УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 526–535 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.54 doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.526-535

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ ГАХОВА В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПРЕДШВАРЦИАНОМ

А.В. Казанцев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Установлено, что если левая часть уравнения Гахова ограничена двойкой, то оно имеет ровно один корень в единичном круге, причем двойка неулучшаема, а указанный корень не обязательно нулевой. Раскрыто два момента, возникающих в связи с этим утверждением. Первый из них касается задаваемого предшварцианами погружения класса Гахова в пространство ограниченных голоморфных функций. Показано, что поперечник такого погружения равен двум, и дано полное описание пересечения границы этого погружения с шаром радиуса 2 с центром в нуле. Второй момент связан с сохранением единственности корня при условии ограниченности линейных и дробно-линейных действий на предшварциан с домножением на переменную единичного круга. Несколько признаков единственности построены в форме условий однолистности С.Н. Кудряшова.

Ключевые слова: уравнение Гахова, конформный радиус, предшварциан

Введение

В работе [1] установлены признаки однолистности функций f, голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ или аналитических вне $\mathbb{D}$, исключая простой полюс на бесконечности, в виде ограничений на предшварциан f''/f'. Источниками указанных признаков, не раскрываемыми в [1], стали условия ограниченности предшварциана $F''_\infty(z)/F'_\infty(z)$ и предшварциана с домножением $\zeta F''_0(\zeta)/F'_0(\zeta)$ для интегральных представлений

$$F_\infty(z) = \int f'(1/z)\, dz \tag{1}$$

и

$$F_0(\zeta) = -F_\infty(1/\zeta) = \int f'(\zeta)\, d\zeta/\zeta^2 \tag{2}$$

так называемого основного решения внешней обратной краевой задачи (ОКЗ) по параметру s соответственно во внешности круга $\mathbb{D}$ и в самом круге $\mathbb{D}$ (см., например, [2, 3]). Функция f, фигурирующая в представлениях (1) и (2), является решением соответствующей внутренней ОКЗ и имеет разложение вида $f(\zeta) = a_1\zeta + a_3\zeta^3 + \cdots$. Обращение в последнем коэффициента a_2 в нуль обеспечивает отсутствие логарифмической особенности указанных представлений (соответственно, в $z = \infty$ и $\zeta = 0$) и выделяет корень $\zeta = 0$ уравнения Гахова

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2), \tag{3}$$

которое служит для определения критических точек гиперболической производной (конформного радиуса)

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)| \tag{4}$$

функции f.

Фиксирование нулевой критической точки функции (4) отвечает случаю фиксированного полюса в бесконечности при решении внешней ОКЗ (приводящего к (1), см. [4]); при этом $f''(0) = 0$. Такой случай будем называть *нужинским* в честь его первого исследователя – известного советского ученого-механика, ректора Казанского государственного университета, профессора М.Т. Нужина. Противоположный случай – без изначальных ограничений на множество M_f корней уравнения (3) – будем называть *гаховским*; ему отвечает полный набор решений

$$F_a(\zeta) = \int f'(\zeta)((1 - \bar{a}\zeta)/(\zeta - a))^2 \, d\zeta, \quad a \in M_f, \tag{5}$$

внешней ОКЗ с одними и теми же краевыми условиями (см. [5]); очевидно, при $a = 0$ представление (5) принимает вид (2). Отметим только, что

$$F''_\infty(z)/F'_\infty(z) = -\zeta^2 f''(\zeta)/f'(\zeta) \tag{6}$$

при $\zeta = 1/z$ и

$$\zeta F''_0(\zeta)/F'_0(\zeta) = \zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) - 2. \tag{7}$$

Наряду с однолистной разрешимостью в теории ОКЗ развиваются вопросы корректности; для рассматриваемого класса задач они связаны с накоплением условий единственности критической точки конформного радиуса (4). В настоящей работе несколько таких условий построены в форме С.Н. Кудряшова [1]. При этом оказалось, что области значений параметров, обеспечивающих однолистность, как правило, шире, чем аналогичные области для единственности. Так, например, неравенство

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le c, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{8}$$

будет условием однолистности при $c \le m$, где $m \approx 3.05\ldots$ – корень некоторого явно выписываемого уравнения, причем постоянную m можно увеличить, не нарушая свойство неравенства (8) быть признаком однолистности [1]. Условием единственности корня (3) неравенство (8) будет, когда $c \le 2$, при этом постоянная 2 неулучшаема, а указанный корень не обязательно нулевой (см. разд. 1).

