

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД С ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ

А.В. Вестяк¹, С.А. Давыдов¹, А.В. Земсков^{1,2}, Д.В. Тарлаковский^{2,1}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия

Аннотация

В работе рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния термоупругих многокомпонентных сред с плоскими границами (слоя и полупространства) с учетом наличия диффузионных потоков каждого из компонентов среды. Влияние изменения концентрации и температуры на напряженно-деформированное состояние среды учитывается с помощью локально-равновесной модели термоупругой диффузии, включающей в себя связанную систему уравнений движения упругой среды, теплопереноса и массопереноса. Решение ищется с помощью преобразования Лапласа, а также разложения в ряды Фурье для слоя и синус-, косинус-преобразования для полупространства. Выражаются и анализируются поверхностные функции Грина. Выполняется тестовый расчет.

Ключевые слова: механодиффузия, многокомпонентные среды, термоупругая диффузия, интегральные преобразования, ряды Фурье, функции Грина

Введение

При исследовании нестационарных процессов в сплошных средах часто требуется учет различных взаимодействующих между собой полей: механических, тепловых и диффузионных. Среди современных публикаций, посвященных данной проблеме, можно выделить [1–8], при этом важно отметить, что в упомянутых работах задачи термомеханодиффузии в основном решаются в стационарных постановках [3, 4]. Нестационарные задачи, как правило, решаются аналитически в пространстве преобразования Лапласа, однако обращение самого преобразования Лапласа осуществляется численно [6–8]. Публикации, связанные с аналитическим нахождением функций Грина для нестационарных задач и их анализом, в настоящее время отсутствуют.

В настоящей работе рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентной среды, а также предлагается метод ее решения, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа и разложения по собственным функциям и позволяющий найти в явном виде функции Грина.

1. Постановка задачи

Рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругости с учетом массопереноса для однородной N -компонентной сплошной среды. Математическая

постановка задачи в прямоугольной декартовой системе координат представляет собой связанную систему, включающую в себя уравнение движения, уравнение теплопереноса и N уравнений массопереноса для каждой компоненты среды с номером q (штрихи обозначают производные по координате x , а точки – производные по времени τ) [1, 9–13]:

$$\begin{aligned} u'' &= \ddot{u} + b\vartheta' + \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta'_q, & \kappa \vartheta'' &= \dot{\vartheta} + B\dot{u}' + \sum_{q=1}^N \beta_q \dot{\eta}_q \\ D_q \eta''_q &= \dot{\eta}_q + \Lambda_q u''' + M_q \vartheta'''. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все величины являются безразмерными. Их связь с размерными аналогами определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{L^*}, & \tau &= \frac{ct}{L^*}, & c^2 &= \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}, & u &= \frac{u_1}{L^*}, & \vartheta &= \frac{T - T_0}{T_0}, & \eta_q &= \frac{\eta^{(q)}}{n_0}, \\ n_0 &= \sum_{q=1}^N n_0^{(q)}, & \kappa &= \frac{\kappa^*}{\rho c_{\varepsilon n} L^* c}, & \beta_q &= \frac{n_0^{(q)} R \ln(\gamma n_0^{(q)})}{\rho c_{\varepsilon n}}, & b &= \frac{b^* T_0}{\lambda^* + 2\mu^*}, & \alpha_q &= \frac{n_0^{(q)} \alpha^{(q)}}{\lambda^* + 2\mu^*}, \\ M_q &= \frac{D^{(q)} \ln(\gamma n_0^{(q)})}{c L^*}, & D_q &= \frac{D^{(q)}}{c L^*}, & \Lambda_q &= \frac{\alpha^{(q)} D^{(q)}}{R T_0 c L^*}, & B &= \frac{b^*}{\rho c_{\varepsilon n}}, \end{aligned}$$

где t – время; x_1 – декартова координата; u_1 – компонента вектора перемещений; L^* – характерный размер среды (в случае слоя его толщина); $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q -й компоненты вещества; $n^{(q)}$ и $n_0^{(q)}$ – актуальная и начальная молярные концентрации; λ^* и μ^* – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность; b^* – температурная постоянная; $\alpha^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счет диффузии; $D^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T и T_0 – актуальная и начальная температуры; κ^* – коэффициент теплопроводности; γ – коэффициент активности (для твердых растворов $\gamma = 1$); $c_{\varepsilon n}$ – удельная теплоемкость при постоянной концентрации и деформации.

