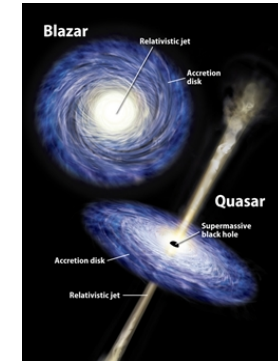


***Математическое и
компьютерное моделирование
образования хаоса в полях
тяготения с осевой
симметрией при наличии голой
сингулярности***



**Д.В. Гальцов, К.В. Кобялко.
Moscow state University
and
Kazan Federal University**

GRACOS 17, Kazan, 4-6 November 2017

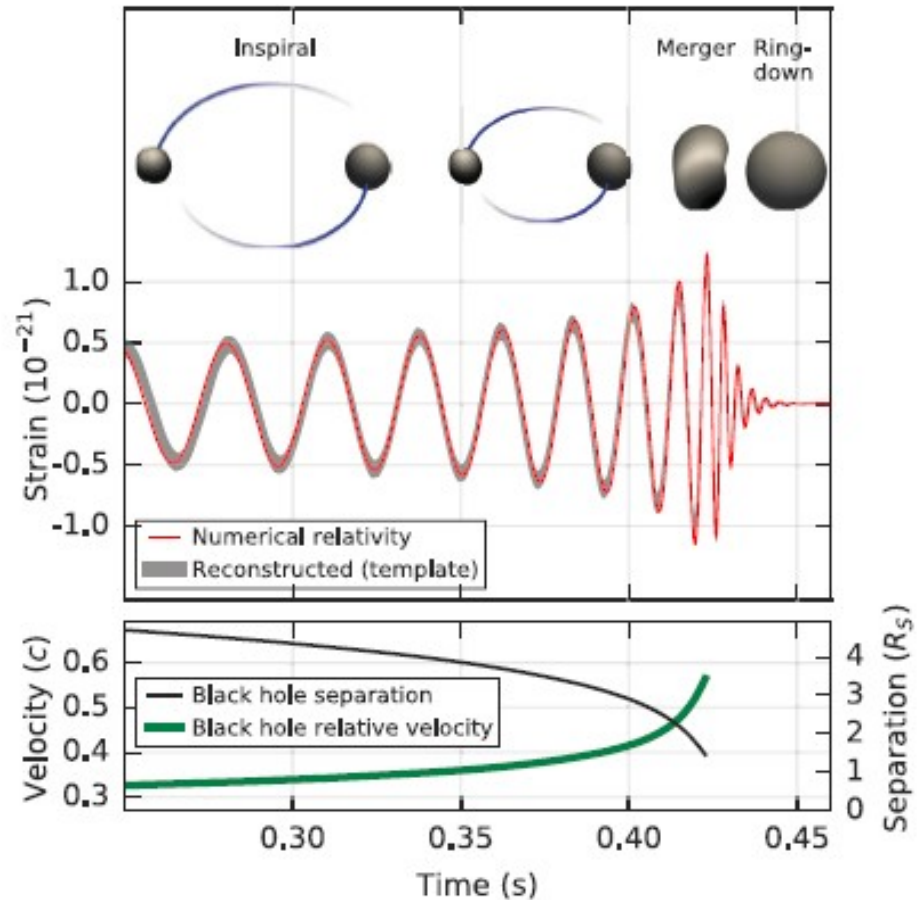
С открытием темной материи и темной энергии круг полевых моделей, считающихся сейчас физически допустимыми, расширился в сторону возможного нарушения сильного, слабого и нулевого энергетических условий, а также нарушения принципа космической цензуры. В космологии получили широкое распространение теории со скалярным полем, в которых допускаются отрицательные потенциалы самодействия и даже отрицательный знак кинетического члена (фантомная материя). Применительно к коллапсарам подобные допущения приводят к возможности некерровских черных дыр, а также голых сингулярностей и кротовых нор в качестве альтернативного конечного состояния. Более того, было доказано аналитически, и численно, что голые сингулярности могут возникать при коллапсе и обычной материи или скалярного поля. Проблема космической цензуры в последнее время стала рассматриваться как важнейший вопрос, на который следует искать ответ на основании астрофизических наблюдений. Заметим, что хотя интерпретация результатов LIGO с большой вероятностью дала подтверждение стандартной теории черных дыр, следует отметить, что важнейшая в анализе данных стадия «затухания звона» (ringdown) при слиянии черных дыр ассоциировалась с квазинормальными модами, которые, как выяснилось в самое последнее время, могут быть и не связаны с существованием горизонта событий, а опираются на структуру сильного гравитационного поля, создающего замкнутые фотонные орбиты (light rings), находящиеся на существенном удалении от горизонта

GW150914 (first detection)

Merging of two black holes with masses 36 and 29 SM with formation of a black hole of 62 SM. The distance from the Earth is about 1/30 of the size of the visible universe

The energy equivalent to three solar masses was released in the form of gravitational waves, with power $3.6 \cdot 10^{56}$ erg/sec in the frequency range 25 – 350 Hz

The second detection was in December 2015: merging of 7.5 and 14 SM with 1 SM released as gravity waves



Альтернативы черным дырам стали предметом активного изучения и визуализации в особенности с появлением новых астрофизических проектов «The Event Horizon Telescope» и «BlackHoleCam», которые позволят построить детальную картину объекта SagA*, предположительно являющегося сверхмассивной черной дырой в центре Галактики. При этом, в противоположность четким предсказаниям для черных дыр, в теории гравитации пока нет классификации или даже простого перечня решений с голыми сингулярностями (речь идет не о математически-формальном перечислении типов сингулярностей, которое в литературе имеется, а о сингулярностях в конкретных решениях уравнений, каковых слишком много), которые могли бы дать ориентиры для астрофизического моделирования. То же относится и к кротовым норам.

1. Нарушение теорем об отсутствии волос, не нарушающее принципов теории черных дыр, а лишь апеллирующее к ранее неизученным её возможностям, представляется сейчас одним из наиболее обещающих направлений поиска альтернатив модели Керровской черной дыры

Yes-hair and non-uniqueness

The original no-hair theorem proves that all black hole solutions of the Einstein-Maxwell equations of gravitation and electromagnetism can be completely characterized by only three externally observable classical parameters: mass, angular momentum and electric charge. All other information (for which "hair" is a metaphor) about the matter which formed a black hole or is falling into it, "disappears" behind the black-hole event horizon and is therefore permanently inaccessible to external observers.

- However later on it was discovered that in more complicated field theories than Maxwell, black hole with some hair are possible: Einstein-Yang-Mills (Volkov and Gal'tsov, Gravitating nonAbelian solitons and black holes with Yang-Mills fields, Phys. Rept. 319 (1999) 1 Einstein-Skyrme (Bizon...), more recently – Einstein-complex scalar (Herdeiro and Radu). It becomes clear that 'hairy' BH are generic. But unstable! This is so in $D=4$: in higher dimensions a variety of stable BHs violating uniqueness are found
- Moreover, two years ago it was discovered that black holes may carry so-called Bondi-Metzner-Sachs quantum hair, associated with infinite symmetries of the asymptotical metrics. These may be relevant for resolution of the information paradox raised by Hawking: information is lost when matter falls into black hole and is not restored in the thermal evaporation process

2. Другим «квазитрадиционным» направлением является исследование метрик с параметром Ньюмена-Унти-Тамбурино (НУТ), который иначе интерпретируется как магнитная масса. Эти решения сейчас активно используются для альтернативной визуализации коллапсаров, хотя в теории гравитации они вызывают возражения в связи с особенностью на полярной оси (струной Дирака-Мизнера).

