ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 23 ноября 2022 г.

Аннотация: *Нижние полурешетки отделимых конгруэнций нумерованных алгебр.*

1.Мотивационные факторы и объекты исследования

Рассматриваются универсальные алгебры эффективных сигнатур. Понятие вычислимо отделимой алгебры, естественное само по себе, оказалось полезным для решения ряда задач как в теории вычислимых моделей, так и в теоретической информатике. Так, в предыдущих лекциях мы уже отмечали, что А.И. Мальцевым было показано, что всякая позитивная нумерация конечно порожденной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, является разрешимой, что поставило вопрос о справедливости данного утверждения в общем случае (без условия конечной порожденности). Оказалось, что имеются контрпримеры, причем именно в классе вычислимо отделимых алгебр. Более того, мы доказали, что всякая всякая позитивная нумерация алгебры со счетной (в частности, нетеровой) решеткой конгруэнций является вычислимо отделимой. Другой пример – проблема Бергстры-Такера в теории абстрактных типов данных о существовании инициального в конечно-базируемом многообразии обогащения для любой конечно порожденной позитивной алгебры.

Отрицательное решение этой проблемы было получено предъявлением соответствующего примера конечно порожденной алгебры, имеющей вычислимо отделимую позитивную нумерацию с иммунной характеристической трансверсалью.

Особое место среди вычислимо отделимых алгебр занимают негативные алгебры, т.к. нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами. Заметим, что вычислимая отделимость нумерации позволяет вводить полезные топологии, базу которых образуют вычислимые подмножества нумерованных алгебр. Эти пространства, как мы показали, являются T_4-пространствами и все операции нумерованных алгебр непрерывны относительно как вычислимо порожденной, так и перечислимо порожденной топологии.

1. Мотивационные факторы и объекты исследования

Важнейшим подклассом класса вычислимо отделимых алгебр является класс равномерно вычислимо отделимых алгебр, для объектов которого существуют алгоритмы, позволяющие эффективно порождать характеристические индексы отделяющих множеств. Достаточно сказать, что контрпример к упомянутой выше проблеме А.И. Мальцева является равномерно вычислимо отделимой алгеброй, а контрпример к проблеме Бергстры-Такера можно усилить, выбрав такую равномерно вычислимо отделимую позитивную алгебру, никакое обогащение которой не является свободной системой ни в каком классе систем, конечно аксиоматизируемом универсальными предложениями специального, но весьма общего вида.

1. Мотивационные факторы и объекты исследования

Ю.Л. Ершовым в ТН было введено наиболее общее понятие отделимой нумерации, которое, в случает нумераций универсальных алгебр, можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной развивающейся системы, интенсионально заданной семейством вычислимых функций вместе с соответствующими ядрами гомоморфизмов и допускающей эффективное распознавание различия составляющих ее элементов путем отделения их соответствующими алгоритмически определяемыми окрестностями.

Этот факт подтверждает важность отделимых нумераций алгебр, среди которых фундаментальную роль играют эффективно отделимые алгебры, т.к. нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимо нумерованными алгебрами.

1. Мотивационные факторы и объекты исследования

Подчеркнем, что эффективно отделимые алгебры (в отличие от негативных, являющихся в точности Π_1^0-алгебрами) не имеют удовлетворительного описания в терминах арифметической иерархии, хотя они лежат в классе Π_2^0, но не содержатся в Δ_2^0 и существует Δ_2^0-алгебра вне класса эффективно отделимо нумерованных алгебр. Отметим, что всякая вычислимо отделимо нумерованная алгебра с естественными условиями конечности (подпрямая неразложимость, артиновость решетки конгруэнций и т.д.) лежит в классе Π_1^0, т.е. является негативной. С другой стороны, всякая отделимая алгебра с аналогичными условиями конечности является эффективно отделимой, т.е. лежит в классе Π_2^0. Ответ на принципиальный вопрос о существовании в $\Pi_2^0 \setminus \Pi_1^0$ алгебр с естественными условиями конечности был получен в работе [1], в которой построен пример эффективно отделимо нумерованной подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, лежащей в $\Pi_2^0 \setminus \Pi_1^0$.

[1]Н.Х. Касымов, А.С. Морозов, И.А. Ходжамуратова, О нижних полурешетках отделимых конгруэнций нумерованных алгебр, Алгебра и логика, 2021, 60, No. 4, 400–424.

Далее, для краткости, негативно (эффективно отделимо, равномерно вычислимо отделимо, вычислимо отделимо, отделимо) нумерованные алгебры будем называть негативными (эффективно отделимыми, равномерно вычислимо отделимыми, вычислимо отделимыми, отделимыми), без прилагательного "нумерованные".
Объектами исследования настоящей лекции являются равномерно вычислимо отделимые, вычислимо отделимые и отделимые конгруэнции нумерованных универсальных алгебр, а также их важнейшие частные случаи из классов Π^0_1 (негативные) и Π^0_2 (эффективно отделимые) конгруэнции. Из теорем о негативной (эффективно отделимой) аппроксимируемости вычислимо отделимых (отделимых) алгебр непосредственно следует, что конгруэнция нумерованной алгебры вычислимо отделима (отделима) тогда и только тогда, когда для любой пары различных ее элементов найдется вычислимая (вычислимо перечислимая) окрестность одного из этих элементов, не содержащая второй.

Хотя мы рассматриваем семейства вычислимо отделимых и отделимых конгруэнций нумерованных универсальных алгебр, уместно отметить, что эти эффекты ярко проявляют себя и в случае моделей, в частности – линейных порядков. Так, всякая негативная нумерация линейного порядка типа рациональных чисел с естественным упорядочением продуктивна относительно множества вычислимых дедекиндовых сечени. В то же время существует такое позитивное представление этого порядка, для которого вообще нет вычислимых сечений. Отметим также тот очевидный факт, что для любого вычислимого автоморфизма позитивного линейного порядка обратный к нему автоморфизм также вычислим. В то же время существует негативный линейный порядок, некоторый вычислимый автоморфизм которого вычислимо необратим.

1. Мотивационные факторы и объекты исследования

Общеизвестно, что для эффективно заданного семейства конгруэнций процедура построения некоторой их верхней грани вполне прозрачна. Однако процесс "расщепления" конгруэнций не является удовлетворительным ни с алгоритмической, ни с алгебраической точек зрения. Оказалось, что именно равномерно вычислимо отделимые алгебры предоставляют возможность эффективного расщепления конгруэнций при некоторых дополнительных условиях, что еще раз подчеркивает важность равномерности.

Касательно принципиальных различий между негативными и позитивными нумерациями, которые сохраняются при релятивизации относительно арифметических представлений, отметим следующее. Любая негативная эквивалентность является нумерационной для подходящей конечно порожденной когруэнц-простой универсальной алгебры. Для позитивных эевивалентностей ничего подобного не имеет места, что означает более богатые реализационные возможности негативных нумераций относительно позитивных.

Исходя из сказанного, в настоящей лекции рассматриваются позитивные, негативные и эффективно отделимые конгруэнции нумерованных алгебр, а также вычислимо отделимые и отделимые конгруэнции, которые являются "менее алгоритмичными" объектами, но вполне эффективно характеризуются через их негативные (соответственно эффективно отделимые) аппроксимирующие конгруэнтные расширения. Особое внимание уделяется равномерно вычислимо отделимым конгруэнциям.

