Известия вузов. Математика
2015, №8, с. 3–13

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.Н. АЗАРОВ

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ И РАСЩЕПЛЯЕМЫХ РАСШИРЕНИЙ

Аннотация. Пусть группа G удовлетворяет условию A: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Доказано, что если группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для некоторого простого числа p, то группа автоморфизмов группы G почти аппроксимируема конечными p-группами. Аналогичный результат получен для расщепляемого расширения группы G с помощью группы, почти аппроксимируемой конечными p-группами. Более того, доказано, что если группа G почти аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами для некоторого конечного множества π простых чисел, то тем же свойством обладают группа автоморфизмов группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью группы, почти аппроксимируемой конечными нильпотентными π-группами.

Ключевые слова: линейная группа, группа автоморфизмов, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

УДК: 512.543

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от единицы. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Если множество π состоит из одного простого числа p, то класс $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп.

Еще более тонким свойством является π-примарная аппроксимируемость, т. е. аппроксимируемость классом $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{p\in\pi} \mathcal{F}_p$. Это свойство равносильно аппроксимируемости конечными нильпотентными π-группами. Если множество π состоит из одного простого числа p, то понятие π-примарной аппроксимируемости совпадает с понятием $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

Заметим, что понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости введено А.И. Мальцевым в работе [1], посвященной линейным группам, т. е. группам, вложимым в матричные группы над полями. Термин “аппроксимируемость” был введен в [2]. Соответствующий термин на английском

Поступила 17.02.2014

языке был введен Ф. Холлом в 1955 г., а уже в 1957 г. К. Грюнберг начал систематические исследования свойства аппроксимируемости некоторыми классами групп. Удобный термин "π-примарная аппроксимируемость" недавно был предложен Д.И. Молдаванским.

А.И. Мальцев [1] доказал $\mathcal{F}$-аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Следствиями этого результата являются теорема К. Хирша о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости полициклических групп [3] и теорема К. Ивасавы о $\mathcal{F}$-аппроксимируемости свободных групп. В дальнейшем было установлено, что любая полициклическая группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для подходящего конечного множества π простых чисел [4], а любая свободная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

В [5] А.И. Мальцев доказал $\mathcal{F}$-аппроксимируемость произвольного расщепляемого расширения конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы. Напомним, что группа P называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы P, B — подгруппа группы P, $P = AB$ и $A \cap B = 1$.

Д.М. Смирнов [6] и Г. Баумслаг [7] независимо друг от друга доказали, что группа автоморфизмов конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы сама является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Из сформулированных выше результатов Мальцева и Смирнова–Баумслага следует, что голоморф конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы сам является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Напомним, что голоморфом группы G называется расщепляемое расширение H группы G с помощью группы автоморфизмов группы G такое, что каждый автоморфизм φ группы G совпадает с ограничением на G внутреннего автоморфизма группы H, производимого ее элементом φ.

Простые примеры показывают, что приведенные выше результаты Мальцева, Хирша и Смирнова–Баумслага не могут быть распространены с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Тем не менее, имеют место аналоги этих результатов для свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Так, например, аналогом теоремы Смирнова–Баумслага служит следующий результат А. Лубоцкого [8].

Если конечно порожденная группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то и группа автоморфизмов группы G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Ставший уже классическим результат А.Л. Шмелькина [9] утверждает, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого p.

В дальнейшем результат Шмелькина обобщался и усиливался в различных направлениях. Одно из этих направлений связано с переходом от полициклических групп к некоторым более широким классам разрешимых групп, но сейчас остановимся на другом направлении, которое связано с исследованием линейных групп. Хорошо известная теорема Ю.И. Мерзлякова [10] утверждает, что голоморф полициклической группы представим целочисленными матрицами. Так как для групп целочисленных матриц свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости имеет место для каждого простого числа p (например, [11], с. 207), то тем же свойством обладает и голоморф полициклической группы. Для произвольной конечно порожденной линейной группы свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости может уже не выполняться для всех p, но имеет место следующий результат В.П. Платонова [12].

Пусть G — конечно порожденная линейная группа над полем P.