3. Далее следуют отклонения от стандартной теории, допускающие нарушение принципа космической цензуры. Интересный класс решений, которые можно интерпретировать как деформацию черных дыр в голую сингулярность, представляют так называемые гамма-метрики (Зипой-Ворхис). Еще один класс представляют решения со скалярным полем Фишера-Яниса-Ньюмена-Виникура, которые можно интерпретировать как результат поглощения черной дырой Шварцшильда источника минимального вещественного скалярного поля. В отличие от поглощения электрического заряда, превращающего решение в рейсснер-нордстремовское, в скалярном случае горизонт становится изотропной сингулярностью. Соответствующее решение можно понимать как предел дилатонной черной дыры с нулевым значением электрического заряда. Заметим, что дилатонная черная дыра также рассматривается как часть «стандартной модели». Эта теория, однако, качественно отличается от теории с дилатоном и аксионом, в которой легко получить вращающееся решение. В случае число дилатонной теории такого аналитического решения нет (кроме специальных случаев дилатонной константы связи

Для построения решения ЗВТН будем использовать формулировку Эрнста вакуумных уравнений Эйнштейна для стационарных метрик в сфероидальных координатах

$$d\tilde{s}^2 = -f(dt + \omega d\phi)^2 + f^{-1}e^{2v}(x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right) + f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2)d\phi^2. \quad (1)$$

Вводя комплексный потенциал Эрнста [14]:

$$i\mathcal{E} = if - \chi, \quad (2)$$

уравнения Эйнштейна можно представить в виде [10]:

$$(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})\nabla^2\mathcal{E} = 2(\nabla\mathcal{E})^2 \quad (3)$$

в совокупности с уравнениями дуализации:

$$\omega_{,x} = (1 - y^2)f^{-2}\chi_{,y}, \quad \omega_{,y} = -(x^2 - 1)f^{-2}\chi_{,x}, \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (4) инвариантны относительно преобразований Эйлера

$$(i\mathcal{E})^{-1} \rightarrow (i\mathcal{E})^{-1} + \gamma. \quad (5)$$

Применение преобразования (5) к метрике ЗВ в сфероидальных координатах [10] позволяет получить решение, содержащее НУТ заряд:

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + R^2 d\phi^2, \quad (6)$$

где вводятся следующие обозначения:

$$R^2 = L^2 f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad \Sigma^2 = L^2 f^{-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right)^{\delta^2} (x^2 - y^2), \quad (7)$$

$$f = \frac{a}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\delta + \gamma^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\delta}, \quad \omega = 2Ny + C, \quad N = 2\gamma\delta L/a. \quad (8)$$

при этом ϕ периодическая координата с периодом 2π , δ, γ, C произвольные вещественные параметры, первый называют параметром деформации. Поведение инварианта Кречмана $R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}$ при различных значениях параметра деформации приведено в таблице (Табл. I), где вводится семейство несингулярных при $x = \pm 1$ функций $Z(x, \delta)$.

Таблица I: Инвариант Кречмана $R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}$.

δ	I	P^\pm	$x = \pm y \neq \pm 1$
$\delta > 2$	∞	0	0
$\delta = 2$	∞	$\frac{3a^2}{4L^4}$	0
$\sqrt{3/2} < \delta < 2$	∞	∞	0
$\delta = \sqrt{3/2}$	∞	∞	$Z(x, \delta)$
$1 < \delta < \sqrt{3/2}$	∞	∞	∞
$\delta = 1$	$Z(1, \delta)$	$Z(1, \delta)$	$Z(x, \delta)$
$0 < \delta < 1$	∞	∞	∞
$\delta = 0$	0	0	0

Непосредственно видно, что имеется три типа потенциальных сингулярностей:

- Множество $x = \pm y$. Может быть сингулярностью кривизны для $0 < |\delta| < 1$ и $1 < |\delta| < \sqrt{3/2}$

- Множества I ($x = \pm 1$) являются сингулярностями кривизны для $\delta \neq 0, \pm 1$. Отметим основные изменения по сравнению с случаем чистого решения ЗВ в том, что при $\delta = -1$ решение не имеет расходимости в кривизне, в случае не равного нулю НУТ заряда.

- В точках P^\pm ($x = 1, y = \pm 1$) сингулярности кривизны нет при $\delta = 0, \pm 1, \pm 2$ и $\delta > 2$. Помимо этого очевидно, что зеркальные точки $x = -1, y = \pm 1$ с $-\delta$ обладают тем же самым набором свойств с точностью до умножения на фактор γ^2 , в частности становятся горизонтами при $\delta = 0, \pm 1, \pm 2$ и $|\delta| > 2$. Действительно нетрудно видеть, что

$$f = \frac{a(x^2 - 1)^\delta}{(x + 1)^{2\delta} + \gamma^2 (x - 1)^{2\delta}}, \quad f = \frac{a(x^2 - 1)^{|\delta|}}{\gamma^2 (x + 1)^{2|\delta|} + (x - 1)^{2|\delta|}}, \quad (9)$$

при $\delta > 0$ и $\delta < 0$ соответственно.

Как известно, круговые орбиты играют особенно важную роль в изучении гравитационных свойств центрального тела. В частности нас будет интересовать области существования и стабильности круговых орбит и орбит постоянного радиуса и широты (ОПРШ) [18]. Можно показать, что в общем случае переменные в уравнении Гамильтона-Якоби метрики ЗВТН не разделяются ввиду отсутствия тензора Киллинга, который существует для метрик типа D (данная метрика имеет тип I. Однако удается построить двумерный эффективный потенциал содержащий, в частности, информацию о круговых орбитах и их стабильности [18, 19]. Прежде всего параметризованные собственным аффинным временем геодезические удовлетворяют следующему уравнению нормировки ds^2 :

$$\epsilon = -f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})^2 + \Sigma^2 \left(\frac{\dot{x}^2}{x^2 - 1} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2} \right) + R^2\dot{\phi}^2, \quad (17)$$

где $\dot{}$ обозначает производную по собственному времени, а $\epsilon = 0, 1, -1$ для изотропных пространственно подобных и времени подобных кривых соответственно. Два вектора

Киллинга $\xi_{(t)}^\mu$ и $\xi_{(\phi)}^\mu$ определяют два интеграла движения:

$$f(\dot{t} - \omega\dot{\phi}) = E, \quad (18)$$

$$f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})\omega + L^2 f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2)\dot{\phi} = l, \quad (19)$$

где E и l интерпретируются как энергия и орбитальный момент пробной частицы.

Уравнение (17) можно записать в терминах эффективного потенциала:

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V_{eff}(\rho, z) = 0, \quad (20)$$

где

$$V_{eff}(x, y) = \frac{1}{2}e^{-2\gamma} \left(-E^2 - \epsilon f + \frac{f^2 \hat{l}^2}{L^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} \right). \quad (21)$$

где $\hat{l} = l - E\omega$. Удобнее работать с укороченным потенциалом $V = 2V_{eff}e^{2\gamma}$. Далее мы сосредоточим внимание на времениподобных геодезических $\epsilon = -1$ в случае $C = 0$.

Выясним, где расположен минимум потенциала (21), в частности ОПРШ, лежащие в экстремуме [20]:

$$V = \partial V / \partial x = \partial V / \partial y = 0. \quad (22)$$

Получим следующие значения орбитального момента частицы l :

$$l = EC \pm \sqrt{\Pi/a^2 + 4E^2N^2}, \quad \Pi = \frac{aL^2\Psi(\xi^2 - \zeta^2)}{(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta}. \quad (23)$$

где $\xi = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\delta$, $\zeta = \gamma^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\delta$, $\Sigma = \xi + \zeta$ и $\Psi = x^2 - 1$. Энергия E при этом определяется выражением:

$$E^2 = (a/\Sigma) \frac{(x - \delta)\xi + (x + \delta)\zeta}{(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta}. \quad (24)$$

Для положения орбиты постоянного радиуса и широты в плоскости x, y получим:

$$y_o^2 = \frac{1}{1 + \Theta}, \quad \Theta = \frac{\Psi\Sigma^2(\xi - \zeta)}{16\gamma^2\delta[(x_o - \delta)\xi + (x_o + \delta)\zeta]}, \quad (25)$$