Напомним, что эквивалентность η на ω называется отделимой (эффективно отделимой), если существует T_0-отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств пространства ω/η (вычислимое T_0-отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств пространства ω/η). Ю.Л. Ершовым в ТН было введено наиболее общее понятие отделимой нумерации множества (т.е. такой нумерации, ядро которого T_0-отделимо в перечислимой топологии) и дана следующая характеризация ядер вычислимых нумераций семейств вычислимо перечислимых множеств:

Теорема о вычислимых нумерациях (Ю.Л.Ершов

Отношение эквивалентности η на ω является ядром вычислимой нумерации подходящего семейства вычислимо перечислимых множеств тогда и только тогда, когда η эффективно отделима.

Применение этой теоремы к алгебрам с учетом некоторых специальных алгебраических фактов дает следующий результат:

Теорема об отделимости

Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.

Таким образом, в структурной теории отделимых алгебр роль и место эффективно отделимых подобны роли и месту негативных – в теории вычислимо отделимых алгебр.

Определение 1.1

Конгруэнция θ нумерованной алгебры (A, ν) называется позитивной (негативной), если ее ядро является вычислимо перечислимым множеством (если ее ядро является коперечислимым).

Определение 1.2

Конгруэнция θ нумерованной алгебры (A, ν) называется равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция $\lambda z.f(x, y, z)$ такая, что для всех $x \neq y \pmod{ker(\theta)}$ функция $\lambda z.f(x, y, z)$ является характеристической для некоторого $ker(\theta)$-замкнутого множества, отделяющего x от y.

Неформально, эквивалентность η на ω равномерно вычислимо отделима, если существует единообразная эффективная процедура, которая для каждой пары различных по модулю η натуральных чисел "выдает" алгоритм разрешения η-замкнутого вычислимого множества, отделяющего эти числа.

Замечание 1.1

Несмотря на наличие некоторой внешней аналогии в определении понятий равномерно вычислимо отделимой и эффективно отделимой нумерации алгебры, эти понятия совершенно различны. Для равномерно вычислимо отделимых нумераций вообще говоря ни о какой эффективной отделимости не может быть и речи, т.к. в любой m-степени есть равномерно вычислимо отделимая нумерация, а эффективно отделимые лежат в Π^0_2. С другой стороны, имеются эффективно отделимые нумерации, не являющиеся равномерно вычислимо отделимыми (даже вычислимо отделимыми; простейший пример – связное двоеточие, когда вычислимо перечислимое невычислимое $\alpha \subseteq \omega$ нумерует один элемент двухэлементного множества, а $\omega \setminus \alpha$ – другой).

Предложение 2.1

Множество позитивных конгруэнций любой нумерованной алгебры является решеткой.

Доказательство. Пусть θ_0, θ_1 – две позитивные конгруэнции. Очевидно, что $\inf(\theta_0, \theta_1) = \theta_0 \cap \theta_1$ и

$$\nu x = \nu y \pmod{\theta_0 \cap \theta_1} \Leftrightarrow (x = y \pmod{\theta_0}) \wedge (x = y \pmod{\theta_1}).$$

При этом, правая часть эквивалентности вычислимо перечислима. Пусть $\overline{\Theta}$ – произвольное подмножество множества всех конгруэнций алгебры A и $\overline{\theta} = \sup(\bigcup_{\theta \in \overline{\Theta}} \theta)$ их точная верхняя грань. Определим бинарное отношение $\theta^* \subseteq A \times A$ как множество упорядоченных пар элементов, удовлетворяющих следующему соотношению:

$$a = b \pmod{\overline{\theta}} \Leftrightarrow \exists n \geqslant 2 \exists d_1, \ldots, d_{2n} \in A \exists \theta_1, \ldots, \theta_n \in \overline{\Theta}$$

$$\exists t_1, \ldots, t_n \in T(A) : a = t_1(d_1) \wedge$$

$$\wedge [\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} (d_{2i-1} = d_{2i} \pmod{\theta_i})] \wedge$$

$$\wedge [\bigwedge_{2 \leqslant i \leqslant n-1} (t_i(d_{2i-2}) = t_{i+1}(d_{2i-1}))] \wedge t_n(d_{2n}) = b,$$

где $T(A)$ – множество всех трансляций алгебры A, включающее тождественную трансляцию.

Лемма 2.1

$\theta^* = \overline{\theta}$.

Доказательство. Очевидно, что θ^* – эквивалентность (случай, когда все трансляции t_i, t_{i+1} тождественные). "Склейка" значений трансляций на эквивалентных элементах обеспечивает согласованность трансляций (а значит и всех операций) с эквивалентностью θ^*, т.е. $\overline{x} = \overline{y} \pmod{\theta^*} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \pmod{\theta^*}$ для каждой вычислимой операции f, представляющей соответствующую операцию алгебры A в нумерации ν. *Лемма доказана.*

Пусть $\theta = \sup(\theta_0, \theta_1)$ – точная верхняя грань конгруэнций θ_0, θ_1. По лемме 2.1 верхняя грань для $\theta_0\nu, \theta_1\nu$ определяется вычислимыми отношениями R_0, R_1 так, что $\theta_0 = \exists \overline{z} R_0(x, y, \overline{z})$ и $\theta_1 = \exists \overline{z} R_1(x, y, \overline{z})$, которые участвуют в определении равенства по модулям θ_0, θ_1. По определению множество $\{\langle x, y\rangle | \theta_i\nu(x) = \theta_i\nu(y); i \in \{0, 1\}\}$ (где под θ_i понимается как конгруэнция, так и естественное вложение элемента в содержащий его класс θ_i-эквивалентности) вычислимо перечислимо. Каждое из θ_0, θ_1 в определении конгруэнции θ^* подтверждается формулой $\exists \overline{z} R_i(x, y, \overline{z}); i \in \{0, 1\}$. Поэтому $\sup(\theta_0, \theta_1) = \theta_0 \vee \theta_1 \in \Sigma^0_1$. *Предложение доказано.*

2. Решетки позитивных конгруэнций

Определение 2.1

Семейство позитивных конгруэнций $\Theta \subseteq L_P(A,\nu)$ *нумерованной алгебры* (A,ν) *называется вычислимым, если существует такая нумерация* μ *этого семейства, что множество* $\{\langle n,x,y\rangle | \nu(x)=\nu(y) \pmod{\mu(n)},\ \mu(n)\in\Theta\}$ *вычислимо перечислимо.*

Определение 2.2

Нижняя (верхняя) подполурешетка L *нижней (верхней) полурешетки конгруэнций* $\Theta(A)$ *нумерованной алгебры* (A,ν) *называется вычислимо полной, если всякое вычислимое множество ее элементов имеет точную нижнюю (верхнюю) грань в* L*.*

Предложение 2.2

Верхняя полурешетка $L_P(A,\nu)$ *позитивных конгруэнций любой нумерованной алгебры* (A,ν) *является вычислимо полной.*

Доказательство. Пусть $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots\}$ – вычислимое семейство позитивных конгруэнций и θ – точная верхняя грань для этого семейства. В силу алгебраичности оператора конгруэнтного замыкания

$$\nu x = \nu y \pmod{\theta} \Leftrightarrow \exists n \in \omega \exists x_1, \dots, x_n (\nu x = \nu x_1 \Theta \nu x_2 \Theta \dots \Theta \nu x_n = \nu y),$$

где $\nu x_i \Theta \nu x_{i+1}$ означает, что x_i, x_{i+1} конгруэнтны в силу подходящей конгруэнции из Θ, но правая часть этой равносильности вычислимо перечислима (отметим, что конгруэнции, в отличие от эквивалентностей, подразумевают не просто транзитивные "склейки" элементов, но и отождествление значений операций на эквивалентных наборах, что явно не указано в определении данного выше оператора конгруэнтного замыкания для упрощения обозначений; см. лемму 2.1). *Предложение доказано.*

Предложение 2.3

Существует вычислимое семейство разрешимых эквивалентностей, точная нижняя грань которых негативна, но не позитивна.

