

В.В. МАЛЫГИНА, К.М. ЧУДИНОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ. III

*Аннотация.* Рассматривается класс скалярных линейных дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями и постоянными коэффициентами. Коэффициенты и максимально допустимые значения запаздываний рассматриваются как параметры, определяющие семейство уравнений исследуемого класса. На основе полученных в предшествующих работах необходимых и достаточных условий устойчивости семейства найдены аналитический вид и геометрическая интерпретация границ областей устойчивости для семейств уравнений с малым числом независимых параметров.

*Ключевые слова:* функционально-дифференциальное уравнение, переменное запаздывание, устойчивость.

УДК: 517.929

Работы [1] и [2] посвящены исследованию устойчивости решений уравнения

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^n a_k x(t - r_k(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $a_0 \in \mathbb{R}$ ;  $a_k, \omega_k > 0$  и  $r_k : [0, +\infty) \rightarrow [0, \omega_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Получены необходимые и достаточные условия того, что все уравнения с фиксированным набором значений  $a_0, a_1, \dots, a_n, \omega_1, \dots, \omega_n$  устойчивы. При этом выделено  $n+1$  независимых параметров, и области устойчивости определены в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  аналитически.

Данная статья посвящена подробному изучению случаев, когда области устойчивости двумерны, что имеет место, если либо  $n = 1$ , либо  $n = 2$  и  $a_0 = 0$ . Границы областей представлены как объединение конечного или счетного множества кривых, заданных аналитически в явном виде, и построены графически.

### 1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Положим  $\Delta = \{(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ . *Функцией Коши* уравнения (1) называется функция двух переменных  $C : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что при любом фиксированном  $s \geq 0$  функция  $C(\cdot, s)$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_0 x(t) - \sum_{k=1}^n a_k x(t - r_k(t)), \quad t \geq s; \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < s; \quad x(s) = 1, \end{aligned}$$

однозначно разрешимой при измеримых функциях  $r_k$  в классе функций, абсолютно непрерывных на любом конечном отрезке  $[s, s_1]$  ([3], [4], [5], § 1.2).

---

Поступила 27.03.2012

Функция  $X : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X(t) \equiv C(t, 0)$ , называется *фундаментальным решением* уравнения (1). В случае  $r_k(t) \equiv c_k = \text{const}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , имеем  $X(t - s) \equiv C(t, s)$ .

*Семейством* (1) называем множество всех уравнений вида (1) с фиксированным набором параметров  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \omega_1, \dots, \omega_n\}$  и всевозможными измеримыми функциями  $r_k$ , удовлетворяющими условиям  $0 \leq r_k(t) \leq \omega_k$ . Семейство (1) будем называть *устойчивым*, если устойчивы все входящие в него уравнения.

Автономную задачу

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= a_0 y(t) - \sum_{k=1}^n a_k y(t - \omega_k), \quad t \geq 0; \\ y(\xi) &= 1, \quad \xi \leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

будем называть *test-задачей*, а уравнение из этой задачи — *test-уравнением* семейства (1).

Если начинающийся в нуле промежуток убывания решения  $y$  задачи (2) конечен, будем обозначать через  $l$  его длину:  $l = \inf\{t > 0 : \dot{y}(t) \geq 0\} < \infty$ . Если же функция  $y$  убывает на полуоси  $(0, +\infty)$ , будем полагать  $l = \infty$ .

Перечислим ряд свойств фундаментального решения  $p = p(t)$  уравнения

$$\dot{p}(t) = -\alpha p(t - 1), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

**Свойство 1.** Фундаментальное решение уравнения (3) определяется формулой

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k (t - k)^k \chi(t - k),$$

где  $\chi$  — характеристическая функция множества  $[0, +\infty)$ .

При каждом фиксированном  $n \in \mathbb{N}_0$  величина  $p(n + 1)$  как функция аргумента  $\alpha$ , определенная на множестве  $[0, +\infty)$ , является многочленом  $n$ -й степени. Обозначим  $p(n + 1) = H_n(\alpha)$ . Заметим, что  $H_0(\alpha) \equiv 1$ .

**Свойство 2** ([6]). Многочлены  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеют положительные вещественные корни.

Пусть  $\alpha_n$  — наименьший положительный корень многочлена  $H_n$ . Числа  $\alpha_n$  могут быть найдены с любой степенью точности; в табл. 1 приведены первые двенадцать (с точностью до  $10^{-3}$ ).

ТАБЛИЦА 1. Значения  $\alpha_n$ ,  $n = \overline{1, 12}$

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$
1	0.586	0.482	0.439	0.417	0.404	0.396	0.389	0.385	0.382	0.380	0.378

**Свойство 3** ([6]). Последовательность  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  монотонно убывает, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1/e$ .

**Свойство 4** ([7], теорема 39, с. 190; [8]). При  $\alpha \leq 1/e$  функция  $p$  положительна на  $[0, +\infty)$ , при  $\alpha > 1/e$  является осциллирующей.

Обозначим через  $\mu = \mu(\alpha) = \min\{t : p(t) = 0\}$  первый нуль функции  $p$ . Из свойства 4 следует, что функция  $\mu$  определена на множестве  $(1/e, +\infty)$ .

**Свойство 5** ([6]). Функция  $\mu$  является непрерывным монотонно убывающим отображением множества  $(1/e, +\infty)$  на множество  $(1, +\infty)$ .