1. *Если характеристика поля P равна нулю, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

2. *Если характеристика поля P равна простому числу p, то группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Следует заметить, что линейность и почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость тесно связаны между собой. Эта связь была найдена А. Лубоцким, который в [11] получил характеризацию конечно порожденных линейных групп над полями нулевой характеристики в терминах, близких к почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Не приводя формулировку этого результата, заметим, что его непосредственным следствием является первое утверждение теоремы Платонова.

Легко видеть, что если группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и $\mathcal{F}_q$-аппроксимируема для двух различных простых чисел p и q, то она не имеет кручения. Поэтому если группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и почти $\mathcal{F}_q$-аппроксимируема для двух различных простых чисел p и q, то она почти вся без кручения. Отсюда и из теоремы Платонова вытекает следующий классический результат, известный как лемма Сельберга. *Если конечно порожденная группа является линейной над полем нулевой характеристики, то она почти вся без кручения.*

Здесь будут доказаны теоремы, обобщающие и существенно дополняющие результаты Мальцева, Смирнова–Баумслага и Лубоцкого о группах автоморфизмов и расщепляемых расширениях. Кроме того, будут получены аналоги теоремы Платонова и леммы Сельберга для голоморфа конечно порожденной линейной группы.

Вместо свойства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости будем рассматривать более универсальное свойство почти π-примарной аппроксимируемости. Известная теорема Носкова–Сегала ([13], пп. 4.3.9, 4.3.10) утверждает, что любая конечно порожденная группа G, являющаяся расширением абелевой группы с помощью нильпотентной группы, почти π-примарно аппроксимируема для подходящего множества π простых чисел, и что если вдобавок группа G без кручения, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших p. Впоследсвии Сегал доказал почти π-примарную аппроксимируемость и для голоморфа конечно порожденной группы G, являющейся расширением абелевой группы с помощью нильпотентной группы. В доказанной ниже теореме 1 получаем аналогичный результат, но в нем в значительной степени ослаблены ограничения на группу G.

Теорема 1. *Пусть группа $G \in$ А: для каждого целого положительного числа n число всех подгрупп группы G индекса n конечно.*

1. *Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то голоморф группы G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.*

2. *Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то голоморф группы G является почти π-примарно аппроксимируемой группой.*

Еще один результат, доказанный ниже, относится к расщепляемым расширениям и формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть группа $G \in$ А.*

1. *Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.*

2. *Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то любое расщепляемое расширение группы G с помощью почти π-примарно аппроксимируемой группы является почти π-примарно аппроксимируемой группой.*

Хорошо известная теорема М. Холла утверждает, что если G — конечно порожденная группа и n — целое положительное число, то число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Поэтому непосредственными следствиями теорем 1 и 2 являются упомянутые выше теоремы Смирнова–Баумслага о группе автоморфизмов и теорема Мальцева о расщепляемых расширениях, а также

Следствие 1. Пусть G — конечно порожденная группа.

1. Если группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то голоморф группы G является почти π-примарно аппроксимируемой группой.

2. В частности, если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, то голоморф группы G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Частным случаем второго утверждения следствия 1 является сфомулированный выше результат А. Лубоцкого [8] о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы. Доказательство этого результата, приведенное в статье Лубоцкого, основано на использовании топологических методов. Здесь используем элементарные методы теории групп для доказательства теорем 1 и 2.

Из теоремы Лубоцкого следует свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для групп автоморфизмов конечно порожденных свободных групп. Недавно оно было заново доказано Л. Паризом в [14].

Из следствия 1 и теоремы Платонова вытекает

Следствие 2. Пусть G — конечно порожденная линейная группа над полем P.

1. Если характеристика поля P равна нулю, то голоморф группы G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для всех достаточно больших простых p.

2. Если характеристика поля P равна простому числу p, то голоморф группы G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Из этого утверждения получается следующий аналог леммы Сельберга. *Если конечно порожденная группа является линейной над полем нулевой характеристики, то ее голоморф почти весь без кручения.*

Заметим, что группа автоморфизмов и голоморф конечно порожденной линейной группы уже не обязаны быть линейными группами. Соответствующими примерами являются группы автоморфизмов конечно порожденных свободных групп ранга ≥ 3 [15].