Начальные условия полагаются нулевыми:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \eta_q|_{\tau=0} = 0, \quad \vartheta|_{\tau=0} = 0. \quad (2)$$

Задача рассматривается для двух видов сред с плоскими границами: одномерный слой $x \in [0, 1]$ и одномерное полупространство $x \in [0, \infty)$. На границах задаются перемещения, тепловой и диффузионные потоки:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & \vartheta'|_{x=0} &= f_{21}(\tau), & (\Lambda_q u'' - D_q \eta'_q + M_q \vartheta')|_{x=0} &= f_{q+2,1}(\tau), \\ u|_{x=1} &= f_{12}(\tau), & \vartheta'|_{x=1} &= f_{22}(\tau), & (\Lambda_q u'' - D_q \eta'_q + M_q \vartheta')|_{x=1} &= f_{q+2,2}(\tau), \\ f_{1l}(\tau) &= \frac{f_{1l}^*(t)}{L^*}, & f_{2l}(\tau) &= \frac{L^* f_{2l}^*(t)}{T_0}, & f_{q+2,l}(\tau) &= \frac{f_{q+2,l}^*(t)}{n_0^{(q)} c}, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $f_{kl}^*(t)$, $k = 1, 2, \dots, N + 2$, $l = 1, 2$, – размерные аналоги поверхностных возмущений. В задаче для полупространства условие на поверхности $x = 1$ заменяется условием ограниченности искомых величин в рассматриваемой области [9, 13].

2. Алгоритм решения задачи для слоя

Нахождение искомых функций в изображениях. Введем в рассмотрение поверхностные функции Грина $G_{ik}(x, \tau)$ задачи для слоя (1)–(3) ($i, k = 1, 2, \dots, N + 2$). Они являются решениями задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (2) и следующие граничные условия: [9]:

$$\begin{aligned} G_{1k}|_{x=0} &= \delta_{1k}\delta(\tau), \quad G'_{2k}|_{x=0} = \delta_{2k}\delta(\tau), \\ (\Lambda_q G''_{1k} - D_q G'_{q+2,k} + M_q G'_{2k})|_{x=0} &= \delta_{q+2,k}\delta(\tau), \\ G_{1k}|_{x=1} &= 0, \quad G'_{2k}|_{x=1} = 0, \quad (\Lambda_q G''_{1k} - D_q G'_{q+2,k} + M_q G'_{2k})|_{x=1} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ik} – символ Кронекера.

Тогда решение задачи (1)–(3) представляется в виде (звездочка обозначает свертку по времени) [9]:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{N+2} [G_{1k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) + G_{1k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \vartheta(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{N+2} [G_{2k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{2k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)], \\ \eta_q(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{N+2} [G_{q+2,k}(x, \tau) * f_{k1}(\tau) - G_{q+2,k}(1-x, \tau) * f_{k2}(\tau)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Для нахождения функций Грина применяем к (1)–(3) преобразование Лапласа по времени (s – параметр преобразования, индекс L обозначает трансформанту):

$$\begin{aligned} u^{L''} &= s^2 u^L + b\vartheta^{L'} + \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q^{L'}, \quad \kappa\vartheta^{L''} = s\vartheta^L + Bsu^{L'} + \sum_{q=1}^N \beta_q s\eta_q^L, \\ D_q \eta_q^{L''} &= s\eta_q^L + \Lambda_q u^{L'''} + M_q \vartheta^{L''}; \\ u^L|_{x=0} &= f_{11}^L(s), \quad \vartheta^{L'}|_{x=0} = f_{21}^L(s), \quad (\Lambda_q u^{L''} - D_q \eta_q^{L'} + M_q \vartheta^{L'})|_{x=0} = f_{q+2,1}^L(s), \\ u^L|_{x=1} &= f_{21}^L(s), \quad \vartheta^{L'}|_{x=1} = f_{22}^L(s), \quad (\Lambda_q u^{L''} - D_q \eta_q^{L'} + M_q \vartheta^{L'})|_{x=1} = f_{q+2,2}^L(s). \end{aligned}$$

Далее используем разложения искомых функций в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} u^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} u^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \\ \left\{ \begin{matrix} \vartheta^L(x, s) \\ \eta_q^L(x, s) \end{matrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \vartheta^{Lc}(\lambda_n, s) \\ \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) \end{matrix} \right\} \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n. \end{aligned} \tag{6}$$

В результате приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно u^{Ls} , ϑ^{Lc} и η_q^{Lc} [9, 11–13]:

при $n = 0$:

$$s\vartheta^{Lc}(0, s) + \sum_{q=1}^N \beta_q s\eta_q^{Lc}(0, s) = Bs f_{11}^L(s) - \kappa f_{21}^L(s), \quad s\eta_q^{Lc}(0, s) = f_{q+2,1}^L(s); \tag{7}$$

при $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} k_1(\lambda_n, s) u^{Ls}(\lambda_n, s) - b\lambda_n \vartheta^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) &= F_1(\lambda_n, s), \\ Bs\lambda_n u^{Ls}(\lambda_n, s) + k_2(\lambda_n, s) \vartheta^{Lc}(\lambda_n, s) + s \sum_{q=1}^N \beta_q \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) &= F_2(s), \\ \Lambda_q \lambda_n^3 u^{Ls}(\lambda_n, s) + M_q \lambda_n^2 \vartheta^{Lc}(\lambda_n, s) - k_{q+2}(\lambda_n, s) \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) &= F_{q+2}(\lambda_n, s), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\lambda_n, s) &= 2\lambda_n f_{11}^L(s), \quad F_2(s) = 2[Bs f_{11}^L(s) - \kappa f_{21}^L(s)], \\ F_{q+2}(\lambda_n, s) &= 2[\Lambda_q \lambda_n^2 f_{11}^L(s) - f_{q+2,1}^L(s)], \\ k_1(z, s) &= z^2 + s^2, \quad k_2(z, s) = \kappa z^2 + s, \quad k_{q+2}(z, s) = D_q z^2 + s. \end{aligned} \quad (9)$$