Сравнение однолистности и единственности корня (3) для функций f, удовлетворяющих неравенству

$$|\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) - 2| \le c, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{9}$$

(ср. с (7)) показывает, что f будет однолистной при $c \le c_0$, где c_0 – некоторое число из интервала $(4, 2 + 2\sqrt{2})$ [1], а множество M_f – в нужинском случае – является одноточечным при $2 < c \le 1 + \sqrt{5}$ (см. разд. 3).

Приведенные условия вполне характеризуют содержание соответствующих разделов; разд. 2 посвящен применению функционально-аналитического подхода аналогично [6]. Влияние работы [1] на предпринятое здесь исследование явилось решающим, и автор посвящает настоящую работу 80-летию со дня рождения замечательного советского и российского математика Станислава Никифоровича Кудряшова (Южный федеральный университет), которому принадлежит ряд основополагающих работ по однолистности и корректности внешних ОКЗ.

1. Условие единственности

Как обычно, через H обозначим класс функций, голоморфных в $\mathbb{D}$, A – его подкласс, состоящий из функций f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, H_0 – класс функций $f \in A$, локально однолистных в $\mathbb{D}$, то есть таких, что $f'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Легко показать, что любое из условий (8), (9) для $f \in A$ обеспечивает принадлежность $f \in H_0$. Как отмечено выше, элементы M_f для $f \in H_0$ суть критические точки функции (4); каждая из таких точек может быть только локальным максимумом, седлом или полуседлом поверхности $h = h_f(\zeta)$; количество этих точек обозначается через k_f.

Напомним определение класса Гахова и его составляющих (см., например, [3]). Класс (множество) Гахова определяется как $\mathcal{G} = \{f \in H_0 : k_f \leq 1\}$ и распадается в дизъюнктное объединение регулярного $\mathcal{G}_1$, сингулярного $\mathcal{G}_s$ и нулевого $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$ классов Гахова. Регулярный класс Гахова $\mathcal{G}_1$ состоит из всех функций $f \in H_0$, для которых уравнение (3) имеет единственный корень в $\mathbb{D}$, являющийся максимумом функции (4).

Как обычно, через $\mathcal{B}_0$ обозначается малый класс Блоха, то есть множество всех $f \in H$, таких что $\lim\limits_{\zeta \to \partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0$, через H^∞ – пространство функций $F \in H$, ограниченных в $\mathbb{D}$; $\|F\|_\infty = \sup\limits_{\zeta \in \mathbb{D}} |F(\zeta)|$ – норма элемента $F \in H^\infty$. Пусть $\mathbb{D}_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho\}$, $\rho > 0$. Далее нам понадобится следующее утверждение, устанавливаемое так же, как его аналог из [6].

Предложение 1. *Если $f \in A$ и $f''/f' \in H^\infty$, то $f \in H_0 \bigcap \mathcal{B}_0$. Если $\|f''/f'\|_\infty \leq c$, то $M_f \subset \overline{\mathbb{D}}_\rho$, где $\rho = \rho(c) := c/[1 + \sqrt{1 + c^2}]$.*

Теперь докажем наш основной результат.

Теорема 1. *Голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(\zeta) = \zeta + \cdots$, удовлетворяющая условию*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leq 2, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{10}$$

имеет единственную (не обязательно нулевую) критическую точку конформного радиуса (4) в круге $\mathbb{D}$. Постоянная 2 в (10) неулучшаема; одновременное нарушение условия (10) и единственности критической точки функции h_{f_b} при движении вдоль лучей Хорнича $f_b(\zeta) = \int\limits_0^\zeta f'(t)^b \, dt$ с ростом b, где $\|f''/f'\|_\infty = 1$, происходит только в случае функции $f(\zeta) = \int\limits_0^\zeta e^{t^2/2} \, dt$ и ее вращений.