Примеры бесконечно порожденных групп, к которым применимы теоремы 1 и 2, можно найти среди разрешимых минимаксных групп.

Напомним, что минимаксные группы — это группы, обладающие конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет либо условию минимальности, либо условию максимальности для подгрупп. Разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический ([13], п. 5.1.6).

Группа называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Группа называется полной, если из любого ее элемента в ней можно извлечь корень любой натуральной степени. Очевидно, любая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа редуцирована. Для разрешимых минимаксных групп имеет место и обратное утверждение (например, [13], п. 5.3.9).

Далее потребуются следующие два свойства разрешимых минимаксных групп.

1. Если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p ([13], п. 5.3.9).

2. В разрешимой минимаксной группе G для каждого натурального числа n число всех подгрупп индекса n конечно.

Действительно, все подгруппы группы G индекса n содержат в себе степенную подгруппу G^m, где $m = n!$. Напомним, что подгруппа G^m порождается m-ми степенями элементов из G. Из приведенной выше характеризации разрешимых минимаксных групп легко следует, что все степенные подгруппы имеют в группе G конечные индексы, а значит, конечным будет и число всех подгрупп группы G, содержащих G^m, и тем самым свойство 2 доказано.

В силу свойств 1 и 2 частным случаем теоремы 1 является

Следствие 3. Если разрешимая минимаксная группа G редуцирована, то голоморф группы G является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для всех достаточно больших простых p.

Остановимся теперь на вопросе о π-примарной аппроксимируемости расщепляемых расширений. Заметим, что второе утверждение теоремы 2 не может быть распространено с почти π-примарной аппроксимируемости на случай π-примарной аппроксимируемости, но, тем не менее, справедлива

Теорема 3. *Пусть группа $G \in \mathrm{A}$ и P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F.*

Если группы G и F π-примарно аппроксимируемы для некоторого множества π простых чисел и для каждого числа $p \in \pi$ взаимный коммутант $[F, G]$ подгрупп F и G содержится в произведении $G'G^p$ коммутанта G' группы G и степенной подгруппы G^p, то группа P π-примарно аппроксимируема.

2. Предварительные леммы

Пусть A — произвольная группа, p — простое число. Рассмотрим подгруппу $A'A^p$, где A' — коммутант группы A, A^p — степенная подгруппа. Если A — конечная p-группа, то подгруппа $A'A^p$, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Лемма 1. *Если A — конечная p-группа, то группа Γ всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (например, [16], с. 562). Потребуется следующая модификация этого результата.

Лемма 2. *Пусть G — группа, $\operatorname{Aut} G$ — группа автоморфизмов группы G, Φ — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$ и A — конечная нормальная Φ-допустимая p-подгруппа группы G. Если все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Φ — p-группа.*

Доказательство. Так как подгруппа A группы G Φ-допустима, то ограничение любого автоморфизма из Φ на подгруппу A является автоморфизмом группы A. Поэтому можно рассмотреть гомоморфизм $\alpha : \Phi \to \operatorname{Aut} A$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ из Φ его ограничение на A. Обозначим через Ω ядро гомоморфизма α. Так как фактор-группа Φ/Ω изоморфна подгруппе $\Phi\alpha$ группы $\operatorname{Aut} A$, то для доказательства леммы нужно проверить, что $\Phi\alpha$ и Ω — p-группы.

В силу отмеченного выше результата Ф. Холла группа Γ всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю $A'A^p$, является p-группой. Так как все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю $A'A^p$, то их ограничения на подгруппу A тоже действуют тождественно по модулю $A'A^p$, и поэтому $\Phi\alpha \subseteq \Gamma$. Отсюда и из того, что Γ — p-группа, следует, что и $\Phi\alpha$ является p-группой.