Решая системы (7) и (8), подставляя полученный результат в (6) и используя свойства преобразования Лапласа для свертки из формул (5), получаем

$$\begin{aligned} u^L(x, s) &= \sum_{k=1}^{N+2} [G_{1k}^L(x, s) f_{k1}^L(s) + G_{1k}^L(1-x, s) f_{k2}^L(s)], \\ \vartheta^L(x, s) &= \sum_{k=1}^{N+2} [G_{2k}^L(x, s) f_{k1}^L(s) - G_{2k}^L(1-x, s) f_{k2}^L(s)], \\ \eta_q^L(x, s) &= \sum_{k=1}^{N+2} [G_{q+2,k}^L(x, s) f_{k1}^L(s) - G_{q+2,k}^L(1-x, s) f_{k2}^L(s)]. \end{aligned}$$

Здесь $G_{ik}^L(x, s)$ – изображения Лапласа функций Грина, которые также представим в виде рядов ($i, k = 1, 2, \dots, N+2$):

$$\begin{aligned} G_{1k}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \\ \left\{ \begin{array}{l} G_{2k}^L(x, s) \\ G_{q+2,k}^L(x, s) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} G_{2k}^{Lc}(0, s) \\ G_{q+2,k}^{Lc}(0, s) \end{array} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{2k}^{Lc}(\lambda_n, s) \\ G_{q+2,k}^{Lc}(\lambda_n, s) + \frac{2\delta_{k,q+2}}{k_{q+2}(\lambda_n, s)} \end{array} \right\} \cos \lambda_n x; \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$G_{21}^{Lc}(0, s) = B, \quad G_{22}^{Lc}(0, s) = -\frac{\kappa}{s}, \quad G_{2,q+2}^{Lc}(0, s) = -\frac{\beta_q}{s}, \quad G_{q+2,q+2}^{Lc}(0, s) = \frac{1}{s}; \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) \\ G_{2k}^{Lc}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} = \frac{1}{P(\lambda_n, s)} \left\{ \begin{array}{l} P_{1k}(\lambda_n, s) \\ P_{2k}(\lambda_n, s) \end{array} \right\}, \quad (12)$$

$$G_{q+2,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{q+2,k}(\lambda_n, s)}{Q_{q+2}(\lambda_n, s)} - \frac{2\delta_{k1}\lambda_n^2 \Lambda_q}{k_{q+2}(\lambda_n, s)}, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{aligned} P(\lambda_n, s) &= (k_1 k_2 + bBs\lambda_n^2) \Pi - s\lambda_n^6 \sum_{q=1}^N \Lambda_q \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp} + \\ &+ \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N (s[\beta_q M_q k_1 + B\alpha_q M_q \lambda_n^2 + \beta_q \Lambda_q b\lambda_n^2] - \alpha_q \Lambda_q k_2 \lambda_n^2) \Pi_q, \end{aligned}$$

$$P_{11} = 2\lambda_n (k_2 + Bbs) \Pi + 2s\lambda_n^5 \sum_{q=1}^N M_q \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} +$$

$$+ 2\lambda_n^3 \sum_{q=1}^N [s(\alpha_q M_q B + \beta_q M_q + b\beta_q \Lambda_q) - k_2 \alpha_q \Lambda_q] \Pi_q,$$

$$P_{12} = -2\kappa \lambda_n \left(b\Pi + \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N \alpha_q M_q \Pi_q \right),$$

$$P_{1,q+2} = 2\lambda_n (k_2 \alpha_q - sb\beta_q) \Pi_q + 2s\lambda_n^3 \sum_{p=1}^N M_p \Pi_{qp},$$

$$P_{21} = 2s^3 B\Pi + 2s^3 \lambda_n^2 \sum_{q=1}^N \beta_q \Lambda_q \Pi_q - 2s\lambda_n^6 \sum_{q=1}^N \Lambda_q \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp},$$

$$P_{22} = 2\kappa \left(\lambda_n^4 \sum_{q=1}^N \alpha_q \Lambda_q \Pi_q - k_1 \Pi \right),$$

$$P_{2,q+2} = -2s \left[(k_1 \beta_q + B\alpha_q \lambda_n^2) \Pi_q + \lambda_n^4 \sum_{p=1}^N \Lambda_p \Pi_{qp} \right],$$

$$P_{q+2,i} = \lambda_n^2 (\Lambda_q \lambda_n P_{1i} + M_q P_{2i}), \quad Q_i = k_i P, \quad i = 1, 2, \dots, N + 2.$$

Функции $k_i = k_i(\lambda_n, s)$ в (12) находятся по формулам (9), величины $\Pi = \Pi(\lambda_n, s)$, $\Pi_q = \Pi_q(\lambda_n, s)$ и $\Pi_{qp} = \Pi_{qp}(\lambda_n, s)$ определяются следующим образом:

$$\Pi(z, s) = \prod_{r=1}^N k_{r+2}(z, s), \quad \Pi_q = \prod_{r=1, r \neq q}^N k_{r+2}(z, s),$$

$$\Pi_{qp}(z, s) = (\alpha_q \beta_p - \alpha_p \beta_q) \prod_{r=1, r \neq q, p}^N k_{r+2}(z, s).$$

при этом если $N = 1$, то $\Pi_q = 1$, $\Pi_{qp} = 0$, если $N = 2$, то $\Pi_{qp} = (\alpha_q \beta_p - \alpha_p \beta_q)$.