Доказательство. Из отмеченного в начале раздела следует, что условия теоремы обеспечивают локальную однолистность функции f в $\mathbb{D}$. Далее, неравенство (10) позволяет записать предшварциан f''/f' в виде

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\varphi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{11}$$

где $\varphi \in H$ и $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. По лемме Шварца отсюда имеем

$$|(f''(\zeta)/f'(\zeta))'| \leq 2(1 - |\varphi(\zeta)|^2)/(1 - |\zeta|^2), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{12}$$

Вновь используя (11), из (12) получим

$$|\{f, \zeta\}| \leq 2(1 - |\zeta|^2 |\varphi(\zeta)|^2)/(1 - |\zeta|^2), \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

откуда

$$|\{f,\zeta\}| \le 2/(1-|\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{13}$$

при этом если $\zeta \ne 0$, то неравенство (13) – строгое. Здесь $\{f,\zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (f''/f')^2(\zeta)/2$ – производная Шварца (шварциан) функции f.

Согласно предложению 1 множество M_f непусто. Благодаря неравенству (13) оно одноточечно [7]. Неулучшаемость постоянной 2 в (10) устанавливается исследованием динамики множеств M_{f_b}, когда параметр b, возрастая, проходит через значение 2, а функция f определяется из (11) при $\varphi(\zeta)=\zeta$.

Теперь докажем последнее утверждение теоремы. Рассмотрим функцию $f \in H$, удовлетворяющую условию $\|f''/f'\|_\infty = 1$ и такую, что для любого $b>2$ вблизи 2 множество M_{f_b} содержит не менее двух элементов. По предложению 1 при $b \downarrow 2$ все элементы M_{f_b} стягиваются к единственному (в силу доказанного выше) элементу множества M_{f_2}. Обозначим этот элемент через a. Таким образом, по лемме 2 из [6] a есть точка бифуркации слоения $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{b>0} M_{f_b} \times \{b\}$, откуда

$$|\{f_2,a\}| = 2/(1-|a|^2)^2. \tag{14}$$

Благодаря строгому характеру неравенства (13) при $\zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ отсюда немедленно следует, что $a=0$. Поэтому функция φ из соотношения (11) для f_2 имеет разложение $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta + \cdots$, а так как (14) приобретает вид $|\{f_2,0\}| = 2$, то $|\gamma|=1$, откуда по лемме Шварца $\varphi(\zeta) = \varepsilon\zeta$, $|\varepsilon|=1$.

Теорема 1 доказана. □

Пусть $c \ge 0$. Введем следующие подклассы класса A. Класс $N(c)$ содержит в точности те функции $f \in A$, которые удовлетворяют неравенству типа Нехари $(1-|\zeta|^2)^2|\{f,\zeta\}| \le c$, $\zeta \in \mathbb{D}$, с шварцианом $\{f,\zeta\}$; класс $B(c)$ выделяется из A условием $(1-|\zeta|^2)|(f''/f')'(\zeta)| \le c$, $\zeta \in \mathbb{D}$; класс $K(c)$ определяется оценкой (8).

Следствие 1. *Имеют место соотношения $K(2) \subset B(2)$, $K(2) \subset N(2)$ и $K(2) \subset \mathcal{G}_1$. Более того, неравенство, определяющее класс $N(2)$, является строгим на функциях $f \in K(2)$ при $\zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$.*

Замечание 1. Последнее утверждение следствия 1 обусловливает невозможность потери единственности корня уравнения Гахова при выходе из $K(2)$ вдоль лучей Хорнича за счет бифуркации типа $\bigcup$ (когда возникающее ненулевое полуседло распадается на максимум и седло). Данное заключение поглощается теоремой 1: потеря единственности при выходе из $K(2)$ возможна только при $\zeta=0$ и за счет бифуркации типа Ψ (при которой максимум переходит в седло с ответвлением двух максимумов). В терминах [8] это означает, что пирсинг сферы Нехари лучом Хорнича возможен только сквозь точку $\zeta=0$.

Замечание 2. Набор включений из следствия 1 можно дополнить соотношением $K(2) \subset S^*$, доказанным в [9]; S^* – известный класс нормированных звездообразных функций в $\mathbb{D}$.

