Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, № 2, с. 65–69 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0020*

Н.А. КОРЕШКОВ

О ТРИАНГУЛИЗАЦИИ n-КРАТНЫХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ

Аннотация. В работе доказан аналог теоремы Ли для конечномерных n-кратных разрешимых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Ключевые слова: n-кратная алгебра Ли, модуль умножений, представление n-кратной алгебры.

УДК: 512.554

Abstract. We prove an analog of the Lie theorem for finite-dimensional n-tuple solvable Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic 0.

Keywords: n-tuple Lie algebra, module of multiplications, representation of an n-tuple algebra.

В работе [1] было введено понятие n-кратной алгебры Ли. В той же работе приведена мотивировка рассматриваемого определения и некоторые примеры соответствующих алгебр.

Определение 1 ([1])**.** Векторное пространство L над полем P называется n-кратной алгеброй Ли, если существуют n билинейных кососимметрических отображений $s_i : L \times L \to L$ таких, что

$$(as_ib)s_jc + (bs_ic)s_ja + (cs_ia)s_jb = 0 \tag{1}$$

для любых элементов $a, b, c \in L$.

Заметим, что относительно каждой операции s_i пространство L является алгеброй Ли.

Для каждой пары операций s_i и s_j можно рассмотреть новую операцию $s = \alpha_i s_i + \alpha_j s_j$, $\alpha_i, \alpha_j \in P$, определяемую правилом $asb = \alpha_i(as_ib) + \alpha_j(as_jb)$. Очевидно, операция s билинейна и кососимметрична. Если $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$, $\widetilde{s} = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j s_j$, $\alpha_i, \beta_j \in P$, то

$$(asb)\widetilde{s}c + (bsc)\widetilde{s}a + (csa)\widetilde{s}b = 0, \tag{2}$$

когда $a, b, c \in L$.

Обозначим через S векторное пространство над P, порожденное операциями $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Будем называть его модулем умножений алгебры L.

Если векторное пространство I является идеалом в n-кратной алгебре Ли L, т. е. $xs_iy \in I$, $i = 1, \ldots, n$, когда $x \in I$, $y \in L$, то $xsy \in I$ для любого $s \in S$. Следовательно, структура алгебры Ли L, определяемая модулем умножений S, совпадает со структурой n-кратной алгебры Ли в смысле определения 1.

В дальнейшем будем считать, что L является n-кратной алгеброй Ли, если $\dim_p S = n$.

Поступила 10.02.2011

Определение 2. Билинейное отображение $\rho : S \times L \to \mathrm{End}_p(V)$ назовем представлением n-кратной алгебры Ли L с модулем умножений S в пространстве V над полем P, если для любых двух элементов s и s' из S имеет место равенство

$$\rho_s(as'b) = \rho_s(a)\rho_{s'}(b) - \rho_s(b)\rho_{s'}(a), \quad a, b \in L, \tag{3}$$

где $\rho_s(c)$ — линейный оператор из $\mathrm{End}_p(V)$, являющийся образом пары (s, c), $s \in S$, $c \in L$, при отображении ρ.

В дальнейшем для краткости n-кратную алгебру Ли с модулем умножений S будем обозначать $L(S)$.

Обозначим $L^{(k)} = \langle L^{(k-1)} s L^{(k-1)},\ s \in S\rangle_p$, $k = 1, 2, \dots$, где $L^{(0)} = L$. Тогда так же, как и в случае обычных алгебр Ли, n-кратную алгебру Ли $L = L(S)$ назовем разрешимой, если существует такое k, что $L^{(k)} = 0$.

Теорема. *Пусть $\rho : S \times L \to \mathrm{End}_p(V)$ — представление конечномерной n-кратной разрешимой алгебры Ли $L = L(S)$ в конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем P характеристики 0. Если любая алгебра Ли $L_\rho(x)$, порожденная операторами $\rho_s(x)$ для любого $s \in S$ и фиксированного элемента $x \in L$, разрешима, то в пространстве V существует базис, в котором все операторы $\rho_s(x)$ $\forall s \in S$, $\forall x \in L$ одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. Достаточно доказать существование общего собственного вектора у всех операторов $\rho_s(x)$ $\forall s \in S$, $\forall x \in L$. Переходя затем к фактор-представлению алгебры $L(S)$ в фактор-пространстве V/W, где W — пространство всех собственных векторов множества $\rho_S(L) = \{\rho_s(x),\ s \in S,\ x \in L\}$, через конечное число шагов получим утверждение теоремы.

Доказательство указанного утверждения будем вести индукцией по размерности $L(S)$.

Если $\dim_p L(S) = 1$, т. е. $L(S) = Px$, то при условии теоремы имеем, что алгебра $L_\rho(x)$ разрешима, а следовательно, у всех операторов $\rho_S(L) = \{\rho_s(y),\ s \in S,\ y \in L\} \subseteq L_\rho(x)$ имеется общий собственный вектор в V.