Доказательство. Пусть α – коперечислимое невычислимое множество и f – вычислимая функция, перечисляющая без повторений дополнение α. Каждому $n \in \omega$ сопоставим эквивалентность $\{\langle x, y\rangle | x, y \in \omega \setminus \{f(n)\}\} \cup \{\langle f(n), f(n)\rangle\}$. Тогда нумерация ν семейства $\{ E_0, E_1, \ldots, \}$ заданная так: $\nu(n) = \{E_n | n \in \omega\}$ определяет вычислимую по перечислимым (даже по характеристическим) индексам нумерацию семейства разрешимых эквивалентностей $E_0, E_1, \ldots,$ где каждое E_n – эквивалентность ровно с двумя классами, один из которых одноэлементен – $\{f(n)\}$, а второй – $\omega \setminus \{f(n)\}$.

Более формально:

$$\langle x, y\rangle \in \nu(n) \Leftrightarrow [(x = y) \vee (x \neq f(n) \wedge y \neq f(n))].$$

Очевидно, что точная нижняя грань семейства $E_0, E_1, \ldots$ есть эквивалентность $\{\langle x, y\rangle | x, y \in \alpha\} \cup id\ \omega$, которая негативна, не не позитивна. *Предложение доказано.*

Следствие 2.1

Существует нумерованная алгебра, нижняя полурешетка позитивных конгруэнций которой не является вычислимо полной.

Определение 3.1

Семейство негативных конгруэнций $\Theta \subseteq L_N(A,\nu)$ *нумерованной алгебры* (A,ν) *называется вычислимым, если существует такая нумерация* μ *этого семейства, что множество* $\{\langle n,x,y\rangle | \nu(x) \neq \nu(y) \pmod{\mu(n)},\ \mu(n) \in \Theta\}$ *вычислимо перечислимо.*

Предложение 3.1

Пересечение всех конгруэнций из любого вычислимого семейства негативных конгруэнций является Π^0_1*-конгруэнцией, причем индекс этого пересечения строится равномерно эффективно по заданному алгоритму перечисления номеров вычислимого семейства.*

Доказательство. Пусть $\Theta = \langle \theta_0, \theta_1, \ldots \rangle$ – вычислимое семейство Π^0_1-конгруэнций нумерованной алгебры (A,ν) (точнее, ядер этих конгруэнций в нумерации ν).

Очевидно, что

$$\langle \nu(x), \nu(y) \rangle \notin \bigcap_{n \in \omega} \theta_n \Leftrightarrow \exists m \in \omega[\nu(x) \neq \nu(y) \pmod{\theta_m}]$$

Отношение в квадратных скобках этой равносильности вычислимо перечислимо. Поэтому навешивание квантора существования на номер члена последовательности не выводит принадлежность дополнения пересечений за пределы класса вычислимо перечислимых множеств. Равномерность конструкции очевидна. *Предложение доказано.*

Следствие 3.1

Нижняя полурешетка негативных конгруэнций любой нумерованной алгебры является вычислимо полной.

Следствие 3.2

Множество негативных конгруэнций любой нумерованной алгебры является нижней полурешеткой.

Вытекает из вычислимости двухэлементного семейства негативных конгруэнций.
Покажем, что множество негативных конгруэнций вообще говоря не только не является верхней полурешеткой, но даже не замкнуто относительно вычислимо отделимых конгруэнций при взятии верхних граней, что вытекает из следующего весьма общего результата.

Теорема 3.1

Для любой позитивной эквивалентности E на ω, все классы которой бесконечны, существуют вычислимые эквивалентности E_0 и E_1 со свойствами:

1. $E = E_0 \vee E_1$;
2. *все классы эквивалентности у E_0 и E_1 двухэлементны.*

Доказательство. Мы будем строить эквивалентности E_0 и E_1 с помощью эффективной пошаговой конструкции. В конце каждого шага t будут определены конечные эквивалентности E_0^t и E_1^t, все классы которых двухэлементны, образующие возрастающие последовательности

$$E_i^0 \subseteq E_i^1 \subseteq E_i^2 \subseteq \cdots, \quad i = 0, 1.$$

Мы получим требуемые эквивалентности E_0 и E_1 как объединения этих цепочек:

$$E_i \quad = \quad \bigcup_{t<\omega} E_i^t, \quad i = 0, 1. \tag{1}$$

Заметим, что ограничения на эквивалентности E_0 и E_1 и эффективность конструкции уже будут гарантировать нам их вычислимость. Действительно, чтобы узнать, эквивалентны ли элементы x и y относительно E_i, нужно проследить построение и дождаться такого t, что оба эти элемента будут принадлежать области определения отношения E_i^t.

Из свойств E_i и E_i^t следует, что $\langle x, y\rangle \in E_i \Leftrightarrow \exists t(\langle x, y\rangle \in E_i^t)$.
Последовательность элементов $a_0, b_0, a_1, \ldots, b_{k-1}, a_k$ будем называть *цепочкой на шаге* t, если

1. все элементы этой последовательности попарно различны;
2. её элементы связаны соотношениями $a_0\ E_0^t\ b_0\ E_1^t\ a_1 \cdots b_{k-1}\ E_1^t\ a_k$ (здесь E_0^t и E_1^t чередуются);
3. не существует $b \notin \{a_0, b_0, a_1, \ldots, b_{k-1}, a_k\}$ такого, что $b\, E_1\, a_0$ или $a_k\ E_0^t\ b$ (т.е. в некотором смысле эту последовательность уже невозможно расширить с сохранением первых двух условий).

Назовём a_0 началом этой цепочки, а a_k — её концом.
Очевидно, что все элементы из такой цепочки будут эквивалентны относительно $E_0^t \vee E_1^t$.
В ходе построения мы будем создавать такие цепочки, по мере надобности соединять их в другие цепочки между собой, получая при этом новые цепочки причём так, чтобы каждый класс эквивалентности E в итоге оказался бы объединением элементов некоторой возрастающей последовательности цепочек.

При этом будет всегда выполнено условие $E_0^t \vee E_1^t \subseteq E$.
Опишем построение.

Шаг 0. Полагаем $E_0^0 = E_1^0 = \varnothing$. Начинаем перечисление эквивалентности E, сделав 0 шагов в её перечислении. Считаем, что в конце шага 0 множество всех перечисленных элементов этой эквивалентности пусто.

Шаг $t+1$. Состоит из трёх подшагов:

Подшаг 1 (Расширение цепочек).
Для каждой из имеющихся на данный момент цепочек

$$a_0 \; E_0^t \; b_0 \; E_1^t \; a_1 \cdots b_{k-1} \; E_1^t \; a_k$$

проделываем следующее:

Продолжаем перечисление эквивалентности E до тех пор, пока не встретятся попарно различные элементы a_{-1}, b_{-1}, b_k, a_{k-1}, E–эквивалентные элементам данной цепочки, отличные от всех элементов из областей определения конечных частей эквивалентностей E_0 и E_1, определённых к данному моменту времени (они, вообще говоря, могут оказаться больше, чем E_0^t и E_1^t за счёт уже проведённого удлинения других цепочек на данном подшаге). Существование таких элементов следует из бесконечности классов эквивалентности E. Последовательно выберем наименьший возможный элемент a_{-1}, для него наименьший возможный элемент b_{-1} и т.д. Добавим в E_0 классы эквивалентности $\{a_{-1}, b_{-1}\}$ и $\{a_k, b_k\}$, а в E_1 — классы $\{b_{-1}, a_0\}$ и $\{b_k, a_{k+1}\}$, удлиняя тем самым нашу цепочку справа и слева до цепочки

$$\underline{a_{-1}\ E_0^t\ b_{-1}\ E_1^t}\ a_0\ E_0^t\ b_0\ E_1^t\ a_1 \cdots b_{k-1}\ E_1^t\ a_k\ \underline{E_0^t\ b_k\ E_1^t\ a_{k+1}}.$$

(Здесь подчеркнуты добавленные элементы.)