Замечание 3. Как показывают соотношения вида (2) и (7), не существует голоморфной в $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ функции $F(\zeta) = b_{-1}/\zeta + b_0 + b_1\zeta + \cdots$, $b_{-1} \ne 0$, с ограниченным предшварцианом $F''(\zeta)/F'(\zeta)$. Что касается соотношений вида (1) и (6), то здесь, напротив, оказывается справедливым следующее утверждение в духе теоремы 3 из [7] (используем нормировку в бесконечности).

Следствие 2. *Пусть функция $F(z) = z + c_0 + c_1/z + \cdots$ является голоморфной в области $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$. Если $|F''(z)/F'(z)| \le 2$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, то функция $H_F(z) = (1 - 1/|z|^2)|F'(z)|$ не имеет критических точек при $1 < |z| < \infty$.*

2. Граница класса Гахова в пространстве ограниченных предшварцианов

Дополним тему выхода из класса $K(2)$ доказанной ниже теоремой 2. Для этого применим к исследуемой ситуации подход, развивавшийся в работе [6]. Рассмотрим отображение $P : H_0 \to H : f \mapsto F = f''/f'$, сопоставляющее каждой функции $f \in H_0$ ее предшварциан $F = f''/f'$ и взаимно однозначное в силу нормировок в классе A. Связь $f = P^{-1}(F)$ отражается в обозначениях множества $M(F) := M_f$ корней уравнения (3), их числа $k(F) := k_f$ и гауссовой кривизны $K_F(a) := K_f(a)$ поверхности $h = h_f(\zeta)$ в точках $a \in M(F)$; при этом в указанных точках будет $K_F(a) = h_{P^{-1}(F)}(a)[4/(1-|a|^2)^4 - |F'(a) - F(a)^2/2|^2]$.

Предложение 1 означает, что $A \bigcap P^{-1}(H^\infty) \subset H_0 \bigcap \mathcal{B}_0$. Справедливо

Предложение 2. *Имеют место соотношения* $P^{-1}(H^\infty) \bigcap (\mathcal{G}_0 \bigcup \mathcal{G}_s) = \varnothing$ *и* $\mathcal{G}_1 \setminus P^{-1}(H^\infty) \neq \varnothing$.

Данное предложение доказывается так же, как следствие 1 и замечание 2 из [6]. Оно открывает серию аналогов утверждений из [6]. Приведем только один из таких аналогов, непосредственно расширяющих теорему 1. Пусть $\mathcal{C} = P(\mathcal{G}_1) \bigcap H^\infty$ и $\Delta = \{F \in H^\infty : \|F\|_\infty \leq 2\}$; через $Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$, как обычно, обозначается граница множества $\mathcal{C}$ в пространстве H^∞.

Теорема 2. *Имеет место соотношение*

$$\Delta \bigcap Fr_{H^\infty}\mathcal{C} = \{F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta : |\varepsilon| = 1\}. \tag{15}$$

Доказательство. Через Λ обозначим множество, стоящее в правой части (15). Тогда включение $\Lambda \subset \Delta \bigcap Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$ очевидно в силу последнего утверждения теоремы 1.

Докажем, что $\Delta \bigcap Fr_{H^\infty}\mathcal{C} \subset \Lambda$. Пусть $G \in \Delta \bigcap Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$. Тогда существует последовательность $G_n \in H^\infty \setminus \mathcal{C}$, сходящаяся к G по норме H^∞. Почти дословно перенося на рассматриваемый случай соответствующую часть обоснования теоремы 1 из [6], получим, что для каждого номера $n \geq 1$ в $M(G_n)$ найдутся элементы ξ_n и η_n такие, что $K_{G_n}(\xi_n) \geq 0 \geq K_{G_n}(\eta_n)$, $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ и $K_{G_n}(\xi_n) \to K_G(\xi)$, $K_{G_n}(\eta_n) \to K_G(\eta)$. При этом $\xi, \eta \in \overline{\mathbb{D}}_{\rho(2)} \bigcap M(G)$ (см. предложение 1).