Анализ особенностей функций Грина. Из формул (10)–(12) следует, что для функции Грина $G_{21}^{Lc}(\lambda_n, s)$ имеет место следующее представление:

$$G_{21}^{Lc}(x, s) = B + 2B \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x, \quad s \rightarrow \infty.$$

Этот ряд сходится в обобщенном смысле к дельта-функции Дирака от пространственной переменной x . Представим функцию $G_{21}^{Lc}(\lambda_n, s)$ в (12) следующим образом:

$$G_{21}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{21}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} = \frac{2Bs^2}{k_1(\lambda_n, s)} + \frac{P_{21}^*(\lambda_n, s)}{Q_1(\lambda_n, s)},$$

где

$$P_{21}^*(\lambda_n, s) = P_{21}(\lambda_n, s) k_1(\lambda_n, s) - 2Bs^2 P(\lambda_n, s). \tag{13}$$

Тогда с учетом равенства [14]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \cosh((\pi - x)a)}{2a \sinh(\pi a)}$$

получаем [10]:

$$G_{21}^L(x, s) = Bs \frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{21}^*(\lambda_n, s)}{Q_1(\lambda_n, s)} \cos \lambda_n x. \quad (14)$$

Аналогично, из (10)–(12) следует, что функции G_{22}^{Lc} , $G_{2,q+2}^{Lc}$, $G_{q+2,1}^{Lc}$ имеют порядок $1/s$ при $s \rightarrow \infty$. Так как оригиналом $1/s$ по Лапласу является функция Хевисайда, это означает, что оригиналы функций G_{22}^L , $G_{2,q+2}^L$, $G_{q+2,1}^L$ по Лапласу при $\tau \rightarrow 0$ в соответствии с (10) будут представляться в виде рядов, которые так же, как и в предыдущем случае, сходятся в обобщенном смысле к дельта-функции Дирака от пространственной переменной x . Для практического вычисления сверток в (5) представляем указанные функции в виде

$$\begin{aligned} G_{22}^L &= -\kappa \left(\frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x}{k_2(\lambda_n, s)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{22}^*(\lambda_n, s)}{Q_2(\lambda_n, s)} \cos \lambda_n x, \\ G_{2,q+2}^L &= -\beta_q \left(\frac{1}{s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x}{k_{q+2}(\lambda_n, s)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2,q+2}^*(\lambda_n, s)}{Q_{q+2}(\lambda_n, s)} \cos \lambda_n x, \\ G_{q+2,1}^L &= 2(M_q B - \Lambda_q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \cos \lambda_n x}{k_{q+2}(\lambda_n, s)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{q+2,1}^*(\lambda_n, s)}{Q_{q+2}(\lambda_n, s)} \cos \lambda_n x, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} P_{22}^*(\lambda_n, s) &= P_{22}(\lambda_n, s) k_2(\lambda_n, s) + 2\kappa P(\lambda_n, s), \\ P_{2,q+2}^*(\lambda_n, s) &= P_{2,q+2}(\lambda_n, s) k_{q+2}(\lambda_n, s) + 2\beta_q P(\lambda_n, s), \\ P_{q+2,1}^*(\lambda_n, s) &= P_{q+2,1}(\lambda_n, s) - 2M_q B \lambda_n^2 P(\lambda_n, s). \end{aligned}$$

Таким образом, для функций $G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s)$ и $G_{lk}^{Lc}(\lambda_n, s)$ остаются справедливыми представления (10). При этом вместо формул (12) будем использовать ($l = 2, 3, \dots, N+2$, $k = 1, 2, \dots, N+2$):

$$G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) = \frac{\Phi_{1k}(\lambda_n, s)}{\Psi_{1k}(\lambda_n, s)}, \quad G_{lk}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{\Phi_{lk}(\lambda_n, s)}{\Psi_{lk}(\lambda_n, s)}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{1k}(\lambda_n, s) &= P_{1k}(\lambda_n, s), & \Psi_{1k}(\lambda_n, s) &= P(\lambda_n, s), \\ \Phi_{2k}(\lambda_n, s) &= P_{2k}^*(\lambda_n, s), & \Psi_{2k}(\lambda_n, s) &= Q_k(\lambda_n, s), \\ \Phi_{q+2,1}(\lambda_n, s) &= P_{q+2,1}^*(\lambda_n, s), & \Psi_{q+2,1}(\lambda_n, s) &= Q_{q+2}(\lambda_n, s), \\ \Phi_{q+2,l}(\lambda_n, s) &= P_{q+2,l}(\lambda_n, s), & \Psi_{q+2,l}(\lambda_n, s) &= Q_{q+2}(\lambda_n, s). \end{aligned}$$