Подшаг 2 (Формирование новых цепочек).
Продолжим перечисление эквивалентности E до тех пор, пока не появятся три попарно различных E–эквивалентных между собой элементов a, b, c, отличных от всех элементов из областей определения конечных частей эквивалентностей E_0 и E_1, определённых к данному моменту времени. Добавим в E_0 классы эквивалентности $\{a, b\}$, а в E_1 — классы $\{b, c\}$.

Подшаг 3 (Склейка цепочек).
Сделаем ещё один шаг в перечислении E. Если на данный момент времени уже имеются элементы a и b, принадлежащие различным цепочкам, эквивалентные между собой относительно уже перечисленной части эквивалентности E то выберем такие элементы с наименьшим номером пары $\langle a, b\rangle$. Пусть a принадлежит цепочке C_0, а b — цепочке C_1. Перечисляем далее эквивалентность E до появления элемента c такого, что aEc и bEc, не принадлежащего ни области определения конечной части отношения E_0 ни области определения конечной части отношения E_1, определённых к настоящему моменту.

Пусть a' — конец цепочки C_0, а b' — начало цепочки C_1. Добавим к эквивалентности E_0 класс $\{a', c\}$, а к эквивалентности E_1 — класс $\{c, b'\}$. Тем самым цепочки C_0 и C_1 соединятся в одну цепочку через промежуточный элемент c.

Описание шага $t+1$, а вместе с тем и построения, закончено.

Определим E_0 и E_1 как указано выше.

Лемма 3.1

Любой элемент из ω в конце концов попадёт в одну из цепочек.

Доказательство. Предположим противное, и пусть m — минимальный элемент, который в процессе построения не попал ни в одну из цепочек. Из построения следует, что тогда он не E–эквивалентен ни одному элементу, попавшему в какую–либо из цепочек. Поскольку класс эквивалентности этого элемента бесконечен, он в конце концов войдёт в цепочку, которую мы построим на одном из подшагов типа 2. Противоречие. *Лемма доказана.*

Отсюда непосредственно следует

Лемма 3.2

$dom(E_0) = dom(E_1) = \omega$.

Следующие две леммы очевидны.

Лемма 3.3

Все классы эквивалентностей E_0 и E_1 двухэлементны.

Лемма 3.4

$E_0 \vee E_1 \subseteq E$.

Лемма 3.5

Каждый класс эквивалентности E есть объединение элементов подходящей возрастающей последовательности цепочек. Следовательно $E \subseteq E_0 \vee E_1$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Из леммы 3.4 видно, что каждый класс эквивалентности E есть объединение нескольких объединений элементов возрастающих последовательностей цепочек. Тогда существуют E-эквивалентные элементы a и b, принадлежащие разным таким объединениям. Выберем такую пару элементов a и b с наименьшим номером. Согласно лемме 3.1, они появятся на некотором шаге построения. но в разных цепочках. Из описания построения следует, что на некотором дальнейшем шаге упомянутые цепочки будут объединены, и элементы a и b в итоге попадут в одну и ту же цепочку. Противоречие. *Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.*

3. Нижние полурешетки негативных конгруэнций

Следствие 3.3

Существует нумерованная алгебра и две ее вычислимые конгруэнции, точная верхняя грань которых не является негативной.

Доказательство. В качестве эквивалентности E из теоремы 3.1 возьмем любую невычислимую позитивную эквивалентность с бесконечными смежными классами. *Следствие доказано.*

Следствие 3.4

Существует нумерованная алгебра, множество негативных конгруэнций которой не является верхней полурешеткой.

Следствие 3.5

Существует вычислимая алгебра и две ее вычислимые конгруэнции, единственной верхней гранью которых в множестве негативных конгруэнций является единичная.

Доказательство. В самом деле, если точная верхняя грань двух вычислимых конгруэнций совершенна (совершенную эквивалентность см. у Ю.Л.Ершова в ТН), то любая их верхняя грань является фактор-алгеброй совершенной алгебры, т.е. не имеет нетривиальных вычислимых подмножеств. *Следствие доказано.*

Следствие 3.6

Существует нумерованная алгебра, множество равномерно вычислимо отделимых конгруэнций которой не является верхней полурешеткой.

Действительно, по теореме 3.1 любая совершенная эквивалентность, которая вообще не имеет нетривиальных вычислимых подмножеств, является точной верхней гранью двух негативных (а значит и равномерно вычислимо отделимых) эквивалентностей.

Следствие 3.7

Существует нумерованная алгебра, множество вычислимых конгруэнций которой не является верхней полурешеткой.

Следующее предложение показывает, что результат теоремы 3.1 не допускает обобщения на эквивалентности с конечными классами.

Предложение 3.2

Существует вычислимо перечислимая эквивалентность, не являющаяся точной верхней гранью никакого конечного множества вычислимых эквивалентностей.

Доказательство. Пусть α — произвольное подмножество ω. Определим по нему эквивалентность η^α как

$$\eta^\alpha = \{\langle 2n, 2n+1\rangle, \langle 2n+1, 2n\rangle \mid n \in \alpha\} \cup id\ \omega.$$

Ясно, что эквивалентность η^β вычислима тогда и только тогда, когда вычислимо само множество β. Очевидно, что любая эквивалентность η, меньшая либо равная η^α, получается "расклейкой" некоторых элементов вида $2n$, $2n+1$, $n \in \alpha$, т.е. она имеет вид

$$\eta^\beta = \{\langle 2n, 2n+1\rangle, \langle 2n+1, 2n\rangle \mid n \in \beta\} \cup id\ \omega,$$

для подходящего $\beta \subseteq \alpha$.

Нетрудно видеть, что $\sup\{\eta^{\beta_1}, \eta^{\beta_2}, \ldots, \eta^{\beta^k}\} = \eta^{\beta_1 \cup \ldots \cup \beta_k}$. Возьмём произвольное вычислимо перечислимое невычислимое множество α. Предположим, что η^α есть точная верхняя грань конечного множества вычислимых эквивалентностей. Тогда выполнено некоторое равенство вида

$$\eta^\alpha = \sup\{\eta^{\beta_1}, \eta^{\beta_2}, \ldots, \eta^{\beta_k}\},$$

где все β_i, $i = 1, \ldots, k$ вычислимы. Отсюда получим равенство $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_k = \alpha$, т.е. получается, что α вычислимо. Противоречие. *Преложение доказано.*

Замечание 3.1

Для любого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^α является равномерно вычислимо отделимой.

4. Нижние полурешетки вычислимо отделимых и отделимых конгруэнций

Покажем, что как вычислимо отделимые, так и отделимые конгруэнции нумерованных алгебр образуют нижние полурешетки.

Предложение 4.1

Множество вычислимо отделимых конгруэнций любой нумерованной алгебры является нижней полурешеткой.

Доказательство. Пусть (A, ν) – нумерованная алгебра и $\theta_0, \theta_1 \in L_C(A, \nu)$, т.е. конгруэнции θ_0, θ_1 – вычислимо отделимые конгруэнции алгебры A в нумерации ν. Обозначим $\eta_0 = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y \pmod{\theta_0}\}, \eta_1 = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y \pmod{\theta_1}\}, \eta = \eta_0 \cap \eta_1$. Тогда, очевидно, $\eta = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y \pmod{\theta_0 \cap \theta_1}\}$ и всякое $\eta_0(\eta_1)$-замкнутое множество является также и η-замкнутым, т.к. $\eta \subseteq \eta_0 \wedge \eta \subseteq \eta_1$ (в самом деле, если α является η_i-замкнутым, $i \in \{0, 1\}$ и $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta}$, то из условия $\eta \subseteq \eta_i$ имеем $y \in \alpha$).