**Свойство 6** ([6]). Для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство  $\mu(\alpha_n) = n + 1$ .

**Свойство 7.** Для свертки функции  $p$  имеет место равенство

$$\int_0^t p(t-s)p(s)ds = -\frac{\partial}{\partial \alpha} p(t+1).$$

*Доказательство.* Используем представление функции  $p$  (см. свойство 1) и преобразование Лапласа. Изображение  $P(\lambda)$  функции  $p(t)$  при достаточно больших  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  имеет вид

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\alpha}{\lambda e^\lambda} \right)^k = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\lambda e^\lambda}}.$$

Символом  $\doteq$  будем обозначать отношение между функцией от переменной  $t$  и ее изображением — функцией от переменной  $\lambda$ . В силу свойств преобразования Лапласа имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t p(t-s)p(s)ds &\doteq P^2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda e^\lambda}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \left( \frac{\alpha}{\lambda e^\lambda} \right)^k \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k (t-k)^{k+1} \chi(t-k) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} p(t+1). \quad \square \end{aligned}$$

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. *Одно слагаемое, одно запаздывание.* Положим в уравнении (1)  $a_0 = 0$ ,  $n = 1$ , т.е. рассмотрим семейство уравнений вида

$$\dot{x}(t) + bx(t-r(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где  $b \in \mathbb{R}$ ,  $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, \omega]$  — измеримая ограниченная функция.

В случае  $b < 0$  для любого  $s$  имеем  $C(t, s) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. семейство (4) неустойчиво при любом  $\omega$ .

В случае  $b = 0$  имеем  $C(t, s) \equiv 1$ , следовательно, семейство (4) равномерно (но не асимптотически) устойчиво при всех  $\omega$ .

Случай  $b > 0$  исследуем на основе теорем 7 и 8 работы [2]. На промежутке  $[0, 2\omega]$  решение test-задачи семейства (4)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + by(t-\omega) &= 0, \quad t > 0; \\ y(\xi) &= 1, \quad \xi \leq 0, \end{aligned}$$

имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} 1 - bt, & t \in [0, \omega]; \\ 1 - bt + \frac{1}{2}b^2(t-\omega)^2, & t \in [\omega, 2\omega]. \end{cases}$$

Если функция  $y$  имеет первый минимум  $l \in [0, 2\omega]$ , то  $l = \omega + \frac{1}{b}$  и  $y(l) = \frac{1}{2} - b\omega$ .

Если  $b\omega < \frac{3}{2}$ , то  $l > \frac{5}{3}\omega$ . По теореме 7 работы [2] семейство (4) является экспоненциально устойчивым.

Если  $b\omega = \frac{3}{2}$ , то  $l = \frac{5}{3}\omega$  и  $y(l) = -1$ . По теоремам 7, 8 из [2] семейство (4) является равномерно устойчивым, но не является экспоненциально устойчивым.

Если  $b\omega > \frac{3}{2}$ , то  $l \in [0, \frac{5}{3}\omega)$  и  $y(l) < -1$ . По теореме 8 из [2] семейство (4) не является равномерно устойчивым.

Объединяя результаты в одно утверждение, получаем

**Признак 1.** Семейство (4) является

- экспоненциально устойчивым, если и только если  $0 < b\omega < 3/2$ ;
- равномерно устойчивым, если и только если  $0 \leq b\omega \leq 3/2$ .

Признак 1 представляет собой знаменитую “3/2-теорему” А.Д. Мышкиса ([7], теорема 58, с. 229).

2.2. Два слагаемых, одно запаздывание. Рассмотрим семейство уравнений вида

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t - r(t)), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $r : [0, \omega] \rightarrow [0, \omega]$  — измеримая ограниченная функция.

Получим признаки устойчивости семейства (5) для коэффициентов произвольных знаков.

2.2.1. *Случай  $b \leq 0$ .* Независимо от знака коэффициента  $a$  фундаментальные решения всех уравнений (5) положительны [9]. В ([10], с. 172; [11], с. 135) показано, что при  $b > a$  уравнение (5) устойчиво при любых  $r$ ; если  $b = a$ , то уравнение (5) имеет решения, не стремящиеся к нулю (например, стационарные), следовательно, не являющиеся асимптотически устойчивыми. При  $b < a$  уравнение (5) имеет неограниченные решения [12], следовательно, не является равномерно устойчивым. Для полноты картины необходимо исследовать уравнение (5) при  $b = a$  на равномерную устойчивость, которая вытекает из следующего утверждения.

**Лемма 1.** *Для функции Коши уравнения*

$$\dot{x}(t) = x(t - r(t)) - x(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где  $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  — любая измеримая функция, при всех  $(t, s) \in \Delta$  справедлива оценка  $0 < C(t, s) \leq 1$ .

*Доказательство.* Положительность фундаментального решения отмечалась выше. Докажем оценку сверху. Обозначим через  $E(s, \mu)$  множество таких  $t \geq s$ , что  $C(\xi, s) < \mu$  для всех  $\xi \leq t$ . Так как  $C(s, s) = 1$ , то при всех  $\mu > 1$  множество  $E(s, \mu)$  не пусто. Если при всех  $s \geq 0$  и  $\mu > 1$  имеем  $\sup E(s, \mu) = \infty$ , то оценка  $C(t, s) \leq 1$  справедлива. Допустим, существуют такие  $s \geq 0$  и  $\mu > 1$ , что  $\sup E(s, \mu) = \tau_0 < \infty$ . Положим  $x(\cdot) = C(\cdot, s)$ . При всех  $t \in [s, \tau_0)$  имеем  $x(t) < x(\tau_0) = \mu$ . Выберем  $\varepsilon \in (0, 1)$  такое, что  $\tau_0 - \varepsilon \in (s, \tau_0)$  и найдем  $\tau = \sup\{t \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0) : x(t) \leq x(\tau_0 - \varepsilon)\}$ . Очевидно,  $0 < \tau_0 - \tau \leq \varepsilon < 1$ . В силу абсолютной непрерывности функции  $x$  найдется точка  $t_0 \in (\tau, \tau_0)$ , в которой  $\dot{x}(t_0) \geq \frac{x(\tau_0) - x(\tau)}{\tau_0 - \tau} \geq x(\tau_0) - x(\tau)$ . С другой стороны, из уравнения (6) и выбора точек  $\tau$  и  $\tau_0$  имеем  $\dot{x}(t_0) = x(t_0 - r(t_0)) - x(t_0) < x(\tau_0) - x(\tau)$ . Противоречие.  $\square$

Пусть теперь в уравнении (5)  $a = b < 0$ . Заменой переменных  $t \mapsto -at$  уравнение (5) сводится к уравнению (6), что доказывает равномерную устойчивость семейства (5). При  $a = b = 0$  равномерная устойчивость очевидна.