Покажем теперь,что Ω — p-группа. Пусть $\varphi \in \Omega$. Так как $\Omega \subseteq \Phi$, то φ действует тождественно по модулю $A'A^p$ и, в частности, по модулю A. Поэтому если $x \in G$, то $x\varphi = xa$, где $a \in A$. Так как $\varphi \in \Omega$, то ограничение автоморфизма φ на подгруппу A является тождественным автоморфизмом группы A, и поэтому $a\varphi = a$. Отсюда и из того, что $x\varphi = xa$, вытекает $x\varphi^n = xa^n$ для любого натурального n. Беря здесь в качестве n порядок p^k группы A, будем иметь $a^{p^k} = 1$, $x\varphi^{p^k} = x$. Поэтому $\varphi^{p^k} = 1$ и, следовательно, Ω — p-группа. $\square$

Напомним, что если N — автоморфно допустимая подгруппа группы G, то можно рассматривать гомоморфизм индуцирования, т. е. гомоморфизм $\rho_N : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/N$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм φ_N группы G/N, действующий по правилу $(xN)\varphi_N = x\varphi N$. Введенные здесь обозначения будут далее использоваться без дополнительных пояснений.

Лемма 3. *Пусть группа $G \in \mathrm{A}$ и A — π-примарно аппроксимируемая автоморфно допустимая подгруппа конечного индекса группы G, где π — некоторое множество простых чисел. Пусть Γ — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$, состоящая из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$ для всех $p \in \pi$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Для каждого неединичного элемента a подгруппы A существуют простое число $p \in \pi$ и подгруппа N конечного p-индекса группы A, которая не содержит элемент a и является автоморфно допустимой подгруппой группы G.*

2. *Пусть $p \in \pi$ и N — подгруппа конечного p-индекса группы A, автоморфно допустимая в G, и $\rho_N : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/N$ — гомоморфизм индуцирования. Тогда подгруппа $\Phi = \Gamma\rho_N$ группы $\operatorname{Aut} G/N$ является p-группой.*

3. *Подгруппа Γ группы $\operatorname{Aut} G$ является π-примарно аппроксимируемой.*

4. *Подгруппа $A\Gamma$ группы $\operatorname{Hol} G$ является π-примарно аппроксимируемой.*

5. *Если множество π конечно, то подгруппа Γ имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Aut} G$, а подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Hol} G$.*

Доказательство. 1. Так как A — π-примарно аппроксимируемая подгруппа группы G, то для каждого неединичного элемента a подгруппы A существует простое число $p \in \pi$ и нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент a. Обозначим через N пересечение всех нормальных подгрупп группы A, индекс которых совпадает с $[A : M]$. Так как число таких подгрупп конечно, то N — подгруппа конечного p-индекса группы A. Очевидно, N не содержит элемент a и является автоморфно допустимой подгруппой в группе A. Поскольку A автоморфно допустима в G, то и N автоморфно допустима в G.

2. Покажем, что подгруппа $\Phi = \Gamma\rho_N$ группы $\operatorname{Aut} G/N$ является p-группой. Так как A — нормальная подгруппа группы G и N — подгруппа конечного p-индекса группы A, то A/N — конечная нормальная p-подгруппа группы G/N. Поскольку A автоморфно допустима в G, и так как автоморфизмы группы G/N, принадлежащие Φ, индуцируются некоторыми автоморфизмами группы G, то подгруппа A/N Φ-допустима в G/N. Так как автоморфизмы из Φ индуцируются автоморфизмами из Γ, действующими тождественно по модулю $A'A^p$, то автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^pN/N = (A/N)'(A/N)^p$. Таким образом, A/N — конечная нормальная p-подгруппа группы G/N, $\Phi \leq \operatorname{Aut} G/N$, A/N Φ-допустима в G/N и все автоморфизмы из Φ действуют тождественно по модулю подгруппы $(A/N)'(A/N)^p$. Поэтому в силу леммы 2 Φ — p-группа.