Так как $G \in \Delta$, то по теореме 1 ($\Delta \subset \mathcal{C}$) отсюда следует, что $\xi = \eta$, $K_G(\xi) = 0$, то есть

$$|\{g, \xi\}| = 2/(1 - |\xi|^2)^2, \tag{16}$$

где $g = P^{-1}(G)$. Кроме того, теорема 1 дает

$$|\{g, \zeta\}| < 2/(1 - |\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) немедленно следует, что $\xi = 0$, и доказательство завершается так же, как обоснование теоремы 1.

Теорема 2 доказана. □

Замечание 4. В терминологии [10] теоремы 1 и 2 утверждают, что поперечник класса Гахова в пространстве H^∞ равен двум.

Рассмотрим две группы примеров, позволяющих строить функции из $Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$.

1. Пусть $\bar{b}(F) = \sup\{\sigma \in (0, \infty) : b \in [0, \sigma] \Rightarrow k(bF) = 1\}$ – функционал первого выхода из множества $\mathcal{C}$ вдоль луча bF, $b > 0$, испускаемого функцией $F \in H^\infty$. При $0 < \omega < 1$ для каждой из функций

$$F_\omega(\zeta) = (\zeta - \omega)/(1 + \omega), \quad (\zeta - \omega)/(1 - \omega\zeta), \quad (1 - \omega)\zeta/(1 - \omega\zeta)$$

единичной H^∞-нормы величина $\bar{b}(F_\omega)$ будет возрастающей функцией от ω, отображающей интервал $\omega \in (0,1)$ на луч $b \in (2,+\infty)$. Во всех трех случаях (два первых не являются нужинскими) единственность корня уравнения Гахова $bF_\omega(\zeta) = 2\bar\zeta/(1-|\zeta|^2)$ при возрастании b через значение $\bar{b}(F_\omega)$ теряется вне $\zeta = 0$ за счет бифуркации типа $\bigcup$; при этом, очевидно, $\bar{b}(F_\omega)F_\omega \in Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$. С учетом указанных примеров заключаем о справедливости следующего утверждения; обозначим $\bar{b}_f = \bar{b}(P(f))$.

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{U}$ – класс функций $f \in A$, для каждой из которых $\|P(f)\|_\infty = 1$, $\bar{b}_f < +\infty$ и единственность корня уравнения $bP(f) = 2\bar\zeta/(1-|\zeta|^2)$ теряется при $b = \bar{b}_f$ вне $\zeta = 0$ за счет бифуркации типа $\bigcup$. Тогда $\bar{b}_f > 2$, $f \in \mathcal{U}$ и $\inf_{f\in\mathcal{U}} \bar{b}_f = 2$.*

Как показывает пример функции

$$F_\omega(\zeta) = (1-\omega)/(1-\omega\zeta) \tag{18}$$

с $0 < \omega < 1$ и $\|F\|_\infty = 1$, для которой $\bar{b}(F_\omega) = +\infty$, условие $\bar{b}_f < +\infty$ в формулировке следствия 3 является существенным.

2. Другой подход к построению функций $F \in Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$ основан на использовании семейства функциональных классов специального вида. А именно, для произвольного фиксированного $v \in \mathbb{C}$ класс Λ_v содержит в точности те функции вида $F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta + 2\zeta^3 v\phi(\zeta)$, для каждой из которых число ε лежит на окружности $\partial\mathbb{D}$, а функция $\phi \in H$ удовлетворяет условию $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Классы Λ_v можно рассматривать как возмущения класса $\Lambda_0 = \Lambda$ из доказательства теоремы 2. По построению это нужинский случай, так как из $P(f) \in \Lambda_v$, $v \in \mathbb{C}$, следует $f''(0) = 0$.