а x_o формально любое. Ограничение для координаты $|y| < 1$ приводит к простому условию $\Theta > 0$. Тогда выражение для скоростей $u = \frac{dt}{ds}$ и $\omega_o = \frac{d\phi}{ds}$:

$$u = \frac{\Psi\Sigma^2 + 16\gamma^2\delta^2}{\Psi\Sigma} \sqrt{\frac{(x - \delta)\xi + (x + \delta)\zeta}{a\Sigma[(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta]}}, \quad (26)$$

$$\omega_o = \frac{4a\gamma\delta u}{Ly_o(\Psi\Sigma^2 + 16\gamma^2\delta^2)} \quad (27)$$

Из (25), (26) и (27) очевидно, что ОПРШ в метрике ЗВГН расположены в плоскостях параллельных экваториальной, что отличается от случая решения ЗВ, где подобные орбиты лежат в экваториальной плоскости. Можно показать, что при $|\gamma| < 1$ и достаточно больших x (по крайней мере $x \gg 2\delta$) существуют орбиты постоянного радиуса и широты, причем:

$$\Pi > 0, \quad \Theta > 0, \quad E^2 > 0. \quad (28)$$

В пределе получим следующую орбиту, в нормировке $a = 1 + \gamma^2$:

$$y \rightarrow \pm 0, \quad u \rightarrow 1, \quad \omega_o \rightarrow \pm 0, \quad x_o \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Мы видим, что на больших расстояниях орбиты постоянного радиуса и широты расположены в окрестности экваториальной плоскости ($y = 0$), при этом угловая скорость стремится к нулю. Данные орбиты устойчивы по направлениям x и y .

При $|\gamma| > 1$ ситуация отличается тем, что нарушается условие $|y| < 1$, и исчезает устойчивость в направлении y , однако, есть устойчивость в направлении x . При этом момент l не определён при достаточно больших x . Соответственно на больших расстояниях хорошо определённых ОПРШ вообще говоря нет.

При $|\gamma| = 1$ ситуация более интересна. В пределе нет орбит постоянного радиуса и широты в экваториальной плоскости, однако, они существуют в двух параллельных плоскостях:

$$y \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad u \rightarrow 1, \quad \omega_o \rightarrow \pm 0 \quad x_o \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Из соображений симметрии, очевидно, должны также существовать экваториальные круговые орбиты, удовлетворяющие лишь условию радиального минимума потенциала (22). Соответствующий одномерный потенциал имеет вид:

$$V_{eff}(x) = \frac{1}{2} e^{-2\gamma} \left(-E^2 + f + \frac{f^2 l^2}{L^2(x^2 - 1)} \right). \quad (31)$$

Условие минимума укороченного потенциала даёт для орбитального момента и энергии выражения:

$$l^2 = \frac{L^2 \Psi(\xi^2 - \zeta^2) \delta}{a[(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta]}, \quad E^2 = \frac{a[(x - \delta)\xi + (x + \delta)\zeta]}{\Sigma[(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta]}. \quad (32)$$

Нетрудно заметить, что области определения данных величин совпадают с соответствующими областями определения ОПРШ.

При фиксированных значениях орбитального момента и энергии, движение в метрике ЗВГН сводится к двумерному. Начальные условия фиксируются при этом дополнительно условием нормировки (17). Соответствующую четырёхмерную динамическую систему можно рассматривать как возмущение динамической системы Шварцшильда или Тауб-НУТ, которые, очевидно, интегрируемы. В силу теорем Колмогорова-Арнольда-Мозера [21, 22] и Пуанкаре-Биркоффа [23] небольшие возмущения метрики деформируют инвариантные нерезонансные торы траекторий исходной динамической системы. Из резонансных торов (периодических) остаётся лишь чётное число - стабильные и нестабильные орбиты.

Займемся численным исследованием вопроса о возникновении геодезического хаоса в метрике ЗВГН. Наиболее удобными для данного анализа являются сфероидальные координаты (x, y) . Лагранжиан свободной частицы имеет вид:

$$L = -f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})^2 + \Sigma^2 \left(\frac{\dot{x}^2}{x^2 - 1} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2} \right) + R^2\dot{\phi}^2 = \epsilon, \quad (5)$$

где $\dot{}$ обозначает производную по собственному времени, а $\epsilon = 0, 1, -1$ для изотропных-пространственно-подобных и времени-подобных кривых соответственно. Два вектора Киллинга $\xi_{(t)}^\mu$ и $\xi_{(\phi)}^\mu$ определяют два интеграла движения[14]:

$$f(\dot{t} - \omega\dot{\phi}) = E, \quad (6)$$

$$f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})\omega + L^2 f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2)\dot{\phi} = l, \quad (7)$$

где E и l интерпретируются как энергия и орбитальный момент пробной частицы. Отметим, что уравнение (5) можно записать в терминах эффективного потенциала[15]:

$$T + V_{eff} = 0, \quad (8)$$

где

$$V_{eff}(x, y) = \frac{1}{2}e^{-2\gamma} \left(-E^2 - \epsilon f + \frac{f^2 \hat{l}^2}{L^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} \right), \quad (9)$$

а T обобщённая кинетическая энергия. Однако в ряде случаев удобнее работать с укороченным потенциалом $V = 2V_{eff}e^{2\gamma}$. С использованием, интегралов движения (6) и (7), из

лагранжиана (5) получим следующую систему дифференциальных уравнений эквивалентную некоторой четырёх-мерной динамической системе:

$$2A\ddot{x}(s) + 2\dot{x}(s) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x}(s) + \frac{\partial A}{\partial y} \dot{y}(s) \right) - \frac{\partial B}{\partial x} \dot{y}^2(s) - \frac{f^2 \hat{l}^2 \partial R^2 / \partial x}{L^4 (x^2(s) - 1)^2 (1 - y^2(s))^2} + f^{-2} \frac{\partial f}{\partial x} E^2 = 0, \quad (10)$$

$$2B\ddot{y}(s) + 2\dot{y}(s) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \dot{y}(s) + \frac{\partial B}{\partial x} \dot{x}(s) \right) - \frac{\partial A}{\partial y} \dot{x}^2(s) - \frac{f^2 \hat{l}^2 \partial R^2 / \partial y}{L^4 (x^2(s) - 1)^2 (1 - y^2(s))^2} - \frac{8f \hat{l} \gamma \delta E}{aL(x^2(s) - 1)(1 - y^2(s))} = 0, \quad (11)$$

где

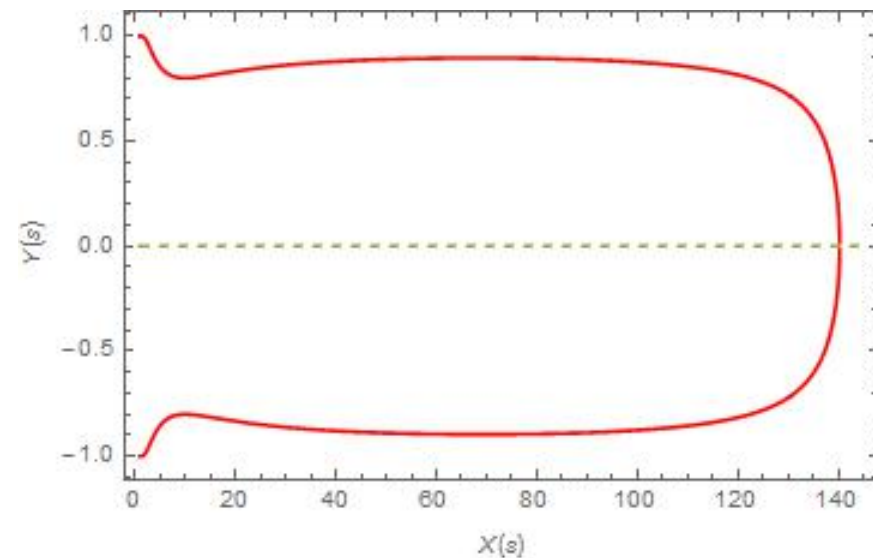
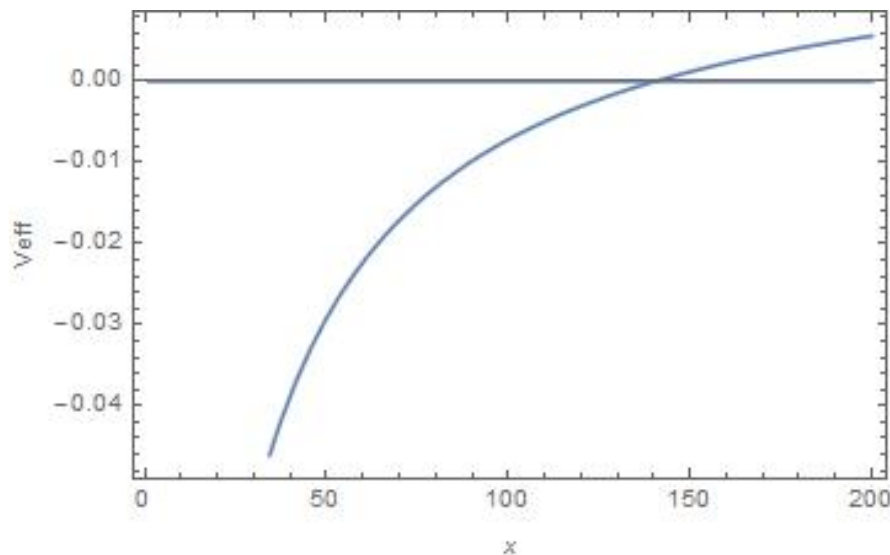
$$A = \frac{\Sigma^2}{x^2 - 1}, \quad B = \frac{\Sigma^2}{1 - y^2}, \quad \hat{l} = l - E\omega. \quad (12)$$