3. Покажем, что группа Γ является π-примарно аппроксимируемой. Пусть $\gamma \in \Gamma$ и $\gamma \neq 1$. Тогда $x^{-1} \cdot x\gamma \neq 1$ для некоторого элемента x группы G. Так как автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то $x^{-1} \cdot x\gamma \in A'A^p$ и, в частности, $x^{-1} \cdot x\gamma \in A$. Таким образом, $x^{-1} \cdot x\gamma$ — неединичный элемент группы A. Поэтому в силу уже доказанного утверждения 1 леммы 3 существует простое число $p \in \pi$ и подгруппа N конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент $x^{-1} \cdot x\gamma$ и автоморфно допустимая в G. Автоморфная допустимость подгруппы N группы G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования ρ_N группы $\operatorname{Aut} G$ в конечную группу $\operatorname{Aut} G/N$. Поскольку $x^{-1} \cdot x\gamma \notin N$, то образ γ_N автоморфизма γ относительно гомоморфизма ρ_N является неединичным элементом группы $\Gamma\rho_N$, причем группа $\Gamma\rho_N$ конечна как подгруппа конечной группы $\operatorname{Aut} G/N$. Поэтому для завершения доказательства π-примарной аппроксимируемости группы Γ остается только заметить, что в силу уже доказанного утверждения 2 леммы 3 подгруппа $\Phi = \Gamma\rho_N$ группы $\operatorname{Aut} G/N$ является p-группой.

4. Покажем, что подгруппа $A\Gamma$ группы $\operatorname{Hol} G$ является π-примарно аппроксимируемой. Пусть $h \in A\Gamma$ и $h \neq 1$. Покажем, что существует число $p \in \pi$ и гомоморфизм группы $A\Gamma$ на конечную p-группу, переводящий элемент h в неединичный элемент. Существование такого гомоморфизма очевидно в случае, если $h \notin A$, так как фактор-группа $A\Gamma/A \cong \Gamma$ π-примарно аппроксимируема в силу уже доказанного утверждения 3 леммы 3. Будем теперь считать, что $h \in A$. По утверждению 1 леммы 3 существует простое число $p \in \pi$ и подгруппа N конечного p-индекса группы A, не содержащая элемент h и автоморфно допустимая в G. Пусть как и выше $\rho_N : \operatorname{Aut} G \longrightarrow \operatorname{Aut} G/N$ — гомоморфизм индуцирования. По доказанному утверждению 2 леммы 3 подгруппа $\Gamma\rho_N$ группы $\operatorname{Aut} G/N$ является p-группой. Рассмотрим отображение $\omega_N : \operatorname{Hol} G \longrightarrow \operatorname{Hol} G/N$, определенное по следующему правилу: для любых элементов $x \in G$ и $\varphi \in \operatorname{Aut} G$

$$(x \cdot \varphi)\omega_N = xN \cdot \varphi_N.$$

Согласно определению голоморфа для любых элементов $x, y \in G$ и $\varphi, \psi \in \operatorname{Aut} G$ выполняется равенство

$$(x \cdot \varphi) \cdot (y \cdot \psi) = x \cdot y\varphi \cdot \varphi \cdot \psi.$$

Здесь и далее символ “$\cdot$” означает умножение в голоморфе, а отсутствие этого символа между знаком элемента группы и знаком отображения означает образ этого элемента. Из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned}(x \cdot \varphi \cdot y \cdot \psi)\omega_N = (x \cdot y\varphi)N \cdot (\varphi \cdot \psi)_N = xN \cdot (y\varphi)N \cdot \varphi_N \cdot \psi_N = \\ = xN \cdot (yN)\varphi_N \cdot \varphi_N \cdot \psi_N = xN \cdot \varphi_N \cdot yN \cdot \psi_N = (x \cdot \varphi)\omega_N \cdot (y \cdot \psi)\omega_N.\end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\omega_N : \operatorname{Hol} G \longrightarrow \operatorname{Hol} G/N$ является гомоморфизмом. Так как A/N и $\Gamma\rho_N$ — конечные p-группы и $(A\Gamma)\omega_N = A/N \cdot \Gamma\rho_N$, то $(A\Gamma)\omega_N$ — конечная p-группа. Таким образом, гомоморфизм ω_N отображает группу $A\Gamma$ на конечную p-группу, причем $p \in \pi$ и $h\omega_N = hN \neq 1$. Это завершает доказательство π-примарной аппроксимируемости группы $A\Gamma$.