Так как $L \supsetneqq L^{(1)}$, причем $L^{(1)}$ — идеал в L, то в L существует такой идеал K, что $\mathrm{codim}_L K = 1$. Тогда по предположению индукции у совокупности операторов $\rho_S(K) = \{\rho_s(y),\ s \in S,\ y \in K\}$ существует общий собственный вектор.

Пусть $W = \{v \in V,\ \rho_s(y)v = \lambda_s(y)v,\ s \in S,\ y \in K\}$ и пусть $L = K \oplus Px$. Обозначим через $s_1, s_2, \dots, s_n$ некоторый базис модуля умножений S. Для любого вектора $w \in W$ рассмотрим пространство $U_w = \sum\limits_{i \geq 0} U_i$, где $U_0 = \langle w\rangle_p$, $U_{i+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_{s_k}(x) U_i$. Пусть $U^{(m)} = \sum\limits_{i=1}^{m} U_i$. В силу конечномерности пространства V существует m такое, что $U^{(m)} = U^{(m+1)} = \dots = U$, но $U^{(0)} \subset U^{(1)} \subset \cdots U^{(m)} = U$.

Если $U^{(k)} \supset U^{(k-1)}$, то существует такой базис $\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_n$ пространства S, что любой порождающий элемент $\rho_{\overline{s}_{i_1}}(x) \dots \rho_{\overline{s}_{i_k}}(x) w$ пространства U_k не принадлежит пространству $U^{(k-1)}$. Покажем, что в пространстве U существует базис, в котором для любого фиксированного j матрица оператора $\rho_{\overline{s}_j}(y)$ при всех $y \in K$ в этом базисе имеет треугольный вид. Для упрощения обозначений будем считать, что исходная система умножений $s_1, \dots, s_n$ уже обладает указанным выше свойством.

На множестве $I = \{1, 2, \dots, n\}$ определим отношение порядка, полагая

1) $r < k$ в смысле обычного отношения порядка в $\mathbb{Z}$, если $r, k \in I \setminus \{j\}$;

2) $j < k$, если $k \in I \setminus \{j\}$.

Здесь j — некоторый фиксированный элемент из I.

На множестве наборов $(a_1, \dots, a_r, \dots, a_k)$ любой конечной длины, где $a_r \in I$, определим отношение порядка следующим образом:

1) $(a_1, \dots, a_k) < (b_1, \dots, b_r)$, если $k < r$;

2) $(a_1, \dots, a_k) < (b_1, \dots, b_k)$, если $a_1 = b_1, \dots, a_q = b_q$, но $a_{q+1} < b_{q+1}$.

Если из множества образующих $\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_k}}(x)w$ пространства U удалить те, которые являются линейными комбинациями элементов $\rho_{s_{j_1}}(x) \dots \rho_{s_{j_r}}(x)w$, когда $(j_1, \dots, j_r) < (i_1, \dots, i_k)$, то оставшиеся элементы образуют базис пространства U. Так как $U = U^{(m)} \supset U^{(m-1)} \supset \dots \supset U^{(0)} = \langle w \rangle_p$, то в силу условий на систему умножений $s_1, \dots, s_n$ векторы $\rho_{s_j}^k(x)w$, $k = 0, 1, \dots, m$, входят в базис пространства U.

В силу соотношения $\rho_{s_j}(ys_ix) = \rho_{s_j}(y)\rho_{s_i}(x) - \rho_{s_j}(x)\rho_{s_i}(y)$ легко проверить, что

$$\rho_{s_j}(y)\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_k}}(x)w \equiv \rho_{s_j}(x)\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_{k-1}}}(x)\rho_{s_{i_k}}(y)w \pmod{U^{k-1}}$$

при $y \in K$. Так как $\rho_{s_{i_k}}(y)w = \lambda_{i_k}(y)w$, $\lambda_{i_k}(y) \in P$, то

$$\rho_{s_j}(y)\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_k}}(x)w \equiv \lambda_{i_k}(y)\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_k}}(x)w \pmod{U^{(k-1)}}$$

тогда и только тогда, когда $s_{i_1} = s_{i_2} = \dots = s_{i_k} = s_j$. Во всех остальных случаях

$$\rho_{s_j}(y)\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_k}}(x)w \equiv \lambda_{i_k}(y)\rho_{s_j}(x)\rho_{s_{i_1}}(x) \dots \rho_{s_{i_{k-1}}}(x)w \pmod{U^{(k-1)}},$$

причем $(j, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}) < (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k)$.