Поэтому, если $\nu x \neq \nu y \pmod{\theta_0 \cap \theta_1}$, то $\nu x \neq \nu y \pmod{\theta_0}$ либо $\nu x \neq \nu y \pmod{\theta_1}$ и то η_0-замкнутое (η_1-замкнутое) вычислимое множество, которое отделяло νx от νy будет отделяющим и в пересечении. *Предложение доказано.*

Предложение 4.2

Множество отделимых конгруэнций любой нумерованной алгебры является нижней полурешеткой.

Доказательство аналогично предыдущему предложению.

Предложение 4.3

Существуют две вычислимо отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является отделимой.

Доказательство. Пусть α, β – пара непересекающихся неперечислимых множеств, объединение которых есть ω. Определим, как и выше, $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega, \eta_\beta = \beta^2 \cup id\ \omega$. Тогда как η_α, так и η_β вычислимо отделима. Однако, очевидно, $\eta_\alpha \vee \eta_\beta = \alpha^2 \cup \beta^2$, т.е. точная верхняя грань не является отделимой. *Предложение доказано.*

Следствие 4.1

Существуют две отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является вычислимо отделимой.

Следствие 4.2

Существует нумерованная алгебра, множество вычислимо отделимых конгруэнций которой не является верхней полурешеткой.

Следствие 4.3

Существует нумерованная алгебра, множество отделимых конгруэнций которой не является верхней полурешеткой.

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Оператор η-замыкания $[]_\eta : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ сопоставляет множеству его наименьшее η-замкнутое расширение (т.е. пересечение всех его η-замкнутых расширений). Очевидно, что множество α является η-замкнутым тогда и только тогда, когда $\alpha = [\alpha]_\eta$.
Для конгруэнции θ нумерованной алгебры (A, ν) обозначим через $ker(\theta)$ ядро этой конгруэнции при нумерации ν, т.е. множество $\{\langle x, y\rangle | \nu(x) = \nu(y) \pmod{\theta}\}$.

Определение 5.1

Семейство эффективно отделимых конгруэнций $\Theta \subseteq L_E(A, \nu)$ нумерованной алгебры (A, ν) называется вычислимым, если существует такая нумерация μ этого семейства, что множество $\{\langle z, i, n\rangle | \forall x, y : \nu(x) \neq \nu(y) \pmod{\mu(n)} \Rightarrow \exists \alpha_n^i (z \in \alpha_n^i \wedge \alpha_n^i = [\alpha_n^i]_{ker(\mu(n))} \wedge ((x \in \alpha_n^i \wedge y \notin \alpha_n^i) \vee (x \notin \alpha_n^i \wedge y \in \alpha_n^i)); \mu(n) \in \Theta\}$ вычислимо перечислимо.

Предложение 5.1

Множество эффективно отделимых конгруэнций любой нумерованной алгебры является вычислимо полным относительно операции взятия точных нижних граней.

Доказательство. Пусть $\theta_0, \theta_1, \ldots$ – вычислимое семейство эффективно отделимых конгруэнций нумерованной алгебры (A, ν). Согласно предыдущему определению это означает, что существует равномерно эффективная процедура, сопоставляющая каждому $n \in \omega$ такую вычислимую последовательность вычислимо перечислимых $ker(\theta_n)$-замкнутых множеств $\langle \theta_n^0, \theta_n^1, \ldots \rangle$, что для любых различных по модулю θ_n элементов $\nu(x)$ и $\nu(y)$ алгебры A существует такой член из этой последовательности (являющийся вычислимо перечислимым множеством, замкнутым относительно ядра конгруэнции θ_n в нумерации ν), который отделяет либо x от y, либо y от x.

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Положим

$$\theta = \bigcap_{n \in \omega} \theta_n.$$

Тогда θ и будет точной нижней гранью семейства $\theta_0, \theta_1, \ldots$. Покажем, что θ эффективно отделима.
Для этого, во-первых заметим, что всякое θ_n-замкнутое множество является и θ-замкнутым. Во-вторых, объединение всех отделяющих множеств

$$\Theta = \bigcup_{i,n \in \omega} \theta_n^i,$$

очевидно, является вычислимой отделяющей последовательностью для конгруэнции θ. В самом деле, если $x \neq y \pmod{\theta} \Rightarrow \exists n[x \neq y \pmod{\theta_n}]$.

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

При этом, если α – θ_n-замкнутое вычислимо перечислимое множество, которое отделяет x и y по модулю конгруэнции θ_n, то α является также и θ-замкнутым (т.к. выше было отмечено, что свойство замкнутости относительно эквивалентности наследуемо вниз по включению) из вычислимой последовательности Θ, отделяющим x и y по модулю конгруэнции θ. Следовательно, θ эффективно отделима. *Предложение доказано.*

Следствие 5.1

Множество эффективно отделимых конгруэнций любой нумерованной алгебры является нижней полурешеткой.

Действительно, в качестве вычислимого семейства достаточно взять любые две эффективно отделимые конгруэнции.

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Теорема 5.1

Существуют две эффективно отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является отделимой.

Доказательство. Зафиксируем разбиение простого множества на две дизъюнктные вычислимо перечислимые невычислимые части $\alpha_0 \cup \beta_0$, используя метод Фридберга (теорема о разложении).
Пусть γ – фиксированная однозначная нумерация попарно непересекающихся непустых конечных множеств, объединение которых покрывает ω, которая вычислима по каноническим индексам, т.е.

$$m \neq n \Rightarrow \gamma_m \cap \gamma_n = \emptyset, \bigcup_{n \in \omega} \gamma_n = \omega$$

и функция f такая, что $\gamma_n = \gamma^*_{f(n)}$, где γ^* – каноническая нумерация конечных множеств, является вычислимой.

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Построим два множества

$$\alpha = \alpha_0 \cup (\bigcup_{n\in\omega} \gamma_{2n} \setminus \beta_0), \beta = \beta_0 \cup (\bigcup_{n\in\omega} \gamma_{2n+1} \setminus \alpha_0).$$

Очевидно, что α, β – непересекающиеся множества, объединение которых покрывает ω. Заметим, что ни α, ни β не являются вычислимо перечислимыми. В противном случае из конструкции Фридберга следует, что для всякого вычислимо перечислимого расширения δ множества α_0, не пересекающееся с β_0 разность $\delta \setminus \alpha$ вычислимо перечислима. В частности $\alpha \setminus \alpha_0$ вычислимо перечислимо, но $\omega \setminus (\alpha_0 \cup \beta_0)$ иммунно, т.е. $\alpha \setminus \alpha_0$ конечно. Аналогично, все вычислимо перечислимые расширения β_0, не пересекающиеся с α_0 также равны β_0 по модулю конечных множеств.