5. Пусть множество π конечно. Покажем, что подгруппа Γ имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Aut} G$, а подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Hol} G$. Для каждого числа $p \in \pi$ рассмотрим фактор-группу $A/A'A^p$. Так как $A/A'A^p$ — абелева p-группа периода p, то по теореме Прюфера она раскладывается в прямое произведение циклических групп порядка p. Поэтому если предположить, что группа $A/A'A^p$ бесконечна, то она содержит бесконечно много подгрупп индекса p. Тогда этим свойством обладает группа A, а значит, и группа G содержит бесконечно много подгрупп индекса $p \cdot [G : A]$, что невозможно. Таким образом, $A/A'A^p$ — конечная группа. Поэтому $A'A^p$ — подгруппа конечного индекса группы

A, причем, очевидно, она является автоморфно допустимой подгруппой в A. Отсюда и из того, что A — автоморфно допустимая подгруппа конечного индекса группы G, вытекает, что $A'A^p$ — автоморфно допустимая подгруппа конечного индекса группы G. Автоморфная допустимость подгруппы $A'A^p$ группы G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\sigma_p : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/A'A^p$, сопоставляющий каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм $\overline{\varphi}$ группы $G/A'A^p$, действующий по правилу $(xA'A^p)\overline{\varphi} = x\varphi A'A^p$. Ядро Γ_p гомоморфизма σ_p состоит из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Так как $A'A^p$ — подгруппа конечного индекса группы G, то группа $\operatorname{Aut} G/A'A^p$ конечна. Поэтому Γ_p — подгруппа конечного индекса группы $\operatorname{Aut} G$. Отсюда и из того, что множество π конечно, вытекает, что подгруппа $\bigcap\limits_{p\in\pi} \Gamma_p$ является подгруппой конечного индекса группы $\operatorname{Aut} G$. Очевидно также, что

$$\Gamma = \bigcap_{p\in\pi} \Gamma_p.$$

Таким образом, подгруппа Γ имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Aut} G$. Отсюда и из того, что A имеет конечный индекс в G, следует, что подгруппа $A\Gamma$ имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Hol} G$. $\square$

Если в лемме 3 вместо почти π-примарной аппроксимируемости группы G потребовать, чтобы она была π-примарно аппроксимируемой, то можно в качестве подгруппы A взять саму группу G. В этом случае утверждение 4 леммы 3 принимает следующий вид.

Лемма 4. *Пусть группа $G \in \mathrm{A}$ и для некоторого множества π простых чисел группа G π-примарно аппроксимируема. Пусть Γ — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$, состоящая из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$ для каждого $p \in \pi$. Тогда подгруппа $G\Gamma$ группы $\operatorname{Hol} G$ является π-примарно аппроксимируемой.*

Лемма 5. *Пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F. Пусть далее $\rho : F \longrightarrow \operatorname{Aut} G$ — сопровождающий гомоморфизм, т. е. гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу u из F автоморфизм φ_u группы G, представляющий собой ограничение на G внутреннего автоморфизма группы P, производимого элементом u. Пусть группа F и подгруппа $G \cdot F\rho$ группы $\operatorname{Hol} G$ являются $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми) группами, где $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, замкнутый относительно подгрупп. Тогда и группа P является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой).*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\omega : P \longrightarrow G \cdot F\rho$, определенное по правилу: для любых элементов $x \in G$ и $u \in F$

$$(x \cdot u)\omega = x \cdot \varphi_u.$$

Так как для любых элементов $x, y \in G$ и $u, v \in F$ выполняется равенство

$$(x \cdot u) \cdot (y \cdot v) = x \cdot y\varphi_u \cdot u \cdot v,$$

то

$$(x \cdot u \cdot y \cdot v)\omega = x \cdot y\varphi_u \cdot \varphi_{uv} = x \cdot y\varphi_u \cdot \varphi_u \cdot \varphi_v = x \cdot \varphi_u \cdot y \cdot \varphi_v = (x \cdot u)\omega \cdot (y \cdot v)\omega.$$