Таким образом, при фиксированных значениях момента и энергии, движение в метрике ЗВТН сводится к двумерному, и проходит в области, ограниченной кривыми нулевых скоростей (КНС) $V = 0$, начальные условия фиксируются условием нормировки (5). Решение ЗВТН можно рассматривать как деформацию решения Шварцшильда или Тауб-НУТ, для которых уравнения геодезических являются интегрируемыми системами. В силу теорем Колмогорова-Арнольда-Мозера [16, 17] и Пуанкаре-Биркоффа [18] небольшие возмущения метрики деформируют инвариантные нерезонансные торы траекторий исходной динамической системы. Из резонансных торов (периодических) остаётся лишь чётное число - стабильные и нестабильные орбиты.

Структура всех этих орбит традиционно исследуется при помощи двумерных сечений Пуанкаре в фазовом пространстве, при этом инвариантным торам соответствуют замкнутые кривые в фазовой плоскости (x, \dot{x}) образующие так называемые главные острова стабильности. Однако, помимо этого, в случае неинтегрируемой системы могут возникать дополнительные острова стабильности, формирующиеся вокруг вторичных стабильных орбит. Между этими островами формируются нестабильные периодические орбиты, из которых выходят их асимптотические орбиты. Стабильные асимптотические орбиты не могут пересекать себя или другие устойчивые асимптотические орбиты и стремятся к периодическим орбитам в обратном (прямом) течении временного параметра. Последнее свойство асимптотических орбит в сочетании с неперекрестным свойством порождает на поверхности сечений колебания орбит гомоклинический эффект «хаоса» [19, 20].

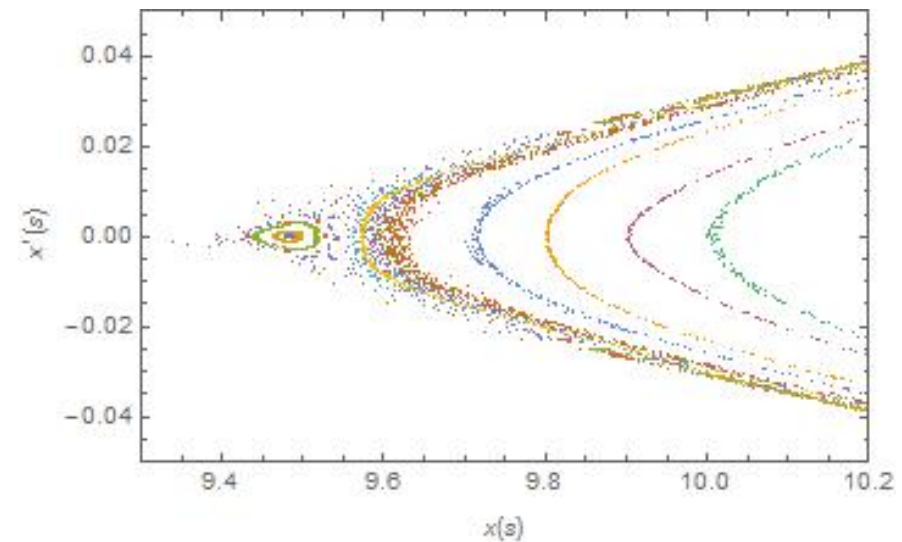
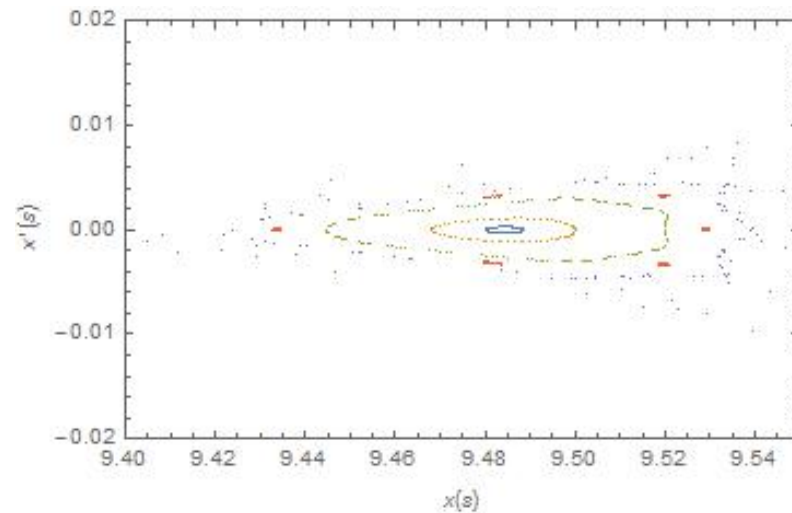
Для построения сечения Пуанкаре обычно выбирают сечение $y = 0$. В силу симметрии этот выбор наиболее оптимален, однако, как мы увидим далее, он не всегда возможен. Вместо этого мы будем пользоваться другими сечениями, такими как минимум потенциала V . При этом, в отличие от симметричного случая, кривые в сечениях Пуанкаре расщепляются, поэтому накладывается дополнительное условие $\dot{y} > 0$. Нас будет интересовать появление дополнительных островов стабильности и областей хаоса свидетельствующие в пользу неинтегрируемости соответствующей динамической системы. При численном построении сечений Пуанкаре с использованием Wolfram Mathematica начальные данные фиксируются условием нормировки.

- Хаос в пространстве Зипой-Вурхис. Начнём с хорошо известного случая возникновения хаоса в пространстве ЗВ с значением параметра деформации $\delta \neq 1$. В качестве примера рассмотрим случай $\gamma = C = 0$, $\delta = 3$, $L = 1$. Фиксируем орбитальный момент и энергию частицы следующим образом $l = 7$, $E = 0.98$. Из вида эффективного потенциала (Рис.1) очевидно, что в данном случае некоторые частицы могут упасть на сингулярность, так как нет потенциального барьера, тем не менее, существует довольно широкая зона, в которой геодезические устойчивы.