Нахождение оригиналов функций Грина. Обозначим через $s_1(\lambda_n)$, $s_2(\lambda_n)$ комплексно-сопряженные, а через $s_{j+2}(\lambda_n)$ действительные корни многочлена $P(\lambda_n, s)$; $\xi(\lambda_n) = \operatorname{Re}[s_1(\lambda_n)] < 0$, $\zeta(\lambda_n) = \operatorname{Im}[s_1(\lambda_n)]$, $s_2(\lambda_n) = \overline{s_1(\lambda_n)}$, $s_{j+2}(\lambda_n) < 0$. Тогда, оригиналы функций Грина в (10) с учетом представлений (13)–(16) имеют вид (L^{-1} – обратный оператор Лапласа, $k = 1, 2, \dots, N+2$) [9]:

$$G_{1k}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x,$$

$$G_{2k}(x, \tau) = \delta_{1k} G_{21}^*(x, \tau) - \delta_{2k} \kappa \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-\kappa \pi^2 \tau}\right) - \delta_{k,q+2} \beta_q \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{2k}^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x$$

$$G_{q+2,k}(x, \tau) = \delta_{k1} \frac{\Lambda_q - M_q B}{D_q} \frac{\partial}{\partial \tau} \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) + \delta_{k,q+2} \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D_q \pi^2 \tau}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+2,k}^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \quad (17)$$

где $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos \lambda_n x$ – тета-функция Якоби [15], а остальные функции имеют вид ($l = 2, 3, \dots, N + 2, k = 1, 2, \dots, N + 2$):

$$G_{1k}^s(\lambda_n, \tau) = e^{\xi \tau} \left(A_{1k}^{(1)} \cos \zeta \tau - A_{1k}^{(2)} \sin \zeta \tau \right) + \sum_{j=1}^{N+1} A_{1k}^{(j+2)} e^{s_j \tau},$$

$$G_{lk}^c(\lambda_n, \tau) = e^{\xi \tau} \left(A_{lk}^{(1)} \cos \zeta \tau - A_{lk}^{(2)} \sin \zeta \tau \right) + \sum_{j=1}^{N+1} A_{lk}^{(j+2)} e^{s_j \tau} + \delta_{l2} \delta_{2k} A_{lk}^{(N+4)} e^{-\kappa \lambda_n^2 \tau} + \delta_{q+2,l} A_{lk}^{(N+5)} e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + \delta_{l2} \delta_{k,q+2} A_{lk}^{(N+5)} e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + \delta_{l2} \delta_{1k} \left(A_{lk}^{(N+6)} \cos \lambda_n \tau - A_{lk}^{(N+7)} \sin \lambda_n \tau \right), \quad (18)$$

$$G_{21}^*(x, \tau) = BL^{-1} \left[s \frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} \right] = B \sum_{n=0}^{\infty} [\delta'(\tau - (2n+x)) + \delta'(\tau - (2+2n-x))].$$

Последний оригинал в (18) найден с учетом следующего представления:

$$\frac{\cosh((1-x)s)}{\sinh s} = \frac{e^{-xs} + e^{-(2+x)s}}{1 - e^{-2s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-(2n+x)s} + e^{-(2+2n-x)s} \right).$$

Коэффициенты $A_{ik}^{(l)} = A_{ik}^{(l)}(\lambda_n)$ находятся по формулам (штрих означает производную по параметру s ($i, k = 1, 2, \dots, N + 2, j = 1, 2, \dots, N + 1$)):

$$A_{ik}^{(1)} = 2\text{Re} \frac{\Phi_{ik}(\lambda_n, s_1)}{\Psi'_{ik}(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{ik}^{(2)} = 2\text{Im} \frac{\Phi_{ik}(\lambda_n, s_1)}{\Psi'_{ik}(\lambda_n, s_1)}, \quad A_{ik}^{(j+2)} = \frac{\Phi_{ik}(\lambda_n, s_{j+2})}{\Psi'_{ik}(\lambda_n, s_{j+2})},$$

$$A_{2,q+2}^{(N+5)} = \frac{\Phi_{2,q+2}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{\Psi'_{2,q+2}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}, \quad A_{q+2,k}^{(N+5)} = \frac{\Phi_{q+2,k}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)}{\Psi'_{q+2,2}(\lambda_n, -D_q \lambda_n^2)},$$

$$A_{22}^{(N+4)} = \frac{\Phi_{22}(\lambda_n, -\kappa \lambda_n^2)}{\Psi'_{22}(\lambda_n, -\kappa \lambda_n^2)}, \quad A_{21}^{(N+6)} = 2\text{Re} \frac{\Phi_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}{\Psi'_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}, \quad A_{21}^{(N+7)} = 2\text{Im} \frac{\Phi_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}{\Psi'_{21}(\lambda_n, \lambda_n)}.$$

Подставляя найденные здесь функции Грина $G_{ik}(x, \tau)$ в свертки (5), получаем решение задачи термоупругой диффузии (1)–(3) для слоя.