2.2.2. *Случай  $b > 0$ .* Применим результаты из статьи [2].

Параметрическое уравнение поверхности  $F$  для семейства (5) имеет вид

$$-\zeta - u_0 + u_1 e^{\zeta\omega} = 0, \quad -1 + u_1 \omega e^{\zeta\omega} = 0.$$

Исключая параметр  $\zeta$  и переходя к координатам  $u = u_0\omega$ ,  $v = u_1\omega$ , получаем, что  $F$  — кривая  $v = e^{u-1}$ . Для нее понятия *выше* и *ниже* геометрически очевидны.

Найдем области экспоненциальной и равномерной устойчивости. Рассмотрим множество точек, лежащих не выше  $F$ , т.е. удовлетворяющих неравенству  $v \leq e^{u-1}$ . Дополним их неравенствами  $v > u$  и  $v < 1$ . Если точка  $\{a\omega, b\omega\}$  попадает в эту область, то согласно

теореме 5 из статьи [2] семейство (5) экспоненциально устойчиво. Рассмотрим множество точек, лежащих выше  $F$  (неравенство  $v > e^{u-1}$ ). Согласно другому пункту той же теоремы для описания области устойчивости нужно найти кривую  $y(l) = -1$ . Это сделано в работе [6], поэтому здесь приведем только окончательный результат.

Пусть  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность корней многочленов  $H_n(\alpha)$  (см. раздел 1). Разобьем область, лежащую выше  $F$ , кривыми  $v = \alpha_n e^u$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на бесконечное множество областей, в каждой из которых граница области устойчивости имеет свой вид. Из свойства 3 функции  $p$  вытекает, что последовательность кривых сходится к кривой  $v = e^{u-1}$ , которая является границей области  $F$ .

Обозначим

$$\Phi_1(u, v) = \begin{cases} \left(\frac{v}{u}\right)^2 + \left(1 - \frac{v}{u}\right) \frac{v}{u} \exp\left(\frac{u}{v} \exp u\right), & u \neq 0; \\ \frac{1}{2} - v, & u = 0, \end{cases}$$

$$\Phi_n(u, v) = \left(\frac{v}{u}\right)^{n+1} + \left(1 - \frac{v}{u}\right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{v}{u}\right)^k p(\mu(\alpha) - k) \exp(u(\mu(\alpha) - k)), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} \Phi_1(u, v), & v \geq e^u; \\ \Phi_n(u, v), & \alpha_n e^u \leq v \leq \alpha_{n-1} e^u. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha = ve^{-u}$ ,  $p$  — фундаментальное решение задачи (3) при  $\alpha = ve^{-u}$ , последовательность  $\{\alpha_n\}$  и функция  $\mu$  определены свойствами 2, 3, 5, 6 функции  $p$ .

Уравнение  $\Phi(u, v) = -1$  определяет при  $u \in (-\infty, 1)$  однозначную монотонно убывающую функцию, график которой целиком лежит выше  $F$ . При  $u \rightarrow -\infty$  этот график имеет асимптоту  $v = -u$ . В точках  $M_n$  звенья кривой непрерывно стыкуются, причем  $M_n \rightarrow M_0(1, 1)$  (см. рис. 1, график справа).

Объединяя области экспоненциальной устойчивости, лежащие выше и ниже  $F$ , получаем из теоремы 5 работы [2]

**Признак 2.** Семейство (5) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда  $b > a$ ,  $\Phi(a\omega, b\omega) > -1$ .

Таким образом, область экспоненциальной устойчивости семейства (5) есть внутренность бесконечного “угла”, границы которого — прямая  $u = v$  и кривая  $\Phi(u, v) = -1$  (см. рис. 1, график слева).

Поведение решения (5) на сторонах “угла” характеризует

**Признак 3.** Если выполнено любое из условий

- (а)  $b = a$ ,  $a\omega < 1$ ,
- (б)  $\Phi(a\omega, b\omega) = -1$ ,

то семейство (5) равномерно устойчиво.

*Доказательство.* Случай (б) следует из теоремы 6 работы [2]. В случае (а), если  $b > 0$ , применяется та же теорема, если  $b \leq 0$  — лемма 1.  $\square$

Подчеркнем, что точка  $M_0(1, 1)$  не принадлежит области равномерной устойчивости: любое уравнение семейства (5), параметры которого удовлетворяют условиям  $r(t) = \omega$ ,  $a\omega = b\omega = 1$ , имеет неограниченное решение  $x(t) = t$ .

### 2.3. Два слагаемых, два запаздывания.

Положим в уравнении (1)  $a_0 = 0$ ,  $n = 2$ , т. е. рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{x}(t) = -ax(t - r_1(t)) - bx(t - r_2(t)), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