Предложение 3. *Соотношения $\Lambda_v \subset Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$ и $\Lambda_v \subset \mathcal{C}$ имеют место, когда v пробегает замкнутый круг $\overline{\mathbb{D}}$, неулучшаемый для последнего включения.*

Доказательство. Пусть $v \in \overline{\mathbb{D}}$. Тогда для любой функции $F \in \Lambda_v$ справедливы неравенства

$$|F(\zeta)| \le 2|\zeta|(1+|v||\zeta|^2) < 2|\zeta|/(1-|\zeta|^2), \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

Таким образом, $M(F) = \{0\}$, то есть $F \in \mathcal{C}$. А согласно лемме 2 из [6] будет $F \in Fr_{H^\infty}\mathcal{C}$. Невозможность сохранить включение $\Lambda_v \subset \mathcal{C}$, когда v пробегает круг $\overline{\mathbb{D}}_\rho$ с $\rho > 1$, следует из анализа динамики множеств $M(F_v)$, $v > 0$, в следующей ситуации. $\square$

Пример 1. Пусть $F_v(\zeta) = 2\zeta + 2v\zeta^3$, $v > 0$, и функция $f_v \in H_0$ такова, что $P(f_v) = F_v$. При $0 \le v \le 1$ множество $M(F_v)$ содержит единственный элемент – максимум $\zeta = 0$ функции $h_{f_v}(\zeta)$, который становится седлом с ответвлением двух максимумов $\zeta = \pm\sqrt{1-1/v}$ при $v > 1$. При $v = 3+2\sqrt{2}$ в точках $\zeta = \pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ возникают полуседла, распадающиеся затем на седла $\pm i\sqrt{\rho_v^-}$ и максимумы $\pm i\sqrt{\rho_v^+}$, где $\rho_v^\pm = [1+v\pm\sqrt{1-6v+v^2}/(2v)$. Таким образом, $k(F_v) = 1$ для $0 \le v \le 1$, $k(F_v) = 3$, если $1 < v < 3+2\sqrt{2}$, $k(F_v) = 5$ при $v = 3+2\sqrt{2}$ и $k(F_v) = 7$, когда $v > 3+2\sqrt{2}$.

3. Классы С.Н. Кудряшова

Естественным обобщением условий (8) и (9) является следующая конструкция. Введем множество $\Omega = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : |\alpha| < \beta\}$ и для любого $(\alpha,\beta) \in \Omega$ определим $K_{\alpha,\beta}$ – класс всех функций $f \in A$, удовлетворяющих условию

$$|\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) + \alpha| < \beta, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

(см. [1]). Аналогом предложения 2 в данном случае будет следующее

Предложение 4. *Имеют место соотношения*

$$K_{\alpha,\beta} \subset H_0 \bigcap \mathcal{B}_0$$

и

$$K_{\alpha,\beta} \bigcap (\mathcal{G}_0 \bigcup \mathcal{G}_s) = \varnothing.$$

Для любого подкласса $X \subset H$ выделим его нужинскую часть $\widetilde{X} = X \bigcap \{f \in H : f''(0) = 0\}$. Введем обозначения $\Omega_1 = \{(\alpha,\beta) \in \Omega : K_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{G}_1\}$ и $\widetilde{\Omega}_1 = \{(\alpha,\beta) \in \Omega : \widetilde{K}_{\alpha,\beta} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1\}$. Кроме того, ниже понадобится множество $\Omega_1^* = \{(\alpha,\beta) \in \Omega : \beta \le 1/8 + \sqrt{\alpha^2 + 1/64}\}$.

Теорема 3. *Имеет место равенство* $\widetilde{\Omega}_1 = \{(\alpha,\beta) \in \Omega : \beta \le 1 + \sqrt{1+\alpha^2}\}$.

Доказательство. Пусть $(\alpha,\beta) \in \Omega$. Условие $f \in \widetilde{K}_{\alpha,\beta}$ означает, что

$$\zeta \frac{f''}{f'}(\zeta) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \frac{\varphi(\zeta)}{1 + \alpha\varphi(\zeta)/\beta}, \ \zeta \in \mathbb{D}, \tag{19}$$

где $\varphi \in H$ и

$$|\varphi(\zeta)| \le |\zeta|^2, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{20}$$

Из (19), (20) и неравенства $|\alpha| < \beta$ следует, что

$$\left| \zeta \frac{f''}{f'}(\zeta) \right| < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \frac{|\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \tag{21}$$

Поэтому если $\beta \le 1+\sqrt{1+\alpha^2}$, то $(\beta^2-\alpha^2)/\beta \le 2$, и (21) влечет за собой отсутствие равенства в (3) при $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, откуда $f \in \mathcal{G}_1$.