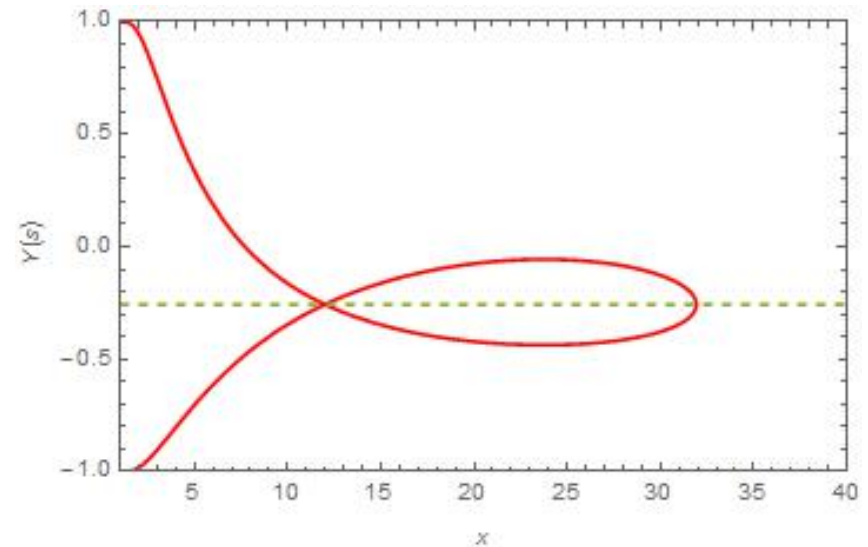
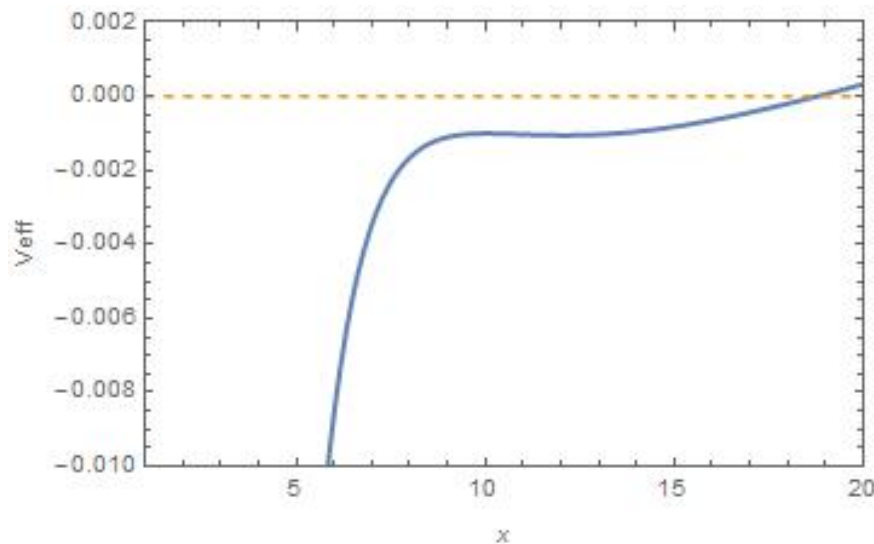
Кривая нулевых скоростей и пример стабильной геодезической изображен на (Рис.2).

Нетрудно заметить, что на границе зоны устойчивости возникает дополнительный остров стабильности (Рис.3) при этом на границе между новым и исходным островом невозмущённого решения возникает область, где фактически число островов стабильности стремится к бесконечности, возникают нестабильные периодические орбиты и хаос (Рис.4). Существование таких зон служит основанием считать пространство ЗВ неинтегрируемой системой. Этим примером мы ограничимся, так как подробный анализ случая $\gamma = 0$ можно найти например в работе [19].

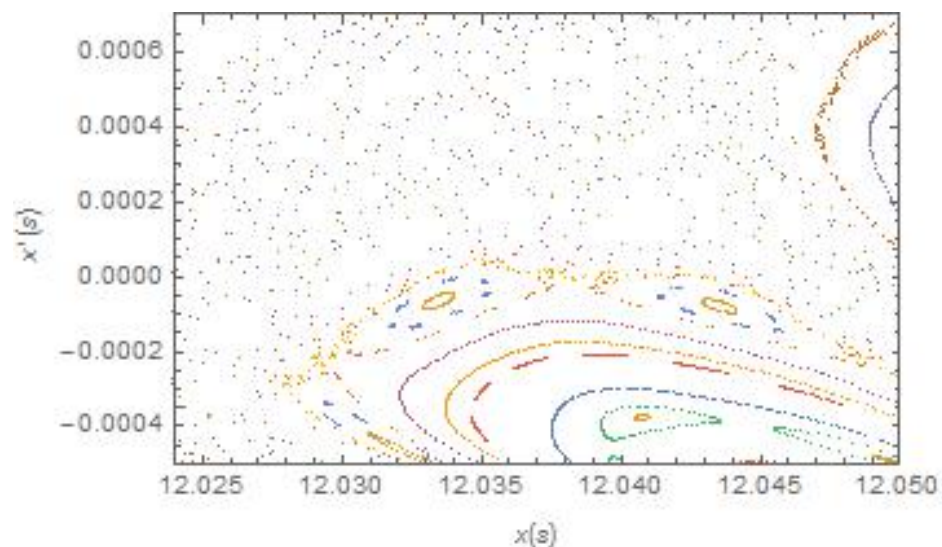
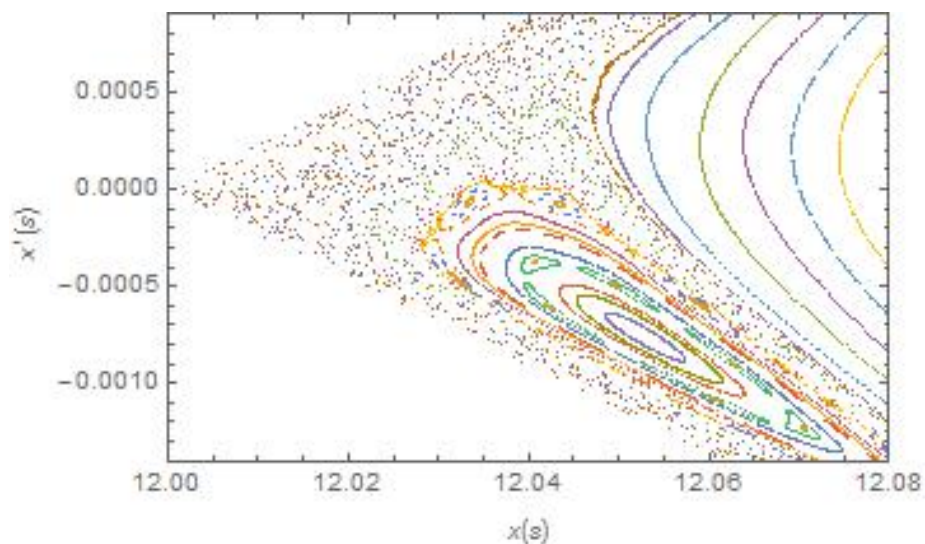


- Рассмотрим случай метрики ЗВГН с положительной полной массой. В начале снова положим $\delta = 3$, но уже с НУТ зарядом $\gamma = 1/4$. Кроме того энергию и орбитальный момент выберем таким образом, чтобы на границе области существовала неустойчивая круговая орбита $l = -10.5443$, $E = 0.957535$.