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Определим эквивалентности
$\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle | x, y \in \alpha\} \cup id\ \omega, \eta_\beta = \{\langle x, y\rangle | x, y \in \beta\} \cup id\ \omega$, т.е. единственным неодноэлементным классом эквивалентности $\eta_\alpha(\eta_\beta)$ является множество α (соответственно β).
Покажем, что эквивалентность η_α эффективно отделима. Для этого нужно построить такую вычислимую нумерацию семейства вычислимо перечислимых η_α-замкнутых множеств, которое является отделяющим для η_α.
Через α_0^t обозначим ту часть перечислимого множества α_0, которое перечислится за t шагов некоторого фиксированного эффективного пересчета α_0. Пусть $B_0 = \beta_0 \cup \bigcup_{n\in\omega} \gamma_{2n+1}$. Заметим, что B_0 вычислимо перечислимо и включает в себя бесконечное множество элементов из α_0, которые лежат в γ_n с нечетными номерами n (иначе $B_0 \setminus \beta_0$ было бы конечным и, следовательно, не могло бы содержать β, являющееся бесконечным расширением β_0).

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Строим нумерацию ν_α семейства перечислимых множеств $S_n, n \in \omega$ следующим образом.
Для данного $n \in B_0$ на шаге 0 полагаем $S_n^0 = \{n\}$.
На шаге $t+1$ проверяем условия:
1) $n \in \beta_0^{t+1}$, в этом случае полагаем $S_n = \{n\}$;
2) $n \in \alpha_0^{t+1}$, в этом случае $S_n = \omega$;
3) $n \notin \alpha_0^{t+1} \cup \beta_0^{t+1}$, тогда $S_n^{t+1} = S_n^t$.
Конец шага $t+1$.
Нетрудно заметить, что описанная процедура сопоставляет множество ω бесконечному подмножеству натуральных числу из множества α_0, а каждому натуральному числу n из β – множество $\{n\}$ (при этом, для всех чисел из β_0 процесс обрывается на некотором шаге t, а для $n \in (\beta \setminus \beta_0)$ процесс продолжается бесконечно долго).

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Таким образом, нумерация ν_α отображает вычислимо перечислимое множество B_0 на семейство вычислимо перечислимых η_α-замкнутых множеств $\{S_n | n \in \omega\}$, которое является отделяющим для эквивалентности η_α, т.к. если $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$, то либо x, либо y не лежит в α и множество $\{x\}$ (или $\{y\}$) отделяет эти два элемента. Тот факт, что нумерация отображает не все ω, а вычислимо перечислимое множество B_0 не принципиален (можно взять взаимно однозначное вычислимое отображение $f : \omega \longrightarrow B_0$ и в качестве нумерации определить композицию $\nu_\alpha f$).
Аналогично строится нумерация ν_β и показывается эффективная отделимость η_β. Для этого определим $A_0 = \alpha_0 \cup \bigcup_{n\in\omega} \gamma_{2n}$ и используем A_0 вместо B_0 для эквивалентности η_β.
Легко понять, что $\eta_\alpha \vee \eta_\beta = \alpha^2 \cup \beta^2$, т.е. точная верхняя грань этих эквивалентностей есть эквивалентность с двумя смежными классами α и β, каждый из которых неперечислим. Следовательно, эквивалентность $\eta_\alpha \vee \eta_\beta$ не является отделимой. *Теорема доказана.*

5. Нижние полурешетки эффективно отделимых конгруэнций

Следствие 5.2

Существуют две эффективно отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является эффективно отделимой.

Действительно, эффективная отделимость – весьма частный случай отделимости.

Следствие 5.3

Существуют две эффективно отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является вычислимо отделимой.

Это вытекает из того очевидного факта, что всякая вычислимо отделимая эквивалентность является отделимой.

Следствие 5.4

Существует нумерованная алгебра, множество эффективно отделимых конгруэнций которой не является верхней полурешеткой.

В лекции No 5 мы доказали, что множество равномерно вычислимо отделимых конгруэнций не образует нижнюю полурешетку, основываясь на работах К.Джокуша [2], К.Джокуша и Р.Соара [3] и М.Куммера и Ф.Стефана [4], в которых вводятся, изучаются и характеризуются полурекурсивные, полуперечислимые и слабо полурекурсивные множества. Однако, для полноты картины, мы приведем эти рассуждения и в текущей лекции.

[2] K.G. Jokush, Semirecursive sets and positive reducibility, Trans. Amer. Math. Soc., 131 (1968), 420–436.

[3] K.G. Jokush, R.I. Soare, Π^0_1-classes and degrees of theories, Trans. Amer. Math. Soc., 173 (1972), 33–56.

[4] M. Kummer,F. Stephan, Weakly Semirecursive Sets and r.e. Orderings, Ann. Pure and Appl. Log., 60, (1993), 133-150.

6. Равномерно вычислимо отделимые конгруэнции

Если вычислимо отделимая эквивалентность не является равномерной, то назовем ее неравномерной.
Частичную функцию $\psi : \omega^n \longrightarrow \omega$ назовем квазипроектирующей, если

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \omega[\psi(x_1, \ldots, x_n) \downarrow \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}(\psi(x_1, \ldots, x_n) = x_i)].$$

Напомним некоторые классические определения.
Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется
- полурекурсивным, если существует такая вычислимая квазипроектирующая функция f от двух аргументов, что $[x \in \alpha \vee y \in \alpha] \Rightarrow f(x, y) \in \alpha$;
- полуперечислимым, если существует такая частичная вычислимая функция ψ от двух аргументов, что $[x \in \alpha \vee y \in \alpha] \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \{x, y\} \cap \alpha$;
- слабо полурекурсивным, если существует такая частичная вычислимая функция ψ от двух аргументов, что $[(x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (x \notin \alpha \wedge y \in \alpha)] \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \{x, y\} \cap \alpha$.

Нетрудно заметить, что определения полуперечислимости и слабой полурекурсивности эквивалентны следующим.
Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется
- полуперечислимым, если существует такая частичная вычислимая квазипроектирующая функция ψ от двух аргументов, что $[x \in \alpha \vee y \in \alpha] \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \alpha$;
- слабо полурекурсивным, если существует такая частичная вычислимая квазипроектирующая функция ψ от двух аргументов, что $[(x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (x \notin \alpha \wedge y \in \alpha)] \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \alpha$.

Непосредственно их определений следует, что полурекурсивность любого множества равносильна полурекурсивности его дополнения (с использованием свойства квазипроектирумости f). Ясно также, что полурекурсивность $\Rightarrow$ полуперечислимость $\Rightarrow$ слабая полурекурсивность.

Назовем эквивалентность η сильно равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция $g(x, y)$ такая, что для всех $x \neq y \pmod{\eta}$ значением функции $g(x, y)$ является канонический индекс η-замкнутого множества, отделяющего x и y (т.е. $\gamma_{g(x,y)}$ – η-замкнутое множество, отделяющее x, y, где γ – каноническая нумерация конечных множеств).
Фактически по определению всякая сильно равномерная эквивалентность равномерна. Обратное неверно. Если эквивалентность имеет хотя бы два бесконечных смежных класса, то вопрос о ее сильной равномерности вообще лишен смысла. Для эквивалентностей же с не более чем одним бесконечным классом вопрос об их равномерности корректен.
Заметим, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^{α} сильно равномерно вычислимо отделима.

Теорема 6.1

Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны:
(1) η_α – сильно равномерно вычислимо отделима;
(2) η_α – равномерно вычислимо отделима;
(3) $\omega \setminus \alpha$ – полуперечислимо.