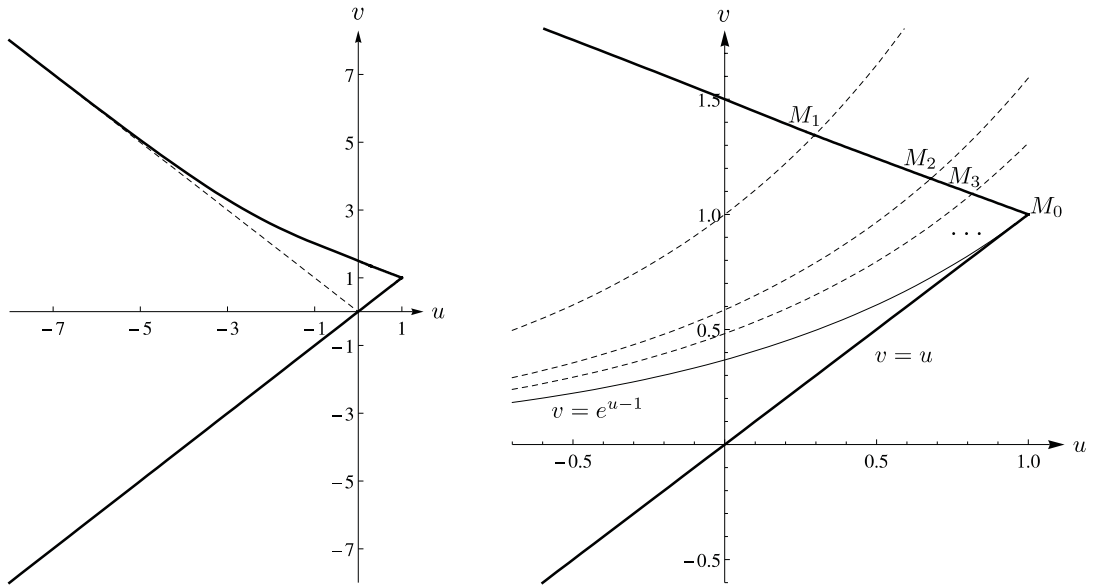


Рис. 1. Область устойчивости семейства (5)

где  $a, b > 0$ ,  $r_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, \omega_i]$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , — измеримые ограниченные функции.

Установим для семейства (7) признаки экспоненциальной и равномерной устойчивости. Если  $\omega_2 \geq \omega_1 > 0$ , то, не нарушая общности, можно положить  $\omega_1 = 1$ . Границу второго запаздывания будем считать целочисленной, т. е. ограничимся разбором случая  $\omega_2 = m \in \mathbb{N}$ .

Test-уравнением семейства (7) будет

$$\dot{y}(t) = -ay(t-1) - by(t-m), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Если  $m = 1$ , то уравнение (8) имеет вид  $\dot{y}(t) + (a+b)y(t-1) = 0$  и совпадает с test-уравнением семейства (4). В силу признака 1 семейство (7) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда  $0 < a+b < 3/2$ , и равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда  $0 \leq a+b \leq 3/2$ .

Далее будем считать, что  $m \geq 2$ .

Обозначим через  $y = y(t)$  решение test-задачи семейства (7) и через  $l$  — первый минимум функции  $y$ . В силу теорем 7, 8 из [2] границу областей экспоненциальной и равномерной устойчивости семейства (7) определяет условие  $y(l) = -1$ , которое по теореме 10 из [2] эквивалентно условию

$$(a+b) \int_0^l u(s) ds = 2, \quad (9)$$

где  $u$  — фундаментальное решение уравнения (8). При этом  $l$  оказывается первым нулем функции  $u$ , а для определения границы области устойчивости (9) существенны только случаи  $l \in [0, 5m/3]$ .

Исследуем нули функции  $u$  на отрезке  $[0, 5m/3]$ .

Если  $t \in [0, m]$ , то  $u(t-m) = 0$ , а значит,  $u(t) = p(t)$ , где  $p$  — решение уравнения (3) при  $\alpha = a$ . Поэтому  $l > 1$ , и если  $l \in (1, m]$ , то  $l$  — первый нуль функции  $p$ . В силу свойств 5, 6 функции  $p$  имеем  $l \in (1, m]$  тогда и только тогда, когда  $a \geq \alpha_{m-1}$ , где  $\alpha_{m-1}$  — первый нуль многочлена  $H_{m-1}(\alpha)$ . Найдем уравнение границы области устойчивости для этого случая.

**Лемма 2.** При  $a > 1 = \alpha_1$  граница области устойчивости семейства (7) имеет уравнение  $b = \frac{a(3-2a)}{1+2a}$ .

*Доказательство.* Если  $a > 1$ , то  $l \in [1, 2)$ . Имеем

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1]; \\ 1 - a(t - 1), & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Значит,  $l = 1 + 1/a$ ,  $\int_0^l p(t) dt = 1 + \int_1^{1+1/a} (1 - a(t - 1)) dt = 1 + \frac{1}{2a}$ . Из формулы (9) получаем уравнение границы  $(a + b) \left(1 + \frac{1}{2a}\right) = 2$ , что эквивалентно лемме.  $\square$

Поскольку  $b \geq 0$ , граница области устойчивости, установленная леммой 2, интересна только при  $a \in (1, 3/2]$ .

**Лемма 3.** При  $a \in (\alpha_n, \alpha_{n-1}]$ ,  $n = \overline{2, m-1}$ , граница области устойчивости семейства (7) задается уравнениями

$$b = a \frac{1 + p(\zeta + 1)}{1 - p(\zeta + 1)}, \quad p(\zeta) = 0, \quad \zeta \in [n, n + 1), \quad (10)$$

где  $p$  — решение уравнения (3) при  $\alpha = a$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in (\alpha_n, \alpha_{n-1}]$  и  $\zeta = l(a)$  — первый нуль функции  $p$ . Согласно свойству 3 уравнения (3)  $\zeta \in [n, n + 1)$ , причем на указанном множестве нет других нулей функции  $p$ . Значит, по заданному  $a$  второе из уравнений (10) однозначно определяет  $\zeta$ .

Граница области устойчивости согласно (9) имеет вид  $(a + b) \int_0^\zeta p(s) ds = 2$ . Так как  $p(1) = 1$ , то

$$(a + b) \int_0^\zeta p(s) ds = -\frac{a + b}{a} \int_1^{\zeta+1} \dot{p}(s) ds = \frac{a + b}{a} (1 - p(\zeta + 1)).$$

Приравнявая последнее выражение к двум, получаем первое из уравнений (10).  $\square$

Посредством лемм 2 и 3 на множестве  $(1/e, 3/2] = \bigcup_{n=2}^{\infty} (\alpha_n, \alpha_{n-1}] \cup (1, 3/2]$  определяется функция  $b = \varphi(a)$ . Исследуем ее поведение в окрестности точки  $1/e$ .

