н.Ф., Радченко О.А., Сичевская Н.В., Шутков В.В.* Сжатие жидких органических веществ в ударных волнах // Хим. физика. – 1992. – Т. 11, № 3. – С. 424–432.
50. *Walsh J.M., Rice M.H.* Dynamic compression of liquids from measurements on strong shock waves // J. Chem. Phys. – 1957. – V. 26. – P. 815–823.
51. *Шарипджанов И.И., Альтшулер Л.В., Брусникин С.Е.* Аномалии ударной и изоэнтропической сжимаемости воды // Физика горения и взрыва. – 1983. – Т. 19, № 5. – С. 149–153.
52. *Ильгамов М.А.* Отклонение от сферичности паровой полости в момент ее коллапса // Докл. РАН. – 2011. – Т. 440, № 1. – С. 35–38.

Поступила в редакцию  
24.12.13

**Нигматулин Роберт Искандерович** – академик РАН, директор, Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, г. Москва, Россия.

Е-mail: *nigmar@ocean.ru*

**Аганин Александр Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, Россия.

Е-mail: *aganin@kfti.knc.ru*

**Ильгамов Марат Аксанович** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, г. Уфа, Россия.

Е-mail: *ilgamov@anrb.ru*

**Топорков Дмитрий Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, Россия.

Е-mail: *top.dmr@gmail.com*