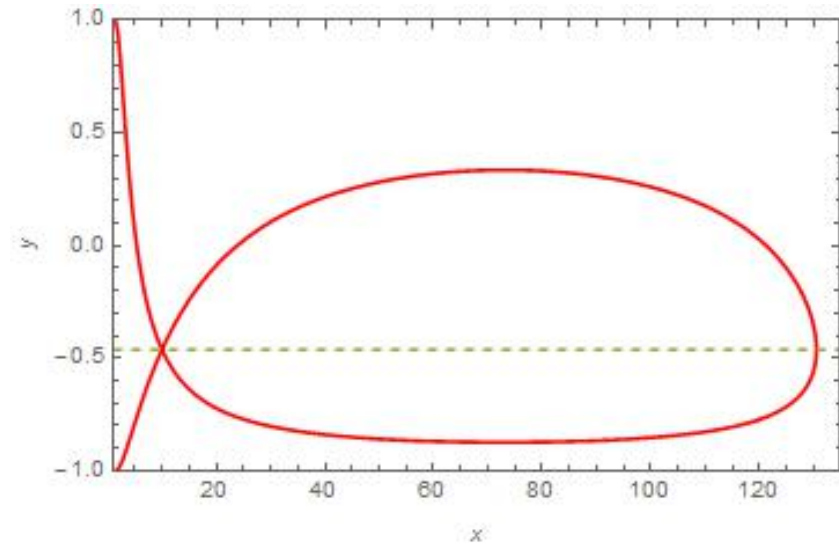
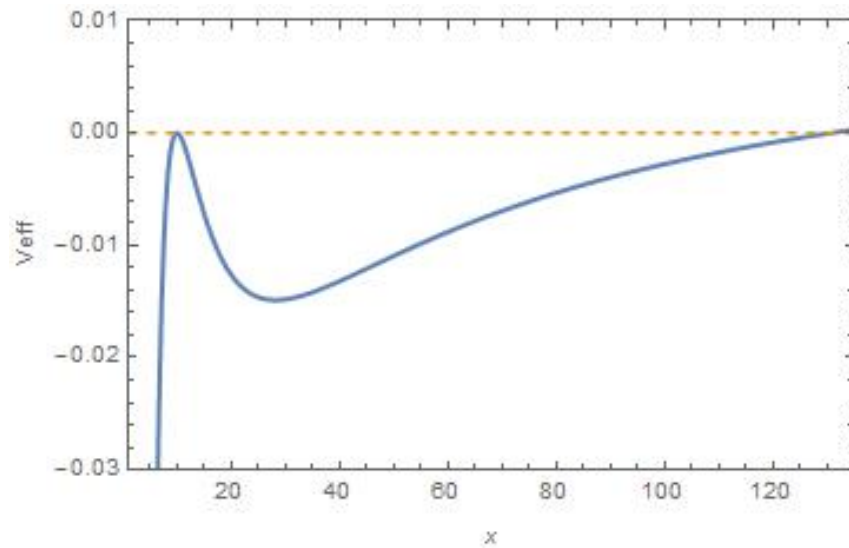
Мы видим, что нет потенциального барьера и возможности убегания на бесконечность, кроме того, как можно видеть из (Рис.5), все геодезические заключены в области КНС с параметрами $12 < x < 32$ или $x \cong 7\delta$. Очевидно, что в данном случае нельзя воспользоваться сечением $y = 0$, так как геодезические вовсе не достигают данной гиперплоскости. Поэтому для построения сечения Пуанкаре воспользуемся условием $y = y_0$ - где, y_0 минимум эффективного потенциала ($\partial_y V = 0$) пунктирная линия на рисунке (Рис.6). При этом в следствии отсутствия надлежащей симметрии изображение может потерять симметрию.

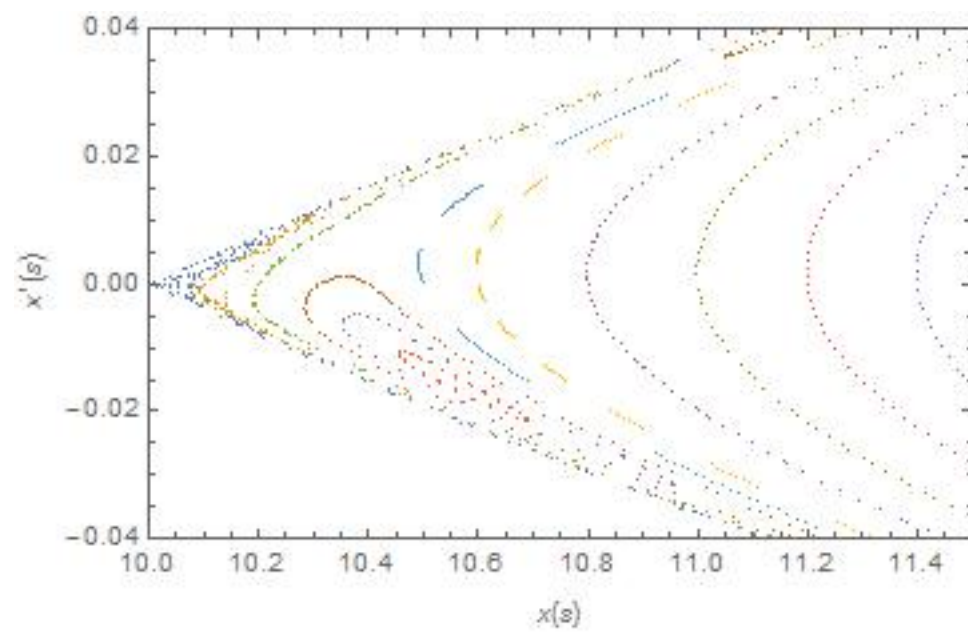
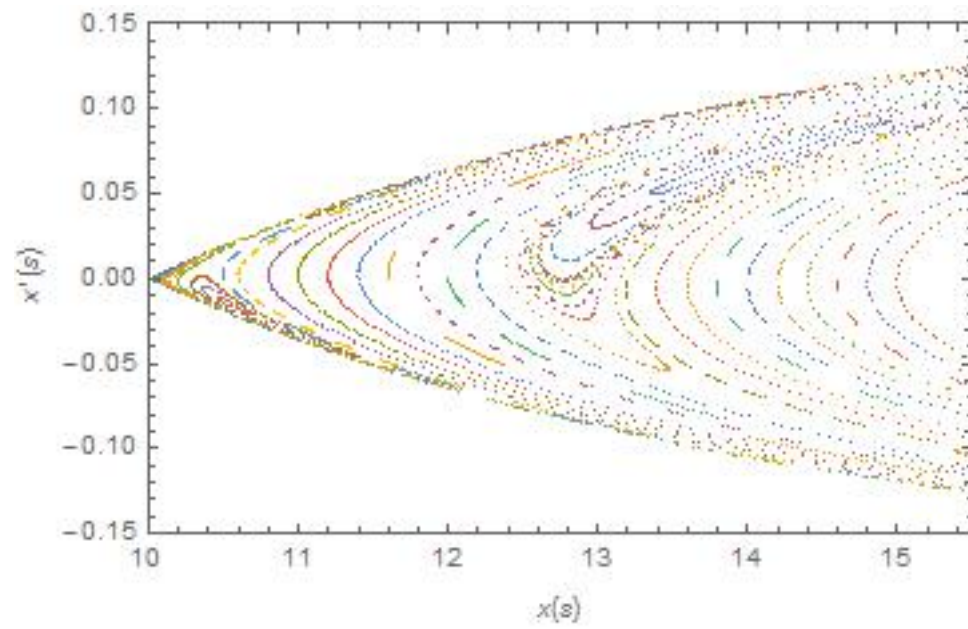


Нетрудно видеть, что по-прежнему сохраняются замкнутые кривые, соответствующие деформированным инвариантным торам, образующие в свою очередь главный остров стабильности, однако появляется множество вторичных изолированных островов стабильности (Рис.8). Между данными островами расположены области асимптотических кривых создающих на поверхности сечения гомоклинический эффект "хаоса"(Рис.7). Таким образом в данном случае динамическая система кажется неинтегрируемой. Тем не менее область возникновения хаоса весьма локальна.