Мы доказали, что если $|\alpha| < \beta \le 1 + \sqrt{1+\alpha^2}$, то $(\alpha,\beta) \in \widetilde{\Omega}_1$. Противоположная импликация обосновывается исследованием уравнения Гахова для функции $f_{\alpha,\beta} \in A$ с условием (19), в котором $\varphi(\zeta) = \zeta^2$. Конформный радиус $h_{f_{\alpha,\beta}}$ имеет единственную критическую точку (максимум) в $\zeta = 0$ при $|\alpha| < \beta \le 1 + \sqrt{1+\alpha^2}$ и три критические точки – седло в $\zeta = 0$ и два максимума в точках $\zeta = \pm\sqrt{(\beta^2 - 2\beta - \alpha^2)/(\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha)}$ при $\beta > 1 + \sqrt{1+\alpha^2}$.

Теорема 3 доказана. □

При $\alpha = -2$ и $\beta = c$ теорема 3 приобретает следующий вид.

Следствие 4. *Если функция* $f \in \widetilde{A}$ *удовлетворяет условию* (9) *при* $2 < c \le 1 + \sqrt{5}$, *то* $f \in \mathcal{G}_1$. *Приведенные ограничения на параметр* c *неулучшаемы.*

Из финальной части доказательства теоремы 3 извлекается еще одно представление множества $\widetilde{\Omega}_1$ – с помощью функции $f_{\alpha,\beta}$:

Следствие 5. *Имеет место равенство* $\widetilde{\Omega}_1 = \{(\alpha,\beta) \in \Omega : f_{\alpha,\beta} \in \widetilde{\mathcal{G}}_1\}$.

Переходя к описанию множества Ω_1, отметим, что аналога следствия 5 оно не допускает.

Действительно, пусть функция $f = g_{\alpha,\beta} \in A$ есть решение дифференциального уравнения (19), где $\varphi(\zeta) = \zeta$. Исследование множеств M_f в данном случае можно свести к изучению динамики корней уравнения Гахова над лучом Хорнича, испускаемым функцией (18). В результате приходим к заключению

$$\{(\alpha,\beta) \in \Omega : g_{\alpha,\beta} \in \widetilde{\mathcal{G}}_1\} = \Omega.$$

Вариант описания множества Ω_1 доставляет следующее

Предложение 5. *Справедливы включения* $\Omega_1^* \bigcup(\{0\} \times [0,2]) \subset \Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}_1$.

Доказательство. Включение $\{0\} \times [0,2] \subset \Omega_1$ следует из теоремы 1, соотношение $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}_1$ – из определений. Остается доказать, что $\Omega_1^* \subset \Omega_1$.

Пусть $(\alpha, \beta) \in \Omega_1^*$ и $f \in K_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le 2((\beta^2 - \alpha^2)/\beta)/(1 - |\zeta|^2), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{22}$$

С другой стороны, из $(\alpha, \beta) \in \Omega_1^*$ следует $2((\beta^2 - \alpha^2)/\beta) \le 1/2$, так что (22) дает неравенство $|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le (1/2)/(1 - |\zeta|^2)$, $\zeta \in \mathbb{D}$. В силу результатов [7] отсюда имеем $f \in \mathcal{G}_1$. Это и доказывает, что $(\alpha, \beta) \in \Omega_1$. □

В заключение вернемся к [1] и приведем теорему единственности еще для одного двупараметрического семейства классов С.Н. Кудряшова. Обозначим $s(\zeta) = (1/2)\ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$, $\mathcal{S} = \{\bar{\varepsilon}s(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}$ – семейство вращений функции s.