3. Алгоритм решения задачи для полупространства

Рассуждая аналогичным образом, введем в рассмотрение функции Грина $G_{ik}^h(x, \tau)$ задачи (1)–(3) ($i, k = 1, 2, \dots, N + 2$) для полупространства, являющиеся решениями задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (2) и граничные условия (4), где условия на поверхности $x = 1$ заменяется условием ограниченности искомых величин в рассматриваемой области.

В этом случае решение исходной задачи (1)–(3) представляется в виде сверток (5), при $f_{k2}(\tau) \equiv 0$. Для построения функций Грина к исходной системе (1) применяем преобразование Лапласа по времени, синус-преобразование для функции u и косинус-преобразование для функций ϑ и η_q по координате. В результате исходная система уравнений приводится к системе вида (8). Таким образом, трансформанты функций Грина для полупространства и слоя связаны с помощью следующих соотношений (λ – параметр тригонометрического преобразования Фурье, верхний индекс S – трансформанта синус-преобразования, верхний индекс C – трансформанта косинус-преобразования):

$$G_{1k}^{hLS}(\lambda, s) = G_{1k}^{LS}(\lambda, s), \quad G_{2k}^{hLC}(\lambda, s) = G_{2k}^{LC}(\lambda, s), \quad G_{q+2,k}^{hLC}(\lambda, s) = G_{q+2,k}^{LC}(\lambda, s). \quad (19)$$

Аналогами формул (14) и (15) здесь будут следующие равенства:

$$\begin{aligned} G_{21}^{hL} &= \frac{2B}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2}{k_1(\lambda, s)} \cos \lambda x d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{21}^{hLC}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda, \\ G_{22}^{hL} &= -\frac{2\kappa}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{k_2(\lambda, s)} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{22}^{hLC}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda, \\ G_{2,q+2}^{hL} &= -\frac{2\beta_q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{k_{q+2}(\lambda, s)} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{2,q+2}^{hLC}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda, \\ G_{q+2,1}^{hL} &= \frac{2(M_q B - \Lambda_q)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \cos \lambda x}{k_{q+2}(\lambda, s)} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{q+2,1}^{hLC}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda, \end{aligned} \quad (20)$$

где функции $G_{21}^{hLC}(\lambda, s)$, $G_{22}^{hLC}(\lambda, s)$, $G_{2,q+2}^{hLC}(\lambda, s)$ и $G_{q+2,1}^{hLC}(\lambda, s)$ находятся по формулам (16).

Для остальных функций Грина справедливы представления ($k = 1, 2, \dots, N + 2$, $l = 2, 3, \dots, N + 2$):

$$G_{1k}^{hL}(x, s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{1k}^{hLS}(\lambda, s) \sin \lambda x d\lambda, \quad G_{q+2,l}^{hL}(x, s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{q+2,l}^{hLC}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda.$$

Вычисляя первые интегралы в (20) и переходя в пространство оригиналов по Лапласу, получаем:

$$\begin{aligned} G_{21}^h(x, \tau) &= \delta'(\tau - x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{21}^{hC}(\lambda, \tau) \cos \lambda x d\lambda, \\ G_{22}^h(x, \tau) &= -\frac{\sqrt{\pi\kappa} e^{-x^2/4\kappa\tau}}{2\sqrt{\tau}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{22}^{hC}(\lambda, \tau) \cos \lambda x d\lambda, \end{aligned}$$

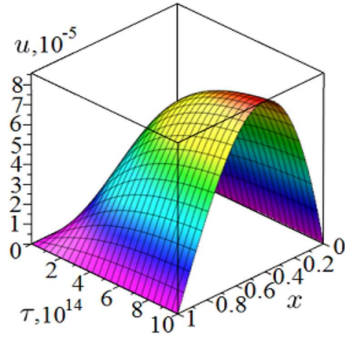


Рис. 1. Изменение u во времени τ и по глубине слоя x

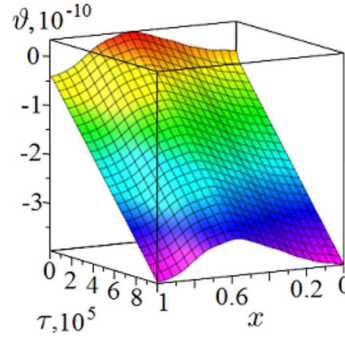


Рис. 2. Изменение v во времени τ и по глубине слоя x

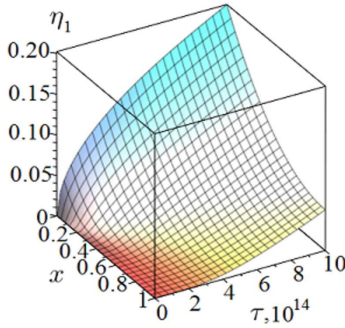


Рис. 3. Изменение η_1 во времени τ и по глубине слоя x

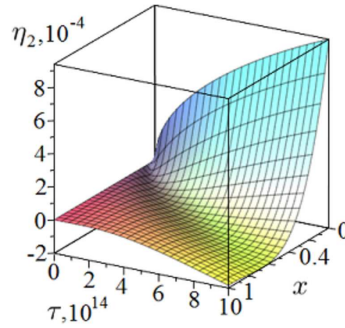


Рис. 4. Изменение η_2 во времени τ и по глубине слоя x

$$G_{2,q+2}^h(x, \tau) = -\beta_q \frac{\sqrt{\pi} e^{-x^2/4D_q\tau}}{2\sqrt{D_q\tau}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{2,q+2}^{hC}(\lambda, \tau) \cos \lambda x d\lambda,$$