Таким образом, матрица оператора $\rho_{s_j}(y)$ в указанном базисе пространства U имеет треугольный вид, причем $\operatorname{tr}_U \rho_{s_j}(y) = (m+1)\lambda_{s_j}(y)$. В частности, если элемент y заменить на (ys_ix), то формула приобретает вид $\operatorname{tr}_U \rho_{s_j}(ys_ix) = (m+1)\lambda_{s_j}(ys_ix)$. Доказанная формула справедлива для любых индексов i и j. Так как

$$\begin{aligned}\rho_{s_i}(ys_jx) + \rho_{s_j}(ys_ix) = \rho_{s_i}(y)\rho_{s_j}(x) - \rho_{s_i}(x)\rho_{s_j}(y) + \rho_{s_j}(y)\rho_{s_i}(x) - \rho_{s_j}(x)\rho_{s_i}(y) = \\ = [\rho_{s_i}(y), \rho_{s_j}(x)] + [\rho_{s_j}(y), \rho_{s_{i(x)}}],\end{aligned}$$

то $\operatorname{tr}_U \rho_{s_j}(ys_ix) + \operatorname{tr}_U \rho_{s_i}(ys_jx) = 0$. Следовательно, $(m+1)\big(\lambda_{s_j}(ys_ix) + \lambda_{s_i}(ys_jx)\big) = 0$. Так как характеристика поля P равна нулю, то для любого элемента $w \in W$ имеем

$$\big(\rho_{s_j}(ys_ix) + \rho_{s_i}(ys_jx)\big)w = \big(\lambda_{s_j}(ys_ix) + \lambda_{s_i}(ys_jx)\big)w = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$. Тогда

$$\begin{aligned}[\rho_s(y), \rho_s(x)] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 [\rho_{s_i}(y), \rho_{s_i}(x)] + \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i\alpha_j([\rho_{s_i}(y), \rho_{s_j}(x)] + \\ + [\rho_{s_j}(y), \rho_{s_i}(x)]) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \rho_{s_i}(ys_ix) + \sum_{1 \le i < i \le n} \alpha_i\alpha_j\big(\rho_{s_i}(ys_jx) + \rho_{s_j}(ys_ix)\big).\end{aligned}$$

Следовательно, $[\rho_s(y), \rho_s(x)]w = 0 \quad \forall w \in W$.

Обозначим $W_{s,y} = \{v \in V,\ \rho_s(y)v = \lambda_s(y)v\}$ для некоторых $y \in K$ и $s \in S$. Из $W_{s,y} \supseteq W$ следует, что ранг матрицы $\rho_s(y) - \lambda_s(y)E$ (где E — единичная матрица) меньше или равен $\dim V - \dim W$. Пусть $e_1, \dots, e_d$ — некоторый базис пространства K, $y = \sum\limits_{i=1}^{d} y_ie_i$, $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_is_i$, где $s_1, \dots, s_n$ — выбранный выше базис модуля умножений S. Тогда все определители матрицы $\rho_s(y) - \lambda_s(y)E$, размер которых строго больше $\dim V - \dim W$, рассматриваемые как многочлены от $\alpha_1 \dots, \alpha_n$, $y_1, \dots, y_d$, тождественно равны нулю. Однако существует набор

$\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$, $y_1^0, \ldots, y_d^0$, при котором некоторый определитель размера $\dim V - \dim W$ не равен нулю. Тогда этот определитель $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (как многочлен от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) при фиксированном наборе $y_1^0, \ldots, y_d^0$ является ненулевым многочленом.

Рассмотрим два многочлена из кольца многочленов от n^2 переменных $P[x_1^1, \ldots, x_n^n]$: $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ и $G(x) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$. Так как существует $\alpha = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^n) \in P^{n^2}$ с условием $F(\alpha) \neq 0$ и $G(\alpha) \neq 0$, то для каждого умножения $\overline{s}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k s_i$, $k = 1, \ldots, n$, имеет место равенство $W_{\bar{s}_k, y_0} = W$. Поэтому $\rho_{\bar{s}_k}(y_0)\rho_{\bar{s}_k}(x)w = \lambda_{\bar{s}_k}(y_0)\rho_{\bar{s}_k}(x)w$ для любого $w \in W_{\bar{s}_k, y_0} = W$, т.е. $\rho_{\bar{s}_k}(x)W \subseteq W$. Из линейной независимости элементов $\overline{s}_k$, $k = 1, \ldots, n$, вытекает $\rho_s(x)W \subseteq W \quad \forall s \in S$.

Поскольку алгебра Ли $L_\rho(x)$, порожденная операторами $\rho_s(x)$, $s \in S$, разрешима, то существует общий собственный вектор $w \in W$ для всех операторов $\rho_s(x)$, $s \in S$. Отсюда следует, что этот вектор будет общим собственным вектором для всех операторов $\rho_s(y)$, $s \in S$, $y \in L$. □

Обозначим через $\mathrm{Lie}(\rho, L(S))$ алгебру Ли линейных операторов, порожденную всеми операторами $\rho_s(y)$, $s \in S$, $y \in L(S)$. Тогда из теоремы вытекает

Следствие 1. Если для n-кратной алгебры Ли $L(S)$ и ее представления ρ в пространстве V выполняются условия теоремы, то в пространстве V существует базис, в котором матрицы всех операторов из $\mathrm{Lie}(\rho, L(S))$ имеют треугольный вид.