Доказательство. (1)⇒(2). Очевидно.
(2)⇒(3). Обозначим через $\beta(x, y)$ (в случае $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$) вычислимое η_α-замкнутое множество, которое содержит x и не содержит y (если функция из определения равномерности дает характеристический индекс множества содержащего y, то перейдем к индексу характеристической функции для дополнения этого множества). Зафиксируем $a \in \alpha$ и определим следующую вычислимую частичную функцию ψ:

$$[a \in \beta(x, y) \Rightarrow \psi(x, y) = y] \wedge [a \notin \beta(x, y) \Rightarrow \psi(x, y) = x].$$

Очевидно, что если хотя бы один член пары $\langle x, y\rangle$ лежит в $\omega \setminus \alpha$, то применяя алгоритм, поддерживающий равномерность, получаем $\psi(x, y) \in (\omega \setminus \alpha)$.
(3)⇒(1). Пусть $\omega \setminus \alpha$ полуперечилимое множество и ψ – вычислимая частичная функция, подтверждающая полуперечислимость. Построим вычислимую частичную функцию g от трех аргументов следующим образом. Если $f(x, y) = x$, то $g(x, y, x) = 1 \wedge \forall z \in \omega[z \neq x \Rightarrow g(x, y, z) = 0]$. Аналогично, если $f(x, y) = y$, то $g(x, y, y) = 1 \wedge \forall z \in \omega[z \neq y \Rightarrow g(x, y, z) = 0]$. Очевидно, что функция g реализует сильную равномерную отделимость множества $\omega \setminus \alpha$. *Теорема доказана.*

Приведем некоторые важные примеры равномерных и неравномерных вычислимо отделимых эквивалентностей типа η_α.

Предложение 6.1

Если $\omega \setminus \alpha$ регрессивно, а α гиперпросто, то эквивалентность η_α является сильно равномерно вычислимо отделимой.

Доказательство. Пусть ψ – частичная вычислимая регрессивная функция для $\omega \setminus \alpha$. Рассмотрим следующую процедуру вычисления функции f. Для данной пары натуральных чисел $\langle x, y \rangle$ пытаемся подтвердить хотя бы один из следующих случаев с соответствующим определением значения f на паре $\langle x, y \rangle$:
(1) если $x \in \alpha$, то полагаем $f(x, y) = y$;
(2) если $y \in \alpha$, то $f(x, y) = x$;
(3) если $\exists n > 0(\psi^n(x) = y)$, то $f(x, y) = y$;
(4) если $\exists n > 0(\psi^n(y) = x)$, то $f(x, y) = x$.

6. Равномерно вычислимо отделимые конгруэнции

Какие-то случаи могут иметь место одновременно, тогда выбираем тот случай, который подтвердится раньше. Ясно, что f тотальная, квазипроектирующая и $(x \in (\omega \setminus \alpha) \vee y \in (\omega \setminus \alpha)) \Rightarrow f(x,y) \in (\omega \setminus \alpha)$, т.к. для любой пары чисел из $\omega \setminus \alpha$ одно из них ψ-достижимо из другого и $\{\psi^n(x) | n \in \omega \wedge x \in (\omega \setminus \alpha)\} \bigcap \alpha = \emptyset$. Если $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$, то значением $f(x,y)$ является элемент из дополнения α. Пусть, для определенности, это будет x. Тогда $\{x\}$ – конечное η_α-замкнутое множество, отделяющее x от y. Очевидно, что канонический индекс этого множества равномерно вычисляется по $\langle x, y \rangle$. *Предложение доказано.*

Следствие (C.Jockusch)

Всякое регрессивное множество с гиперпростым дополнением полурекурсивно (а значит и полуперечислимо).

Эквивалентность η с бесконечным числом смежных классов называется эффективно (неэффективно) бесконечной, если существует (не существует) эффективное вложение *id* ω в η.

Предложение 6.2

Если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то эквивалентность η_α неравномерна.

Доказательство. Очевидно, что η_α неэффективно бесконечна. Допустим, что η_α – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность. Пусть g – частичная вычислимая функция из определения равномерности, т.е. если $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$, то $\lambda z.g(x,y,z)$ – вычислимая функция, являющаяся характеристической для η_α-замкнутого множества, отделяющего x и y.
По условию, существует сильная таблица для $\delta_0, \delta_1, \ldots$ для $\omega \setminus \alpha$.

Зафиксируем $a \in \alpha$. Через $\beta(x, y)$ обозначим вычислимое множество, для которого при $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$ вычислимая функция $\lambda z.g(x, y, z)$ является характеристической и $x \in \beta(x, y) \wedge y \notin \beta(x, y)$ (как отмечалось выше, в силу симметричности свойства вычислимости отделяющие множества можно поменять местами).
Для $n \in \omega \setminus \alpha$ рассмотрим множество $\sigma_n = \{z | a \in \beta(n, z))\}$, которое, как нетрудно заметить, является вычислимо перечислимым подмножеством $\omega \setminus \alpha$ и потому σ_n конечно. Следовательно, почти все натуральные числа при отделении их от n попадают в одно из отделяющих множеств вместе с a, т.е. существует такое натуральное $s \in \omega$, что для всех $t \geqslant s$ имеем $\forall z \in \delta_t(a \notin \beta(n, z))$. Тем более $\exists t \in \omega \forall z \in \delta_t(a \notin \beta(n, z))$.
Пусть теперь $n \in \alpha$, t – произвольное натуральное число и $z \in \delta_t \cap (\omega \setminus \alpha)$. Тогда $a \in \beta(n, z)$, а значит $\forall t \in \omega \exists z \in \delta_t(a \in \beta(n, z))$.
Таким образом, $n \in \omega \setminus \alpha \Leftrightarrow \exists t \forall z \in \delta_t(a \notin \beta(n, z))$, т.е. $\omega \setminus \alpha$ вычислимо перечислимо. Противоречие. *Предложение доказано.*

Следствие (C.Jockusch)

Никакое иммунное не гипериммунное множество не является полуперечислимым.

Предложение 6.3

Если $\alpha \leqslant_m \beta$ и η_β равномерно вычислимо отделима, то такова же и η_α (т.е. свойство равномерности наследуемо "вниз" относительно m-сводимости).

Доказательство. Пусть $\alpha \leqslant_m \beta$ посредством вычислимой функции $f : \forall x \in \omega[x \in \alpha \Leftrightarrow f(x) \in \beta]$. Допустим, что η_β равномерно вычислимо отделима посредством вычислимой частичной функции g_β, т.е. для $x \neq y \pmod{\eta_\beta}$ функция $\lambda z.g_\beta(x, y, z)$ – характеристическая вычислимая функция η_β-замкнутого множества, отделяющего x от y. Для определенности и сокращения обозначений будем считать, что $g_\beta(x, y, x) = 1$.

Тогда полагаем $[g_\beta(f(x), f(y), f(z)) = 1 \Rightarrow g_\alpha(x, y, z) = 1] \wedge [g_\beta(f(x), f(y), f(z)) = 0 \Rightarrow g_\alpha(x, y, z) = 0]$. Легко проверить, что g_α – вычислимая частичная функция, поддерживающая свойство равномерной вычислимой отделимости для η_α. *Предложение доказано.*

Следствие

Если α креативно, то эквивалентность η_α не является равномерно вычислимо отделимой.

В самом деле, если β – простое не гиперпростое, то по предложению 6.2 эквивалентность η_β неравномерна и, в силу m-полноты α, имеет место сводимость $\beta \leqslant_m \alpha$. А значит, по предложению 6.3, эквивалентность η_α неравномерная.

Пусть $\langle L; \leqslant_L \rangle$ – частичный порядок. Напомним, что подмножество $L_0 \subseteq L$ этого порядка называется начальным сегментом в $\langle L; \leqslant_L \rangle$, если $\forall x \in L_0 \forall y \in (L \setminus L_0)[x \leqslant_L y]$.

Частичный порядок $\langle \omega; \leqslant_\omega \rangle$ на ω называется вычислимо перечислимым, если таковым является множество $\{\langle x, y \rangle | x \leqslant_\omega y\}$.

Мы будем пользоваться следующей характеризацией полуперечислимых множеств:

M.Kummer, F.Stephan

Множество α полуперечислимо тогда и только тогда, когда α является линейно упорядоченным начальным сегментом некоторого вычислимо перечислимого частичного порядка.