**Лемма 4.** Функция  $\varphi$  имеет предел  $\lim_{a \rightarrow \frac{1}{e}+0} \varphi(a) = 1/e$ .

*Доказательство.* Пусть  $\zeta$  — первый корень решения  $p$  задачи (3) при  $\alpha = a$ , т.е.  $\zeta = l(a)$ . Из свойства 5 следует  $\lim_{a \rightarrow \frac{1}{e}} l(a) = +\infty$ . Пусть  $t \in [0, \zeta)$ . На этом множестве функция  $p$  положительна и монотонно убывает. Из уравнения (3) имеем

$$0 < p(t) = e^{-a(t-1)} p(1) + a \int_1^t e^{-a(t-s)} (p(s) - p(s-1)) ds \leq e^{-a(t-1)}. \quad (11)$$

Оценим значение функции  $p$  в точке  $\zeta + 1$ . Так как  $p(\zeta) = 0$ , то в силу теоремы Лагранжа и уравнения (3)  $p(\zeta + 1) = p(\zeta + 1) - p(\zeta) = \dot{p}(\xi) = -ap(\xi - 1)$ , где  $\xi - 1 \in (\zeta - 1, \zeta)$ . Следовательно, с учетом (11)  $|p(\zeta + 1)| \leq ae^{2a} e^{-a\zeta}$ , т.е.  $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} p(\zeta + 1) = 0$ . Из представления

$$(10) \text{ получаем } \lim_{a \rightarrow \frac{1}{e}+0} \varphi(a) = \frac{1}{e} \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \frac{1+p(\zeta+1)}{1-p(\zeta+1)} = 1/e. \quad \square$$

Положим  $\varphi(1/e) = 1/e$ . Теперь функция  $\varphi$  определена и непрерывна на отрезке  $[1/e, 3/2]$ . Ее график  $v = \varphi(u)$  состоит из счетного множества непрерывно стыкующихся между собой кривых (см. рис. 2).

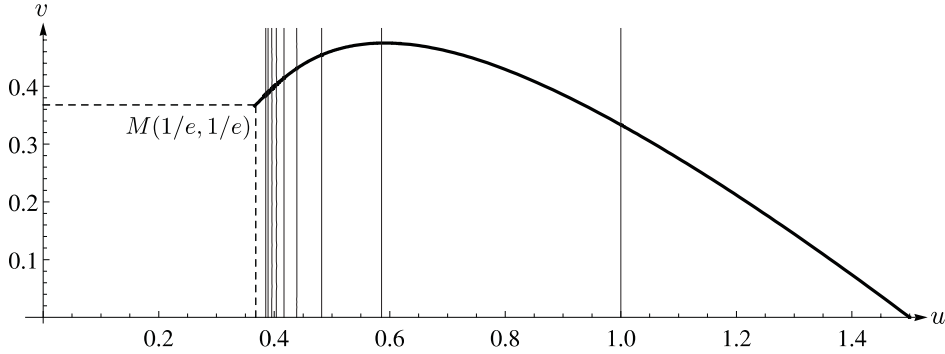


Рис. 2. График функции  $\varphi$

Будем изображать область устойчивости семейства (7) как множество точек  $(a, b)$  плоскости  $Ouv$ . Леммы 2 и 3 показывают, что в случае  $a \geq \alpha_{m-1}$  границу (9) области устойчивости составляют  $m - 1$  звеньев графика  $v = \varphi(u)$ . По теоремам 7, 8, 10 работы [2] область устойчивости семейства (7) находится под графиком. Таким образом, в случае  $a \geq \alpha_{m-1}$  она ограничена прямыми  $u = \alpha_{m-1}$ ,  $v = 0$  и кривой  $v = \varphi(u)$ .

Исследуем область устойчивости в случае  $a < \alpha_{m-1}$ . Согласно вышеизложенному имеем  $l > m$ , где  $l$  — первый нуль фундаментального решения  $u$  уравнения (8). Установим, какими должны быть коэффициенты уравнения (8) для произвольно фиксированного  $l \in (m, 2m]$ .

Построим функцию  $u$  на множестве  $[0, 2m]$ . Функцию  $p$  по-прежнему полагаем решением уравнения (3) при  $\alpha = a$ . При  $t \in [0, m]$  получим  $u(t) = p(t)$ ; при  $t \in (m, 2m]$  уравнение (8) принимает вид  $\dot{u}(t) + au(t - 1) = -bp(t - m)$ . По формуле Коши [1] с учетом начальных условий и свойства 7 функции  $p$  имеем

$$u(t) = p(t)u(0) - b \int_m^t p(t-s)p(s-m) ds = p(t) - b \int_0^{t-m} p(t-s-m)p(s) ds = p(t) + b \frac{\partial}{\partial a} p(t-m+1). \quad (12)$$

Так как  $u(l) = 0$ , то  $p(l) = -b \frac{\partial}{\partial a} p(l-m+1) = b \int_m^l p(l-s)p(s-m) ds > 0$ . Значит, при фиксированном  $l$  по заданному  $a$  однозначно определяется

$$b = g_l(a) = -\frac{p(l)}{\frac{\partial}{\partial a} p(l-m+1)}. \quad (13)$$

Из (9) видим, что при  $a \in [0, \mu^{-1}(l)]$  функция  $g_l$  является непрерывной и монотонно убывающей.

Рассмотрим графики  $v = g_l(u)$  на плоскости  $Ouv$  при  $l \in (m, 2m]$ . Они образуют семейство попарно не пересекающихся кривых, целиком заполняющих часть плоскости  $v \geq 0$  между прямой  $u = \alpha_{m-1}$  и кривой  $v = g_{2m}(u)$ . Каждая кривая определяет множество пар  $(a, b)$  коэффициентов уравнений (8), фундаментальные решения которых имеют первый нуль в данной точке  $l$ .