Таким образом, отображение $\omega : P \longrightarrow G \cdot F\rho$ является гомоморфизмом и даже эпиморфизмом. Поэтому если через C обозначить ядро гомоморфизма ω, то $P/C \cong G \cdot F\rho$. Так как $G \cap C = 1$, то группа P вложима в прямое произведение

$$P/G \times P/C \cong F \times G \cdot F\rho.$$

Отсюда и из того, что группы F и $G \cdot F\rho$ $\mathcal{K}$-аппроксимируемы (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемы), а класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подгрупп, следует, что и группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема). □

Непосредственным следствием леммы 5 является

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, замкнутый относительно подгрупп. Пусть голоморф $\operatorname{Hol} G$ группы G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой) группой. Тогда любое расщепляемое расширение P группы G с помощью $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой) группы F само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой) группой.*

3. Доказательства основных результатов

В этом разделе предполагается, что группа $G \in \mathrm{A}$. Очевидно, любая подгруппа конечного индекса n группы G содержит автоморфно допустимую подгруппу группы G конечного индекса. В качестве такой подгруппы можно взять пересечение всех подгрупп индекса n группы G.

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ и $\varphi \neq 1$. Тогда $a^{-1} \cdot a\varphi \neq 1$ для некоторого элемента a группы G. Так как по условию теоремы 1 группа G финитно аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа M конечного индекса, не содержащая элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Обозначим через N автоморфно допустимую подгруппу группы G конечного индекса, содержащуюся в M. Очевидно, подгруппа N не содержит элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Автоморфная допустимость подгруппы N позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования $\rho_N : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} G/N$. Так как $a^{-1} \cdot a\varphi \notin N$, то $aN \neq a\varphi N$, т. е. $aN \neq (aN)\varphi_N$. Поэтому $\varphi_N \neq 1$. Таким образом, ρ_N — гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} G$ в группу $\operatorname{Aut} G/N$, переводящий φ в неединичный элемент φ_N, причем группа $\operatorname{Aut} G/N$ конечна, так как конечен индекс подгруппы N в группе G. Следовательно, группа $\operatorname{Aut} G$ финитно аппроксимируема.

Докажем теперь финитную аппроксимируемость группы $\operatorname{Hol} G$. Так как группа G финитно аппроксимируема, то пересечение всех ее подгрупп конечного индекса тривиально. Отсюда следует, что пересечение всех ее автоморфно допустимых подгрупп конечного индекса тривиально, причем все они нормальны в $\operatorname{Hol} G$. Поэтому для доказательства финитной аппроксимируемости группы $\operatorname{Hol} G$ остается заметить, что фактор-группа группы $\operatorname{Hol} G$ по автоморфно допустимой подгруппе N группы G, имеющей в G конечный индекс, является финитно аппроксимируемой группой, так как эта фактор-группа представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью финитно аппроксимируемой группы, изоморфной $\operatorname{Aut} G$.

2. Так как по условию теоремы 1 группа G почти π-примарно аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то в ней существует π-примарно аппроксимируемая подгруппа A конечного индекса. Без потери общности считаем, что A — автоморфно допустимая подгруппа группы G.

Для каждого числа $p \in \pi$ рассмотрим подгруппу $A'A^p$. Очевидно, подгруппа $A'A^p$ является автоморфно допустимой в A и даже в G. Обозначим через Γ подгруппу группы $\operatorname{Aut} G$, состоящую из всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$ для всех $p \in \pi$.

По лемме 3 подгруппа $A\Gamma$ группы $\operatorname{Hol} G$ является π-примарно аппроксимируемой и имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Hol} G$. □

Доказательство теорем 2 *и* 3. Пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F.

Предположим, что группы G и F $\mathcal{F}$-аппроксимируемы (почти π-примарно аппроксимируемы для некоторого конечного множества π простых чисел). Тогда по теореме 1 группа $\operatorname{Hol} G$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема). Отсюда по лемме 6 следует, что и группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема (почти π-примарно аппроксимируема). Теорема 2 доказана.