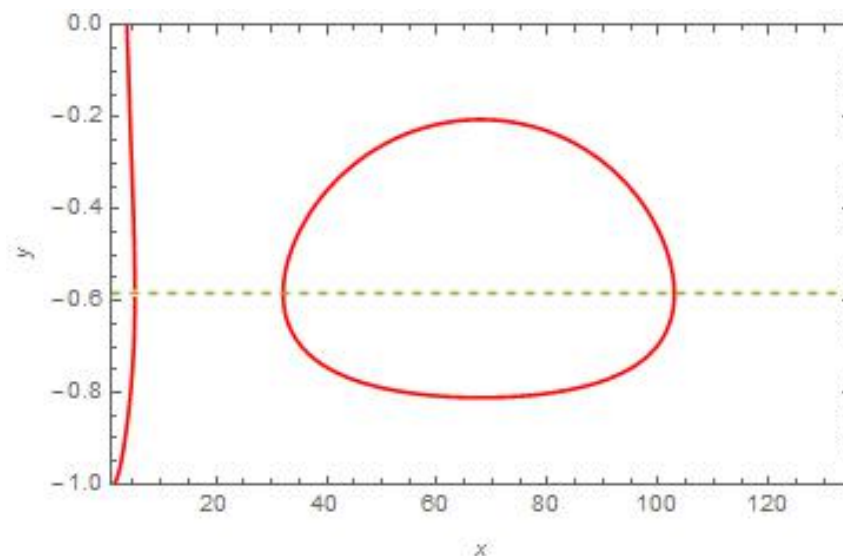
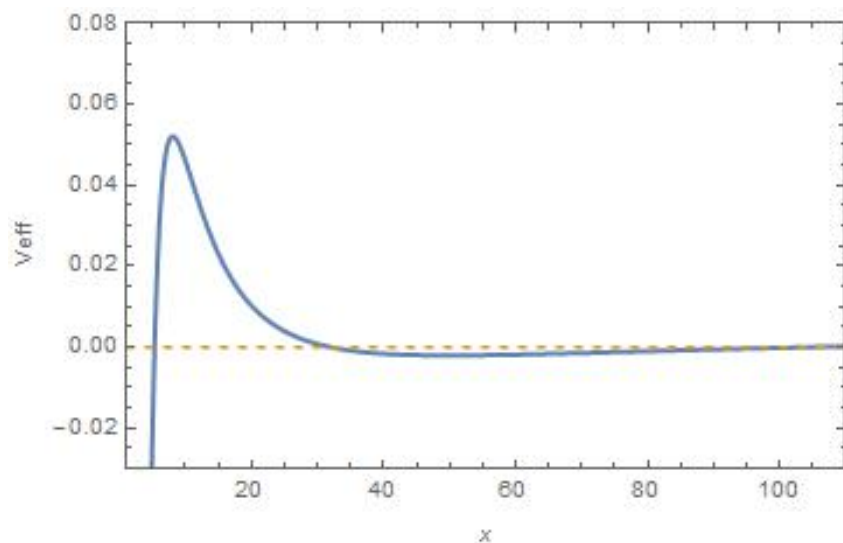
- Выберем параметры следующим образом $C = 0$, $\delta = 3$, $\gamma = 1/2$, $L = 1$. Значения энергии и орбитального момента следующие $l = -10.2694$, $E = 0.988305$. При этом потенциал имеет вид приведённый на рисунке (Рис.9). Существует неустойчивая круговая орбита при $x_0 = 10$. КНС замкнута нет падения на сингулярность кроме того явно нарушена симметрия выбора гиперплоскости сечения (Рис.10). Сечение Пуанкаре имеет вид схожий с предыдущем случаем, имеется несколько изолированных островов стабильности которые в данном случае носят весьма не локальный характер (Рис.12). На границе раздела данных областей и в неустойчивых точках могут возникать дополнительные области хаоса, однако наиболее ярко выраженная область снова сосредоточена максимума потенциала (Рис.11).

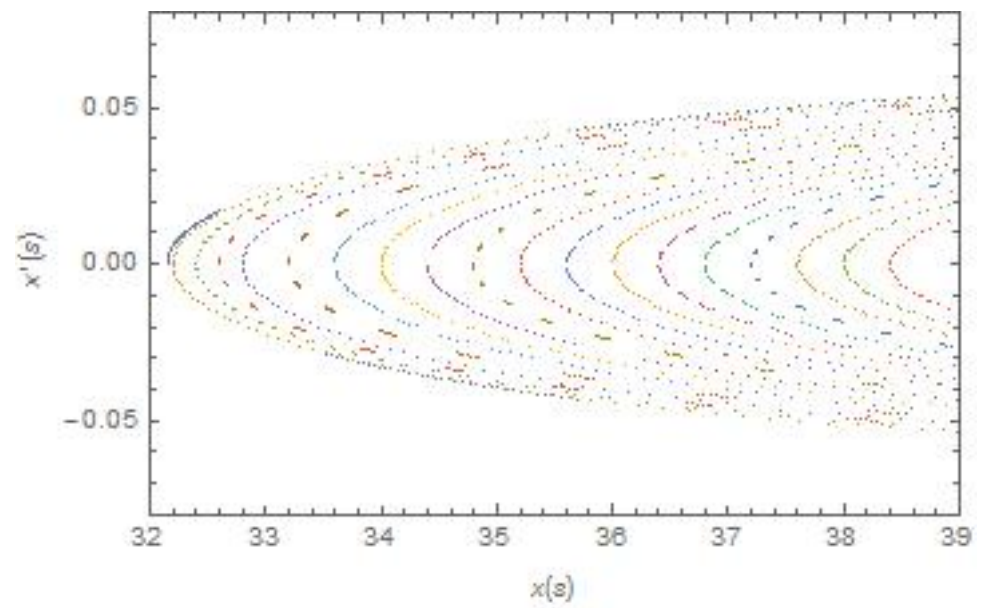
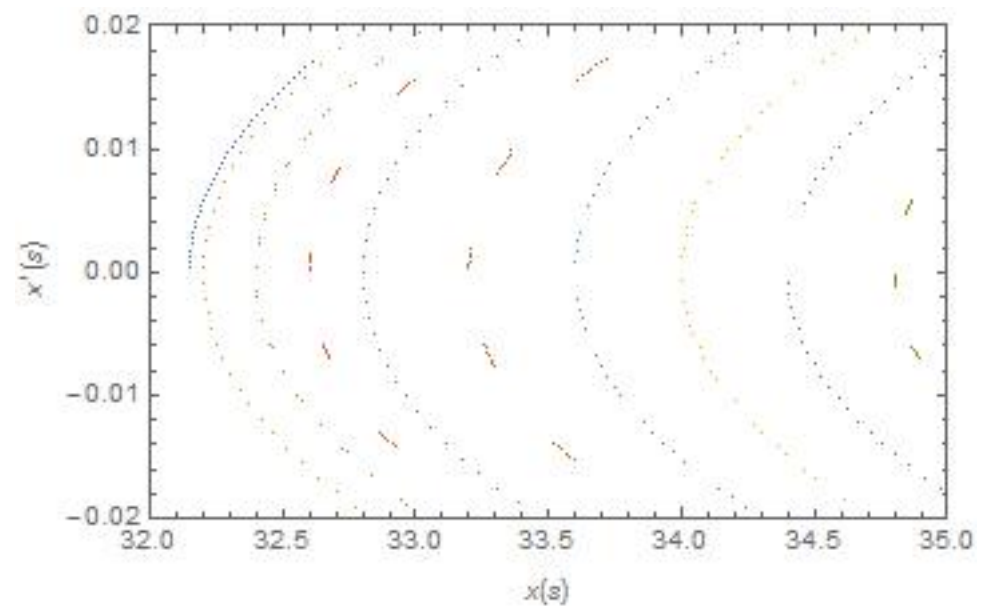