Если  $l > 5m/3$ , то в силу теоремы 7 семейство (7) экспоненциально устойчиво. Геометрически это означает, что для  $l \in (5m/3, 2m]$  все кривые  $v = g_l(u)$  целиком лежат ниже кривой  $v = g_{5m/3}(u)$  в области экспоненциальной устойчивости. Точка  $(0, 3/2m)$  прямой  $v = g_{5m/3}(u)$  является точкой границы области устойчивости (см. п. 2.1).

Для построения границы области рассмотрим функции  $g_l$  при  $l \in (m, 5m/3]$ . Наиболее важны кривые, соответствующие целым  $l$ , так как вид функции  $p$  меняется при переходе значения  $l$  через целочисленные точки.

Из (13) и свойства 1 функции  $p$  следует

**Лемма 5.** Если  $l$  — целое число из множества  $\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$ , то

$$g_l(a) = \frac{\sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{k!} a^k (l-k)^k}{\sum_{k=0}^{l-m} \frac{(-1)^k}{k!} a^k (l-m-k)^{k+1}}. \quad (14)$$

Теперь приведем алгоритм построения кривых (9) при  $l \in (m, 5m/3]$ . Обозначим

$$G_m = \{(a, b) : 0 \leq a < \alpha_{m-1}, 0 \leq g_{m+1}(a) \leq b\},$$

$$G_n = \{(a, b) : 0 \leq a < \alpha_{n-1}, 0 \leq g_n(a) < b \leq g_{n+1}(a)\}, \quad n = m+1, m+2, \dots, 2m-1.$$

Из перечисленных выше свойств функции  $g_l$  следует, что  $l \in (n, n+1]$  тогда и только тогда, когда  $(a, b) \in G_n$  при всех  $n = m, m+1, \dots, 2m-1$ .

**Лемма 6.** Пусть  $n$  — целое число из набора  $m, m+1, \dots, [5m/3]$ . На множестве  $G_n$  граница области устойчивости семейства (7) задается равенствами

$$p(\zeta) + b \frac{\partial}{\partial a} p(\zeta - m + 1) = 0, \quad (15)$$

$$\int_0^\zeta \left( p(s) + b \frac{\partial}{\partial a} p(s - m + 1) \right) ds = \frac{2}{a+b}, \quad \zeta \in (n, n+1] \cap (m, 5m/3].$$

*Доказательство.* Первое из равенств (15) означает, что  $u(\zeta) = 0$  в точке  $\zeta \in (n, n+1]$ . Так как  $(a, b) \in G_n$ , то на том же интервале лежит первый нуль функции  $u$ . Так как  $u$  не может дважды обращаться в нуль на множестве  $(n, n+1]$ , то  $\zeta$  — ее первый нуль. Как отмечалось выше, этот нуль однозначно определяет кривую  $b = g_\zeta(a)$ , принадлежащую множеству  $G_n$ . Будем следить за изменением величины  $y(\zeta) = y(\zeta(a, b))$  при движении вдоль кривой  $b = g_\zeta(a)$ .

Пусть  $b = 0$ . Тогда  $0 = g_\zeta(a) = p_a(\zeta)$ , а так как  $\zeta \in (n, n+1]$ , то  $a < \alpha_{n-1} < 3/2$ , т.е.  $y(\zeta) > -1$  (см. п. 2.1). С другой стороны,  $g_\zeta(0) = \frac{1}{\zeta - m}$ , а так как по условию  $\zeta \leq 5m/3$ , то  $g_\zeta(0) \geq 3/2m$ , т.е.  $y(\zeta) \leq -1$ . Поскольку функция  $y(\zeta)$  непрерывно зависит от параметра  $a$ , то на кривой  $b = g_\zeta(a)$  есть точки, в которых  $y(\zeta) = -1$ . По формулам (9) и (12) имеем

$$2 = (a+b) \int_0^\zeta \left( p(s) + b \frac{\partial}{\partial a} p(s - m + 1) \right) ds,$$

что совпадает со вторым из равенств (15). □

Для каждого фиксированного  $m$  конечный набор равенств (15) определяет непустое множество пар коэффициентов  $(a, b)$  таких, что  $y(l) = y(l(a, b)) = -1$ .

Обозначим  $\Phi_m(u, v) = y(l(u, v))$ . Тогда равенство  $\Phi_m(u, v) = -1$  задает на плоскости  $Ouv$  график непрерывной кривой, разбивающей полосу  $\{(u, v) : 0 \leq u \leq \alpha_{m-1}, v \geq 0\}$  на две части. Та из них, которая содержит отрезок  $[0, \alpha_{m-1}]$ , соответствует ситуации  $\Phi_m(u, v) > -1$ , т. е. является областью устойчивости.

Теперь можно сформулировать признаки равномерной и экспоненциальной устойчивости семейства (7). Пусть

$$D_m = \{(u, v) : 0 < u < \alpha_{m-1}, \Phi_m(u, v) > -1\} \cup \{(u, v) : \alpha_{m-1} \leq u \leq 3/2, 0 \leq v < \varphi(u)\},$$

$$\bar{D}_m = \{(u, v) : 0 \leq u < \alpha_{m-1}, \Phi_m(u, v) \geq -1\} \cup \{(u, v) : \alpha_{m-1} \leq u \leq 3/2, 0 \leq v \leq \varphi(u)\}.$$

**Признак 4.** Пусть  $a \geq 0, b \geq 0, m \geq 2$ . Тогда

- семейство (7) экспоненциально устойчиво, если и только если  $(a, b) \in D_m$ ;
- семейство (7) равномерно устойчиво, если и только если  $(a, b) \in \bar{D}_m$ .

Для примера построим область устойчивости семейства (7) с конкретным запаздыванием.

Пусть  $m = 6$ . Тогда  $5m/3 = 10$ , следовательно, для построения области устойчивости достаточно располагать информацией о функции  $p$  на отрезке  $[0, 10]$ , т. е. воспользоваться свойством 1 при  $t \in [0, 10]$ .

Отметим на плоскости  $Ouv$  линии, соответствующие парам коэффициентов семейства (7), для которых  $l$  принимает все целые значения от 2 до 10.

Эти линии имеют следующий вид.