Упражнение

Пересечение двух вычислимо отделимых эквивалентностей является вычислимо отделимым.

Теорема 6.2

Существуют две равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, пересечение которых является неравномерной эквивалентностью.

Доказательство. Пусть α – гиперпростое множество с регрессивным дополнением $\omega \setminus \alpha$. По предложению 6.2 эквивалентность η_α является равномерно вычислимо отделимой. Используя метод Фридберга эффективно разложим α на два непересекающихся вычислимо перечислимых невычислимых множества α_0 и α_1, объединение которых есть α (т.е. $\alpha = \alpha_0 \cup \alpha_1, \alpha_0 \cap \alpha_1 = \emptyset$). Рассмотрим теперь эквивалентность $\eta_{\omega \setminus \alpha_1}$. Ясно, что она негативна (т.к. α_1 вычислимо перечислимо), т.е. равномерно вычислима отделима. Теперь возьмем пересечение $\eta_\alpha \bigcap \eta_{\omega \setminus \alpha_1}$ этих двух эквивалентностей, которое, очевидно, равно η_{α_0}.

Покажем, что η_{α_0} – неравномерная эквивалентность.
Прежде всего, отметим два свойства конструкции Фридберга:
(a) множества α_0 и α_1 вычислимо неотделимы;
(b) если β – вычислимо перечислимое расширение α_0, не пересекающееся с α_1 (вычислимо перечислимое расширение α_1, не пересекающееся с α_0), то $\beta \setminus \alpha$ вычислимо перечислимо.
Предположим, что η_{α_0} – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность. Тогда, по теореме 6.1, множество $\omega \setminus \alpha_0$ является полуперечислимым. В силу характеризации полуперечислмых множеств (приведенной перед формулировкой настоящей теоремы) существует такой вычислимо перечислимый частичный порядок $\langle \omega; \leqslant_\omega \rangle$, для которого множество $\omega \setminus \alpha_0$ является линейно упорядоченным начальным сегментом, т.е.

$$\forall x \in (\omega \setminus \alpha_0) \forall y \in \alpha_0 [x \leqslant_\omega y]$$

и $\langle \omega \setminus \alpha_0; \leqslant_\omega \rangle$ – линейно упорядоченное множество.

Будем говорить, что число $x \in (\omega \setminus \alpha)$ покрывается числом $y \in \alpha_1$, если $x \leqslant_\omega y$. Заметим, что любое множество чисел из $\omega \setminus \alpha$, покрываемых подходящими числами из α_1 конечно. Допустим противное. Тогда множество $\{x | \exists y \in \alpha_1 [x \leqslant_\omega y]\}$ является вычислимо перечислимым расширением (назовем его β) множества α_1 за счет бесконечного числа элементов из $\omega \setminus \alpha$, т.е. $\beta \setminus \alpha_1$ бесконечно, причем $\beta \bigcap \alpha_0 = \emptyset$. В силу указанного выше свойства (b) конструкции Фридберга $\beta \setminus \alpha_1$ вычислимо перечислимое подмножество гипериммунного множества $\omega \setminus \alpha$ и потому должно быть конечным. Противоречие.

Таким образом, почти все (за исключением конечного числа) элементы из $\omega \setminus \alpha$ являются верхними гранями относительно $\leqslant_\omega$ для множества α_1. Следовательно, упорядочение начального сегмента $\alpha_1 \bigcup (\omega \setminus \alpha)$ имеет вид $\alpha_1 + (\omega \setminus \alpha)$ (за вычетом конечного множества элементов из $\omega \setminus \alpha$, которые могут покрываться элементами α_0).

Поэтому можно считать, что множество чисел из $\omega \setminus \alpha$, покрываемых числами из α_1 пустое. Аналогичные рассуждения показывают, что порядок $\leqslant_\omega$ на $\omega \setminus \alpha$ изоморфен ординалу ω.
Для реализации наших целей достаточно существования хотя бы одного числа из $\omega \setminus \alpha$, которое не покрывается никаким числом из $\omega \setminus \alpha_1$. Выберем, для определенности, $\leqslant_\omega$-наименьшее число из $\omega \setminus \alpha$, являющееся верхней гранью для α_1.
Пусть это будет $m \in (\omega \setminus \alpha)$. Рассмотрим два множества: $\alpha_1^* = \{x | x \leqslant_\omega m\}$ и $\alpha_0^* = \{x | m \leqslant_\omega \wedge x \neq m\}$. Согласно определению начального сегмента имеем $\alpha_0 \subseteq \alpha_0^*, \alpha_1 \subseteq \alpha_1^*, \alpha_0^* \bigcap \alpha_1^* = \emptyset, \alpha_0^* \bigcup \alpha_1^* = \omega$. Ясно также, что как α_0^*, так и α_1^* вычислимо перечислимы. Но тогда α_0 и α_1 вычислимо отделимы, что противоречит свойству (b) конструкции Фридберга. Следовательно, $\omega \setminus \alpha_0$ не является полуперечислимым множеством и по теореме 1 эквивалентность η_{α_0} не является равномерной. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Очевидно, что любое вычислимо перечислимое множество, так же как и его дополнение слабо полурекурсивно. Поэтому слабо полурекурсивно $\omega \setminus \alpha_0$. Но это множество не является полуперечислимым (хотя полуперечислимо его дополнение). Таким образом, теорема 6.2 дает также пример слабо полурекурсивного, но не полуперечислимого множества $\omega \setminus \alpha_0$. Отметим также, что η_α является сильно равномерно отделимой эквивалентностью с полурекурсивным α (и $\omega \setminus \alpha$). Но α_1, будучи полуперечислимым, не является полурекурсивным.

Следствие

Существует нумерованная алгебра, множество равномерно вычислимо отделимых конгруэнций которой не является ни нижней, ни верхней полурешеткой.

Таковой будет, например, алгебра пустой сигнатуры над множеством натуральных чисел ω. Множество равномерно вычислимо отделимых конгруэнций этой алгебры не является верхней полурешеткой.

В силу теоремы 6.2 это множество не является также и нижней полурешеткой.
Легко заметить, что существуют как равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, которые не являются эффективно отделимыми, так и эффективно отделимые, не являющиеся равномерно вычислимо отделимыми. Известно, что множество равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей не является верхней полурешеткой, т.к. любая позитивная эквивалентность с бесконечными смежными классами есть точная верхняя грань двух разрешимых (а значит и равномерно вычислимо отделимых) эквивалентностей (А.С.Морозов, не опубликовано). Однако, позитивные эквивалентности лежат в классе эффективно отделимых. В связи с этим возникает вопрос о существовании пары равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей, точная верхняя грань которых не является эффективно отделимой. Приведем наиболее сильный вариант ответа на этот вопрос.

Предложение 6.4

Множество равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей не замкнуто в множестве отделимых эквивалентностей относительно операции взятия точной верхней грани.

Доказательство. Известно, что существует такое полурекурсивное α, что как α, так и $\omega \setminus \alpha$ не являются вычислимо перечислимыми. Пусть α – такое множество. Тогда α полуперечислимо и по теореме 6.1 эквивалентность $\eta_{\omega\setminus\alpha}$ – равномерно вычислимо отделима. Аналогично, η_α также равномерная. Очевидно, что $\eta_\alpha \vee \eta_{\omega\setminus\alpha} = \alpha^2 \bigcup(\omega \setminus \alpha)^2$ и эта верхняя грань не является отделимой. *Предложение доказано.*

Следствие

Существуют две равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является эффективно отделимой.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!