$$G_{q+2,1}^h(x, \tau) = (\Lambda_q - M_q B) \frac{\sqrt{\pi} e^{-x^2/4D_q\tau} (2D_q\tau - x^2)}{4(D_q\tau)^{5/2}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{q+2,1}^{hC}(\lambda, \tau) \cos \lambda x d\lambda,$$

$$G_{1k}^h(x, s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{1k}^{hS}(\lambda, s) \sin \lambda x d\lambda, \quad G_{q+2,l}^h(x, s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_{q+2,l}^{hC}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda,$$

где функции $G_{1k}^{hS}(\lambda, \tau)$, $G_{2k}^{hC}(\lambda, \tau)$ и $G_{q+2,k}^{hC}(\lambda, \tau)$ с учетом соотношений (19) находятся с помощью формул (18).

Подставляя найденные функции Грина $G_{ik}^h(\lambda, \tau)$ в равенства (5), находим решение задачи термомехано-диффузии для полупространства.

4. Расчетный пример

Рассмотрим в качестве примера теплоизолированный и зафиксированный на границах однородный двухкомпонентный слой. Положим для расчета все правые части в граничных условиях (3) равными нулю, кроме диффузионного потока на границе $x = 0$:

$$f_{31}(\tau) = 10^{-16} \cdot H(\tau). \tag{21}$$

Материал слоя – дюралюминий 2024 (состав: 95% Al ($q = 1$), 5% Cu ($q = 2$)):

$$\lambda^* = 5.55 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \mu^* = 2.61 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \rho = 2740 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad b^* = 2.47 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}},$$

$$\kappa^* = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c_{\varepsilon n} = 920 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \alpha^{(1)} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, \quad \alpha^{(2)} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}},$$

$$D^{(1)} = 2 \cdot 10^{-15} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad D^{(2)} = 4 \cdot 10^{-16} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad T_0 = 700 \text{ К}, \quad L^* = 10^{-3} \text{ м}.$$

Результаты вычислений сверток (5) показаны на рис. 1–4, где представлены пространственно-временные распределения перемещений, температур и концентраций, демонстрирующие взаимосвязь указанных полей при заданных поверхностных возмущениях (3), (21). Вычисления проводились при 100 членах рядов Фурье (6). Дальнейшее увеличение количества членов этих рядов не приводит к каким-либо видимым изменениям полученных результатов.

Заключение

С помощью предложенного алгоритма решена связанная одномерная нестационарная задача термоупругости с учетом диффузии для многокомпонентного слоя. Основным достоинством данного подхода является возможность аналитически найти оригиналы по Лапласу функций Грина и провести их анализ. Эффективность метода продемонстрирована на конкретном расчетном примере для однородного двухкомпонентного слоя.

Литература

1. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. – Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
2. *Atwa S.Y.* Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium // *J. Mater. Chem. Eng.* – 2013. – V. 1, No 2. – P. 55–74.
3. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media // *Afr. J. Math. Comput. Sci. Res.* – 2014. – V. 7, No 7. – P. 68–78. – doi: 10.5897/AJMCSR2014.0564.
4. *Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D.* 2-D problem of generalized magneto-thermoelastic diffusion, with temperature-dependent elastic moduli // *J. Phys.* – 2013. – V. 2, No 3. – P. 4–11.
5. *Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S.* Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Phys. B: Condensed Matter.* – 2016. – V. 496. – P. 57–68. – doi: 10.1016/j.physb.2016.05.008.
6. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Int. J. Math. Math. Sci.* – 2006. – V. 2006. – Art. 25976, P. 1–15. – doi: 10.1155/IJMMS/2006/25976.
7. *Elhagary M.A.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // *Acta Mech.* – 2013. – V. 224, No 12. – P. 3057–3069. – doi: 10.1007/s00707-013-0902-6.
8. *El-Sayed A.M.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // *Math. Mech. Solids.* – 2016. – V. 21, No 9. – P. 1045–1060. – doi: 10.1177/1081286514549877.

9. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано-диффузии // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47.
10. *Tarlovakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V.* Dynamic Processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media // Encyclopedia of Thermal Stress. V. 2. – Dordrecht; Heidelberg; N. Y.; London: Springer, 2014. – P. 1064–1071.
11. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупространство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений // Учен. зап. Казн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 70–78.
12. *Zemskov A. V., Tarlovakovskiy D. V.* Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2015. – V. 56, No 6. – P. 1023–1030. – doi: 10.1134/S0021894415060127.
13. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экол. вестн. науч. центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
14. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1: Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 797 с.
15. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1941. – 236 с.