Во-первых, пять вертикальных прямых  $u = \alpha_{l-1}, l = \overline{2, 6}$ , где  $\alpha_l$  — первый корень многочлена  $H_l$ . Точка на каждой прямой определяет коэффициенты  $a = \alpha_{l-1}$  и  $b \geq 0$  уравнения (7), для которого  $l$  принимает целые значения от 2 до 6.

Во-вторых, четыре кривые  $v = g_l(u)$ , определенные на множествах  $0 \leq u \leq \alpha_{l-1}$  равенствами (14) при  $m = 6, l = \overline{7, 10}$ . Точка на каждой прямой определяет коэффициенты уравнения (7) (при этом  $0 \leq a \leq \alpha_{l-1}, b = g_l(a)$ ), для которого  $l$  принимает целые значения от 7 до 10.

Найдем границу области устойчивости. При  $u \in [\alpha_5, 3/2]$  граница области — график функции  $v = \varphi(u)$  (см. рис. 2). На каждом из множеств  $G_l$  граница области устойчивости задается равенствами (15) при  $m = 6, \zeta \in (l, l + 1], l = \overline{6, 9}$ . Последний участок границы, принадлежащий множеству  $G_9$ , заканчивается (при  $\zeta = 10$ ) на оси  $Ov$  в точке  $(0, 1/4)$ .

Область устойчивости  $D_6$  изображена на рис. 3. Точки  $(a, b)$ , лежащие ниже графика  $\Phi_6(u, v) = -1$ , включая интервалы  $(0, 3/2)$  на оси  $Ou$  и  $(0, 1/4)$  на оси  $Ov$ , образуют область экспоненциальной устойчивости. Точки, удовлетворяющие условию  $\Phi_6(u, v) = -1$ , и точка  $(0, 0)$  принадлежат области равномерной устойчивости.

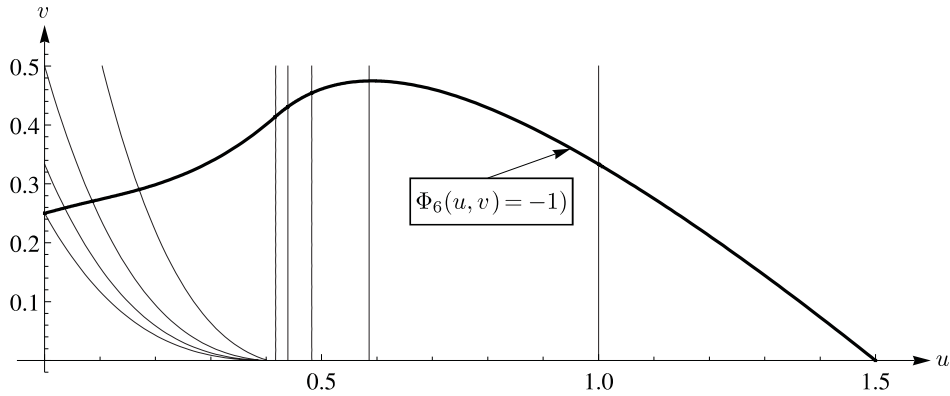
Аналогичным образом строятся области устойчивости для любого целого  $m$ . На рис. 4 изображены области  $D_m$  для всех целых  $m$  от 2 до 15.

#### 2.4. Абсолютная устойчивость.

Обозначим  $D_{\text{abs}} = \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$ . Точки, принадлежащие  $D_{\text{abs}}$ , задают коэффициенты экспоненциально устойчивых семейств (7) при всех  $m \geq 1$ . Поэтому  $D_{\text{abs}}$  естественно назвать областью абсолютной устойчивости.

Поскольку множества  $D_m$ , очевидно, упорядочены по вложению, то для аналитического описания и построения области абсолютной устойчивости достаточно проследить, как меняются множества  $D_m$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Пусть  $u \in (1/e, 3/2]$ . При каждом фиксированном  $m$  граница области  $D_m$  на отрезке  $[\alpha_{m-1}, 3/2]$  совпадает с графиком функции  $\varphi$ , определяемой леммами 2 и 3. Так как

Рис. 3. Область устойчивости для  $m = 6$ 

$\alpha_m \rightarrow 1/e$  при  $m \rightarrow \infty$ , область  $D_{\text{abs}}$  есть множество точек, лежащих под графиком функции  $\varphi$  на интервале  $(1/e, 3/2]$ .

Вид множества  $D_{\text{abs}}$  при  $u \in (0, 1/e]$  определяется следующим утверждением.

**Лемма 7.** Пусть  $a \in (0, 1/e]$ ,  $b > 0$ . Тогда

- (а) если  $b > a$ , то при некотором  $m$  семейство (7) не является устойчивым;
- (б) если  $b \leq a$ , то семейство (7) экспоненциально устойчиво при любом  $m \geq 1$ .

*Доказательство.* Для  $a \in (0, 1/e]$  рассмотрим последовательность кривых  $b = g_{m+1}(a)$ . Из формулы (13) следует  $g_{m+1}(a) = p(m+1)$ , где  $p$  — решение задачи (3) при  $\alpha = a$ . Согласно свойству 3 величина  $p(m+1)$  с ростом  $m$  стремится к нулю, монотонно убывая. Значит, начиная с некоторого номера точка  $M(a, b)$  лежит выше всех кривых  $g_{m+1}$  и первые минимумы  $l_m$  решений test-задач с коэффициентами  $(a, b)$  лежат на отрезках  $(m, m+1]$ . Из формулы (13) следует  $p(l_m) = b_0(l_m - m)$ , значит,  $\lim_{m \rightarrow \infty} (l_m - m) = 0$ . Для решения  $y$  test-задачи имеем

$$y(l_m) = 1 - \frac{a+b}{a}(1 - p(l_m + 1)) + \frac{1}{2}b(a+b)(l_m - m)^2. \quad (16)$$

Очевидно,  $\lim_{m \rightarrow \infty} y(l_m) = -b/a$ , значит, при  $b > a$  начиная с некоторого номера имеем  $y(l_m) < -1$ , что дает неустойчивость семейства (7). Если же  $b \leq a$ , то из (16) вытекает  $y(l_m) > -b/a \geq -1$ , т. е. семейство (7) устойчиво при всех  $m \geq 1$ .  $\square$

Дополним лемму 7 случаями нулевых коэффициентов. При  $a = 0$  область экспоненциальной устойчивости уравнения (7) пуста; при  $b = 0$ ,  $0 < a < 3/2$  семейство (7) экспоненциально устойчиво для всех  $m$ . Объединяя все вышесказанное, получаем полное описание области абсолютной устойчивости на рис. 4.