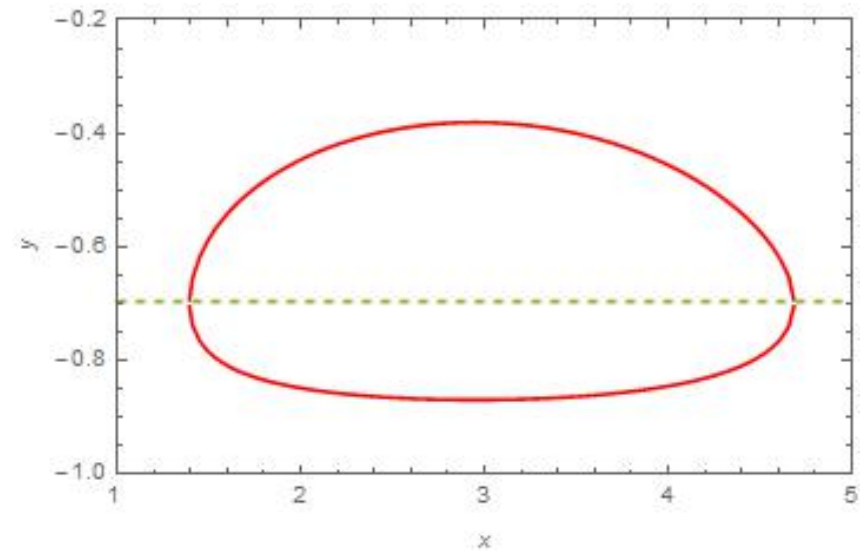
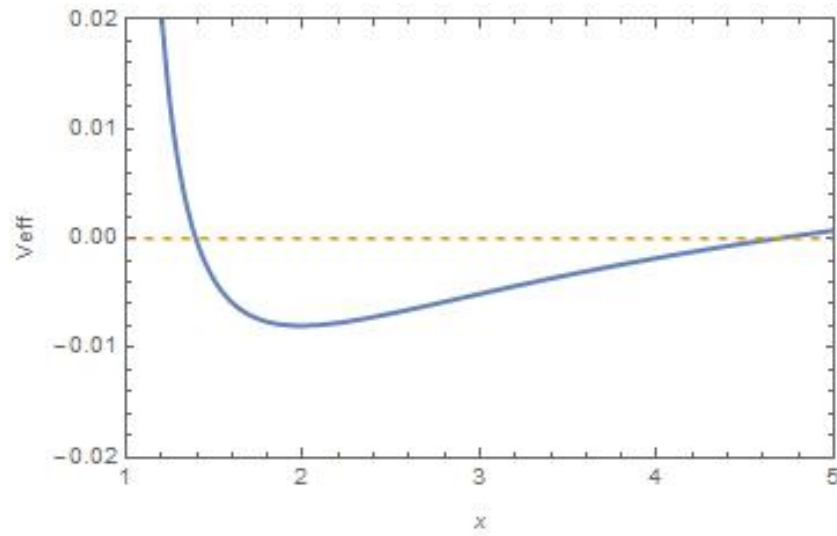
• Рассмотрим случай геодезических расположенных вдали от источника заключённых в изолированный регион. Рассмотрим решения с $C = 0$, $\delta = 3$, $\gamma = 3/4$, $L = 1$.

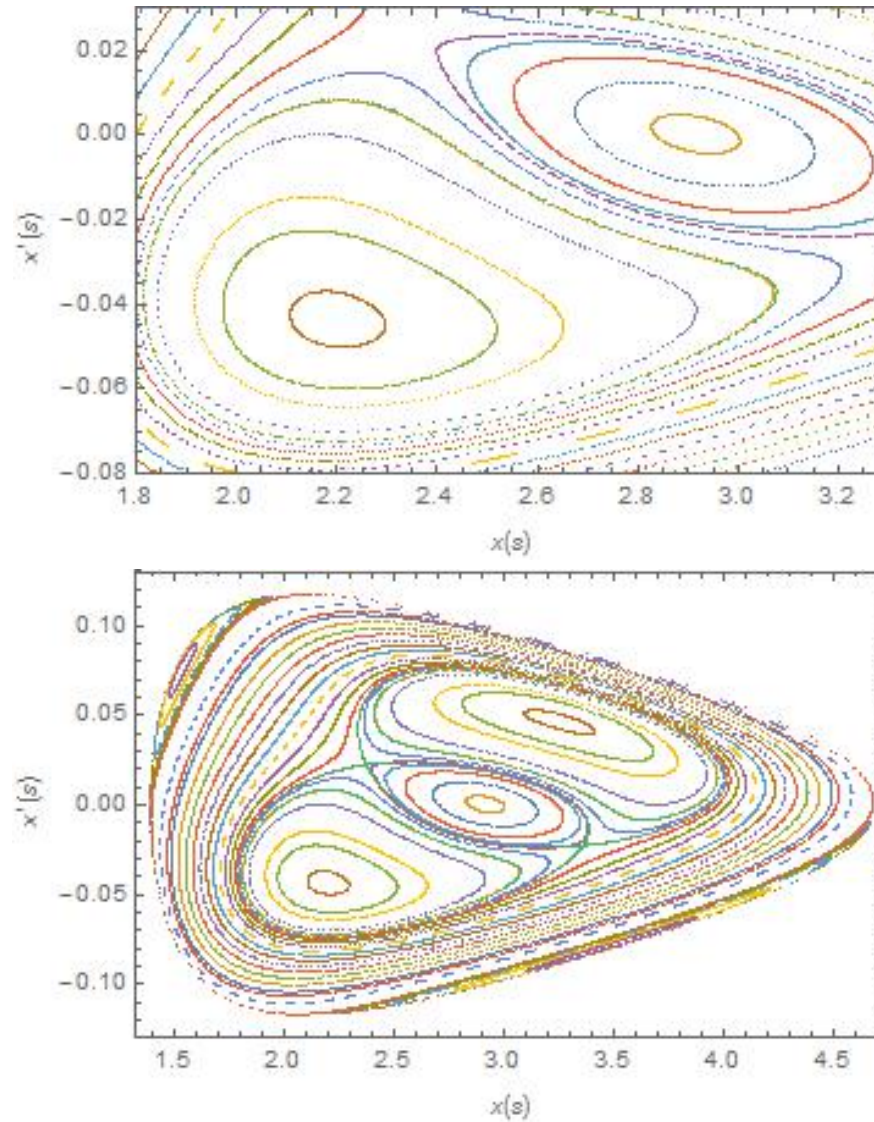
И полностью изолированный регион при значениях $l = -9.79997$, $E = 0.994005$. Из вида потенциала (Рис.13) очевидно движение происходит в удалённом регионе $x \gg 2\delta$. Кроме того он очевидно компактен (Рис.14) частицы не выходят на бесконечность и не достигают сингулярности. Сечения Пуанкаре (Рис.15) и (Рис.16) не содержат дополнительных изолированных регионов стабильности и имеют вид характерный для интегрируемых систем.





- Рассмотрим случай параметра деформации $\delta < 1$. Выберем для определённости параметры следующим образом $C = 0$, $\delta = 1/3$, $\gamma = 3/4$, $L = 1$. Значения энергии и орбитального момента следующие $l = -0.901934$, $E = 0.984583$. Имеется бесконечный потенциальный барьер закрывающий сингулярность (Рис.17). При этом мы выбрали значения орбитального момента и энергии таким образом, чтобы движение происходило в финитной области максимально приближенном к сингулярности (Рис.18). Как видно из сечений Пуанкаре (Рис.19) и (Рис.20) происходит значительное возмущение картины, появляются два новых изолированных острова стабильности.





Резюмируя, приходим к выводу, что деформированное решение Тауб-Нут перестаёт быть интегрируемой системой, области хаоса сосредоточены в окрестности источника на расстояниях порядка δ . В областях $x \gg \delta$ данные эффекты кажутся отсутствующими.

- [14] A. V. Pedersen *Aspects of Black Hole Physics.*// —
<http://www.nbi.dk/harmark/blackholephysicsv2.pdf>
- [15] G. Contopoulos M. Harsoula G. Lukes-Gerakopoulos *Periodic Orbits and Escapes in Dynamical Systems.*//*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy — 2012 — Vol. 113 — Iss.3, — Pp. 255–278.*
- [16] A. N. Kolmogorov // *Dokl. Akad. Nauk SSSR — 1954 — Vol. 98, — P.527.*
- [17] V. I. Arnold // *Russ. Math. Surv.— 1963 — Vol. 18, — P. 13.*
- [18] H. Poincare, // *Rend. Circ. Mat. Palermo — 1912 — Vol. 33, — P. 375.*
- [19] G. Lukes-Gerakopoulos *The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric.* // *Phys.Rev. D.— 2012. — Vol. 86. — arXiv:1206.0660.*
- [20] G. Contopoulos “*Order and chaos in dynamical astronomy*” // *Springer, Berlin, — 2002.*
- [21] J. Laskar // *Celest. Mech. Dyn. Astron.— 1993 — Vol. 56, — P. 191.*