Поступила в редакцию
14.12.17

Вестяк Анатолий Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: v.a.vestyak@mail.ru

Давыдов Сергей Андреевич, аспирант и ассистент кафедры «Прикладные программные средства и математические методы»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: xenon_93@inbox.ru

Земсков Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладные программные средства и математические методы»; старший научный сотрудник лаборатории «Динамические испытания»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия
E-mail: azemskov1975@mail.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: tdvhome@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
 SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
 (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
 2018, vol. 160, no. 1, pp. 183–195

Unsteady One-Dimensional Problem of Thermoelastic Diffusion for Homogeneous Multicomponent Medium with Plane Boundaries

A. V. Vestyak^{a*}, S. A. Davydov^{a**}, A. V. Zemskov^{a,b***}, D. V. Tarlakovskii^{b,a****}

^aMoscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia

^bResearch Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia

E-mail: *v.a.vestyak@mail.ru, **xenon_93@inbox.ru, ***azemskov1975@mail.ru,

****tdvhome@mail.ru

Received December 14, 2017

Abstract

The paper deals with the problem of determining the stress-strain state of a thermoelastic multicomponent medium with plane boundaries (layer and half-space) taking into account the presence of diffusion fluxes in each medium component. The effect of changes in the concentration and temperature on the stress-strain state of the medium has been studied with the help of a locally equilibrium model of thermoelastic diffusion, which includes the coupled system of equations of motion, heat transfer, and mass transfer. The solution has been found using the Laplace transform, as well as using the Fourier expansion for the layer and the sine-cosine transform for the half-space. The surface Green's functions have been expressed and analyzed. Test calculation has been performed.

Keywords: mechanical diffusion, multicomponent media, thermoelastic diffusion, integral transforms, Fourier series, Green's functions

Figure Captions

Fig. 1. Change u in time τ and by layer depth x .

Fig. 2. Change ϑ in time τ and by layer depth x .

Fig. 3. Change η_1 in time τ and by layer depth x .

Fig. 4. Change η_2 in time τ and by layer depth x .

References

1. Knyazeva A.G. *Vvedenie v termodinamiku neobratimyykh protsessov. Lektsii o modelyakh* [Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. Lectures on Models]. Tomsk, Izd. "Ivan Fedorov", 2014. 172 p. (In Russian)
2. Atwa S.Y. Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium. *J. Mater. Chem. Eng.*, 2013, vol. 1, no. 2, pp. 55–74.
3. Kumar R., Chawla V. A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media. *Afr. J. Math. Comput. Sci. Res.*, 2014, vol. 7, no. 7, pp. 68–78. doi: 10.5897/AJMCSR2014.0564.
4. Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D. 2-D problem of generalized magneto- thermoelastic diffusion, with temperature-dependent elastic moduli. *J. Phys.*, 2013, vol. 2, no. 3, pp. 4–11.

5. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction. *Phys. B*, 2016, vol. 496, pp. 57–68. doi: 10.1016/j.physb.2016.05.008.
6. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2006, vol. 2006, art. 25976, pp. 1–15. doi: 10.1155/IJMMS/2006/25976.
7. Elhagary M.A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mech.*, 2013, vol. 224, no. 12, pp. 3057–3069. doi: 10.1007/s00707-013-0902-6.
8. El-Sayed A.M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space. *Math. Mech. Solids.*, 2016, vol. 21, no. 9, pp. 1045–1060. doi: 10.1177/1081286514549877.
9. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Surface Green's functions in non-stationary problems of thermomechanical diffusion. *Probl. Prochn. Plast.*, 2017, vol. 79, no. 1, pp. 38–47. (In Russian)
10. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. In: *Encyclopedia of Thermal Stress*. Vol. 2. Dordrecht, Heidelberg, New York, London, Springer, 2014, pp. 1064–1071.
11. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 503–509. doi: 10.1134/S199508021504023X.
12. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1023–1030. doi: 10.1134/S0021894415060127.
13. Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Two-component elastic diffusion half-space under the influence of time-dependent perturbations. *Ekol. Vestn. Nauchn. Tsentrov Chernomorsk. Ekon. Sotr.*, 2014, no. 2, pp. 31–38. (In Russian)
14. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady* [Integrals and Series]. Vol. 1: Elementary Functions. Moscow, Nauka, 1981. 797 p. (In Russian)
15. Zhuravskii A.M. *Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam* [Handbook on Elliptic Functions]. Moscow, Leningrad, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1941. 236 p. (In Russian)

Для цитирования: Вестяк А.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарная одномерная задача термоупругой диффузии для однородных многокомпонентных сред с плоскими границами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 60, кн. 1. – С. 183–195.

For citation: Vestyak A.V., Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Unsteady one-dimensional problem of thermoelastic diffusion for homogeneous multicomponent medium with plane boundaries. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 1, pp. 183–195. (In Russian)