Теорема 4. *Пусть* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ *и функция* $f \in \widetilde{H}_0 \setminus \mathcal{S}$ *удовлетворяет условию*

$$\left| \zeta \frac{f''}{f'}(\zeta) \middle/ \left[\frac{f''}{f'}(\zeta) + \alpha \right] \right| < \beta, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{23}$$

Тогда $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ *при выполнении неулучшаемой оценки* $|\alpha\beta| \le 2$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

Литература

1. *Кудряшов С.Н.* О некоторых признаках однолистности аналитических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13, № 3. – С. 359–366.
2. *Кудряшов С.Н.* О числе решений внешних обратных краевых задач // Изв. вузов. Матем. – 1969. – № 8. – С. 30–32.
3. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2012. – 64 с.
4. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1965. – 333 с.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. *Казанцев А.В.* Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65–82.
7. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.
8. *Kazantsev A.V.* Conformal radius: At the interface of traditions // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38, No 3. – P. 469–475. – doi: 10.1134/S1995080217030167.
9. *Miller S.S., Mocanu P.T.* On some classes of first-order differential subordinations // Mich. Math. J. – 1985. – V. 32, No 2. – P. 185–195. – doi: 10.1307/mmj/1029003185.

10. *Kazantsev A.V.* Width of the Gakhov class over the Dirichlet space is equal to 2 // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37, No 4. – P. 449–454. – doi: 10.1134/S1995080216040120.

Поступила в редакцию
16.01.19

Казанцев Андрей Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *avkazantsev63@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 526–535

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.526-535

Root Uniqueness of the Gakhov Equation in the Classes of Functions with the Bounded Pre-Schwarzian

A.V. Kazantsev

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *avkazantsev63@gmail.com*

Received January 16, 2019

Abstract

It was established that if the left-hand side of the Gakhov equation is bounded by the constant 2, then this equation has exactly one root in the unit disk, where the constant is sharp and the root is not necessarily zero. We revealed two aspects arising with regard to this connection. The first aspect concerns the pre-Schwarzian immersion of the Gakhov class into the space of bounded holomorphic functions. It was shown that the width of this immersion is equal to 2; the full description was done for the intersection of the boundary of the immersion with the ball of the radius 2 centered at the origin. The second aspect is connected with maintenance of the uniqueness of the root when the linear or fractional linear actions on the pre-Schwarzian with multiplying by the unit disk variable are bounded. Some uniqueness conditions were constructed in the form of S.N. Kudryashov's univalence criteria.

Keywords: Gakhov equation, conformal radius, pre-Schwarzian

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan (project no. 18-41-160017).

References

1. Kudryashov S.N. On some criteria for the univalence of analytic functions. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 219–223. doi: 10.1007/BF01155659.

2. Kudryashov S.N. The number of solutions of exterior inverse boundary value problems. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1969, no. 8, pp. 30–32. (In Russian)

3. Kazantsev A.V. *Chetyre etyuda na temu F.D. Gakhova* [Four Etudes on a Theme of F.D. Gakhov]. Yoshkar-Ola, Marii. Gos. Univ., 2012. 64 p. (In Russian)

4. Tumashev G.G., Nuzhin M.T. *Obratnye kraevye zadachi i ikh prilozheniya* [Inverse Boundary Value Problems and Their Applications]. Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1965. 333 p. (In Russian)

5. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)

6. Kazantsev A.V. Gakhov set in the Hornich space under the Bloch restriction on pre-Schwarzians. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2013, vol. 155, no. 2, pp. 65–82. (In Russian)

7. Aksent'ev L.A., Kazantsev A.V. A new property of the Nehari class and its application. *Tr. Semin. Kraev. Zadacham.* Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1990, no. 25, pp. 33–51. (In Russian)

8. Kazantsev A.V. Conformal radius: At the interface of traditions. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 469–475. doi: 10.1134/S1995080217030167.

9. Miller S.S., Mocanu P.T. On some classes of first-order differential subordinations. *Mich. Math. J.*, 1985, vol. 32, no. 2, pp. 185–195. doi: 10.1307/mmj/1029003185.

10. Kazantsev A.V. Width of the Gakhov class over the Dirichlet space is equal to 2. *Lobachevskii J. Math.*, 2016, vol. 37, no. 4, pp. 449–454. doi: 10.1134/S1995080216040120.

⟨ ***Для цитирования***: *Казанцев А.В.* Единственность корня уравнения Гахова в классах функций с ограниченным предшварцианом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 526–535. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.526-535. ⟩

⟨ ***For citation***: Kazantsev A.V. Root uniqueness of the Gakhov equation in the classes of functions with the bounded pre-Schwarzian. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 526–535. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.526-535. (In Russian) ⟩