Так как любая подалгебра алгебры треугольных матриц разрешима, то имеет место

Следствие 2. Если для n-кратной алгебры Ли $L(S)$ и ее представления ρ выполняются условия теоремы, то алгебра Ли $\mathrm{Lie}(\rho, L(S))$ разрешима.

Если в качестве пространства представления рассмотреть саму алгебру $L(S)$, а в качестве отображения ρ — отображение $\mathrm{ad} : S \times L \to \mathrm{End}_p(L)$, определяемое правилом $\mathrm{ad}(s, x) = \mathrm{ad}_s\, x$, где $\mathrm{ad}_s\, x$ — оператор левого умножения, т.е. $(\mathrm{ad}_s\, x)(y) = xsy$, $y \in L$, $s \in S$, то соотношение (3) из определения 2 будет переформулировкой соотношения (2), эквивалентного соотношению (1). Тогда в силу следствия 1 имеем

Следствие 3. Пусть $L(S)$ — конечномерная n-кратная разрешимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Если для любого элемента $x \in L(S)$ алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(x)$ разрешима, то в $L = L(S)$ существует цепь идеалов $L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_m = \langle 0 \rangle$ этой n-кратной алгебры Ли такая, что $\dim L_i = m - i$, где $m = \dim L$.

Приведем примеры, показывающие, что каждое из условий теоремы, рассматриваемое отдельно, недостаточно для вывода положений теоремы.

1) Пусть L — трехмерное пространство над полем P с базисом e, f, g. Определим две операции умножения s_1 и s_2 формулами:

a) $es_1f = g$, $es_1g = fs_1g = es_1e = fs_1f = gs_1g = 0$;

b) $fs_2g = e$, $fs_2e = gs_2e = es_2e = fs_2f = gs_2g = 0$.

Легко проверить, что получается двукратная разрешимая алгебра Ли. Пусть $x = \alpha e + \beta f + \gamma g$, $\alpha, \beta, \gamma \in P$, $\beta \cdot \gamma \neq 0$. Обозначим $A = \mathrm{ad}_{s_1} x$, $B = \mathrm{ad}_{s_2} x$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(x)$ — трехмерное векторное пространство с базисом A, B, C, формулы умножения в котором имеют вид $[A, B] = C$, $[A, C] = 2\beta\gamma A$, $[B, C] = -2\beta\gamma B$. Эти формулы показывают, что $L_{\mathrm{ad}}^2(x) = L_{\mathrm{ad}}(x)$, т.е. алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(x)$ неразрешима. Таким образом, этот пример показывает, что из разрешимости n-кратной алгебры Ли $L(S)$ не следует, вообще говоря, разрешимость каждой алгебры Ли $L_{\mathrm{ad}}(x)$, $x \in L$, и тем более в L не существует базиса, в котором матрицы всех операторов $\mathrm{ad}_s\, y$, $s \in S = \langle s_1, s_2 \rangle_p$, $y \in L$, имеют треугольный вид.

2) Пусть $L = \langle e, f \rangle_p$ — двумерное пространство над P с базисом e, f. Превратим его в двукратную алгебру Ли, задав два следующих умножения:

a) $es_1f = f$, $es_1e = fs_1f = 0$;

b) $es_2f = e$, $es_2e = fs_2f = 0$.

Легко проверить, что L — простая двукратная алгебра Ли. С другой стороны, если $x = \alpha e + \beta f$, $\alpha, \beta \in P$, то $\mathrm{ad}_{s_1} x = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\mathrm{ad}_{s_2} x = \left[\begin{smallmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Обозначим $A = \mathrm{ad}_{s_1} x$, $B = \mathrm{ad}_{s_2} x$. Тогда $[A, B] = -\beta A - \alpha B$. Таким образом, $L_{\mathrm{ad}}(x) = \langle A, B \rangle_p$. Так как $L^{(1)}_{\mathrm{ad}}(x) = \langle -\beta A - \alpha B \rangle$, $L^{(2)}_{\mathrm{ad}}(x) = \langle 0 \rangle$, то любая алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(x)$ разрешима, в то время как исходная двукратная алгебра Ли проста.

Литература

[1] Корешков Н.А. *О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр*, Изв. вузов. Матем., №2, 33–38 (2010).

Н.А. Корешков

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Nikolai.Koreshkov@ksu.ru

N.A. Koreshkov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Nikolai.Koreshkov@ksu.ru