**Теорема.** Семейство (7) абсолютно устойчиво, если и только если выполнено одно из условий:

- $0 < a \leq 1/e$  и  $b \leq a$ ;
- $1/e \leq a < 3/2$  и  $0 \leq b < \varphi(a)$ .

В заключение опишем поведение решения семейства (7) на границах множества  $D_{\text{abs}}$ . Если  $a = b$  при  $a \in (0, 1/e]$ , то семейство (7) экспоненциально устойчиво для всех  $m \geq 1$ . Если  $b = \varphi(a)$  при  $a \in (1/e, 3/2]$ , то семейство (7) равномерно устойчиво для всех  $m \geq 1$ , но не является экспоненциально устойчивым. Если  $b = 0$ , то при  $a \in (0, 3/2)$  семейство

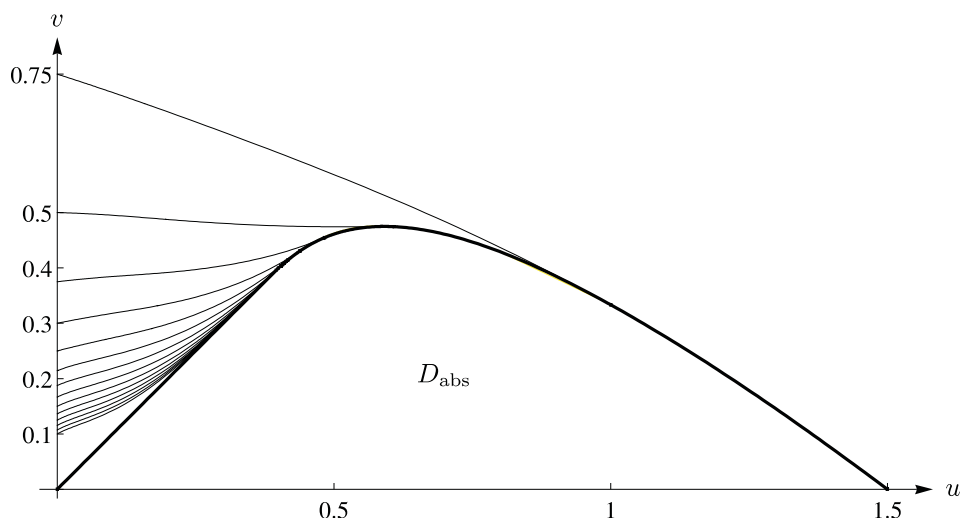


Рис. 4. Область абсолютной устойчивости

(7) экспоненциально устойчиво для всех  $m \geq 1$ . Наконец, при  $a = b = 0$  семейство (7) равномерно устойчиво для всех  $m \geq 1$ , но не является экспоненциально устойчивым.

Мы признательны всем участникам Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям за интерес к нашим исследованиям и обсуждение результатов.

Наша особая благодарность А.С.Баладину, написавшему программу, с помощью которой удалось построить графически области устойчивости с неявным параметрическим видом аналитического описания.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Малыгина В.В., Чудинов К.М. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I*, Изв. вузов. Матем., № 6, 25–36 (2013).
- [2] Малыгина В.В., Чудинов К.М. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II*, Изв. вузов. Матем., № 7, 3–15 (2013).
- [3] Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решения линейного функционально-дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **9** (6), 1026–1036 (1973).
- [4] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом*, Изв. вузов. Матем., № 6, 3–16 (1997).
- [5] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с обыкновенными производными* (Изд-во Пермск. ун-та, Пермь, 2001).
- [6] Малыгина В.В. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последствием*, Изв. вузов. Матем., № 5, 72–85 (1993).
- [7] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (Наука, М., 1972).
- [8] Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А. *О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом*, Дифференц. уравнения **18** (8), 1463–1465 (1982).
- [9] Гусаренко С.А., Домошницкий А.И. *Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка*, Дифференц. уравнения **25** (12), 2090–2103 (1989).
- [10] Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения* (Физматгиз, М., 1959).
- [11] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* (Мир, М., 1984).
- [12] Андронов А.А., Майер А.Т. *Простейшие линейные системы с запаздыванием*, Автоматика и телемеханика **7** (2, 3), 95–106 (1946).

*В.В. Малыгина*

*доцент, кафедры вычислительной математики и механики,  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,*

**e-mail:** mavera@list.ru

*К.М. Чудинов*

*доцент, кафедры вычислительной математики и механики,  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,*

**e-mail:** cyril@list.ru

*V.V. Malygina and K.M. Chudinov*

### **Stability of solutions to differential equations with several variable delays. III**

*Abstract.* We consider a class of scalar linear differential equations with several variable delays and constant coefficients. We treat the coefficients and maximum admissible values of delays as parameters that define a family of equations of the considered class. Using the necessary and sufficient stability conditions established in preceding papers, we obtain an analytic form and a geometric interpretation of boundaries of stability domains for families of equations with a small number of independent parameters.

*Keywords:* functional differential equation, variable delay, stability.

*V.V. Malygina*

*Associate Professor, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,  
Perm National Research Polytechnic University,  
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,*

**e-mail:** mavera@list.ru

*K.M. Chudinov*

*Associate Professor, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,  
Perm National Research Polytechnic University,  
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia*

**e-mail:** cyril@list.ru