Предположим теперь, что группы G и F π-примарно аппроксимируемы для некоторого множества π простых чисел, и что для каждого $p \in \pi$ имеет место включение $[F, G] \subseteq G'G^p$. Как и в лемме 5 рассмотрим сопровождающий гомоморфизм $\rho : F \longrightarrow \operatorname{Aut} G$, т. е. гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу u из F автоморфизм φ_u группы G, представляющий собой ограничение на G внутреннего автоморфизма группы P, производимого элементом u. Так как для для каждого $p \in \pi$ имеет место включение $[F, G] \subseteq G'G^p$, то для любого элемента u из F автоморфизм φ_u действует тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$. Поэтому $F\rho \subseteq \Gamma$, где Γ — множество всех автоморфизмов группы G, действующих тождественно по модулю подгруппы $G'G^p$ для каждого $p \in \pi$. Так как группа G π-примарно аппроксимируема, то по лемме 4 подгруппа $G\Gamma$ группы $\operatorname{Hol} G$ также является π-примарно аппроксимируемой. Тем же свойством обладает и ее подгруппа $G \cdot F\rho$. Отсюда и из того, что F π-примарно аппроксимируема, по лемме 5 следует, что и P π-примарно аппроксимируема. Теорема 3 доказана.

Литература

[1] Мальцев А.И. *Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами*, Матем. сб. **8** (3), 405–422 (1940).

[2] Мальцев А.И. *Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы*, Матем. сб. **25** (3), 347–363 (1949).

[3] Hirsh K.A. *On infinite soluble groups*, J. London Math. Soc. **27**, 81–85 (1952).

[4] Learner A. *Residual properties of polycyclic groups*, J. Math. **8**, 536–542 (1964).

[5] Мальцев А.И. *О гомоморфизмах на конечные группы*, Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, **18** (5), 49–60 (1958).

[6] Смирнов Д.М. *К теории финитно аппроксимируемых групп*, Укр. матем. журн. **15**, 453–457 (1963).

[7] Baumslag G. *Automorphism groups of residually finite groups*, J. London Math. Soc. **38**, 117–118 (1963).

[8] Lubotzky A. *Normal automorphisms of free groups*, J. Algebra. **63**, 494–498 (1980).

[9] Шмелькин А.Л. *Полициклические группы*, Сиб. матем. журн. **9**, 234–235 (1968).

[10] Мерзляков Ю.И. *Целочисленное представление голоморфов полициклических групп*, Алгебра и логика **9** (5), 539–558 (1980).

[11] Lubotzky A. *A group-theoretic characterization of linear groups*, J. Algebra. **113**, 207–214 (1988).

[12] Платонов В.П. *Некоторые проблемы для конечно порожденных групп*, ДАН БССР **12**, 492–494 (1968).

[13] Lennox J., Robinson D. *The theory of infinite soluble groups* (Clarendon press, Oxford, 2004).

[14] Paris L. *Residual p-properties of mapping class groups and surface groups*, arXiv: math. GR/0703703v1 (2007).

[15] Formanek E., Procesi C. *The automorphism group of a free group is not linear*, J. Algebra **149** (2), 494–499 (1992).

[16] Плоткин Б.И. *Группы автоморфизмов алгебраических систем* (Наука, М, 1966).

Д.Н. Азаров

доцент, кафедра алгебры и математической логики,

Ивановский государственный университет,

ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,

`e-mail:` azarovdn@mail.ru

D.N. Azarov

Residual properties of automorphisms groups and split extensions

Abstract. Let a group G satisfy condition A: for every positive integer n the number of all subgroups of the group G of index n is finite. We prove that if G is virtually residually finite p-group for some prime p, then the automorphism group of the group G is virtually residually finite p-group. A similar result is obtained for a split extension of the group G by virtually residually finite p-group. Moreover, we prove that if the group G is a virtually residually finite nilpotent π-group for some finite set π of primes, then the automorphism group of the group G and the split extension of the group G by a virtually residually finite nilpotent π-group are virtually residually finite nilpotent π-groups.

Keywords: linear group, automorphism group, virtually residually finite p-group.

D.N. Azarov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Ivanovo State University,
39 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia,

`e-mail:` azarovdn@mail.ru