Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 2, с. 14–19 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0009*

С.Р. ЕНИКЕЕВА

ОБ ОДНОМ ПРЯМОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В статье предложено теоретическое обоснование метода Боголюбова–Крылова для слабо сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: слабо сингулярные интегральные уравнения, метод сплайн-коллокаций, метод Боголюбова–Крылова.

УДК: 517.968 : 519.6

Abstract. In this paper we theoretically justify the Bogolyubov–Krylov method for weakly singular integral equations.

Keywords: weakly singular integral equations, spline-collocation method, Bogolyubov–Krylov method.

1. Введение

Для интегральных уравнений с гладкими периодическими ядрами академики Н.Н. Боголюбов и Н.М. Крылов предложили эффективный прямой метод решения (например, в книге [1]). В последние годы этот метод применяется также для решения различных классов интегральных уравнений с разрывными ядрами (см., например, работы [2]–[12] и библиографии в них). Ниже предлагается теоретическое обоснование метода Боголюбова–Крылова для часто встечающегося в приложениях интегрального уравнения

$$Kx \equiv x(t) + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{\ln|\tau - t|}{(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}} x(\tau)d\tau + \\ + \mu \int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)}{(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}} x(\tau)d\tau = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad (1)$$

где $y(t) \in C[-1,1]$ и $h(t,\tau) \in C[-1,1]^2$ — заданные функции, $x(t)$ — искомая функция, параметры $\alpha, \beta \in (-1,1)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, причем интегралы понимаются как несобственные. При этом в основу исследований принят предложенный Б.Г. Габдулхаевым (например, [2]–[10]) способ исследования сплайн-методов решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений.

Поступила 22.10.2007

2. Метод сплайн-коллокации нулевого порядка

На сегменте $[-1,1]$ возьмем произвольную сетку из $n+1$ узлов

$$\Delta_n : -1 = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = +1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

с условием на норму сетки

$$\|\Delta_n\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} (t_k - t_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Введем также вспомогательную сетку узлов

$$\bar{t}_j = \frac{t_{j-1} + t_j}{2}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Обозначим через $\psi_k(t) = \psi_{k,n}(t)$, $k = \overline{1,n}$, фундаментальные сплайны нулевой степени по сетке узлов (2):

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \ \ t \in [-1, t_1], \\ 0 & \text{при} \ \ t \notin [-1, t_1]; \end{cases}$$

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \ \ t \in (t_{k-1}, t_k], \\ 0 & \text{при} \ \ t \notin (t_{k-1}, t_k]; \end{cases} \qquad k = \overline{2,n}.$$

Приближенное решение интегрального уравнения (1) будем искать в виде сплайна нулевой степени

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(t), \quad t \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будем определять по методу коллокаций из условий

$$K(x_n; \bar{t}_j) = y(\bar{t}_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Эти условия эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\alpha_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \alpha_k = y_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где

$$y_j = y(\bar{t}_j), \quad \rho(\tau) = (1-\tau)^{-\alpha}(1+\tau)^{-\beta},$$

$$\alpha_{jk} = \lambda \int_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(\tau) \ln|\tau - \bar{t}_j| d\tau + \mu \int_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(\tau) h(t_j, \tau) d\tau.$$

Для вычислительной схемы (1)–(6) справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

а) *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in M[-1,1]$ *при любой правой части* $y(t) \in M[-1,1]$;

б) *функции* $h(t,\tau) \in C[-1,1]^2$ *и* $y(t) \in C[-1,1]$.

Тогда при всех $n \geqslant n_0$, *где* $n_0 \in \mathbb{N}$ *определяется ниже, СЛАУ* (6) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \psi_k(t) \tag{4'}$$

сходятся к точному решению равномерно со скоростью

$$\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x^*(t)-x_n^*(t)| = O\{\omega(y;\|\Delta_n\|)+\omega_t(h;\|\Delta_n\|)+\|\Delta_n\|^{1-\gamma}\big|\ln\|\Delta_n\|\big|\}.$$

Здесь и далее $\gamma=\max(|\alpha|,|\beta|)$, $\omega(y;\delta)$ — модуль непрерывности функции $y(t)\in C[-1,1]$ с шагом $\delta\in(0,2]$, а $\omega_t(h;\delta)$ — частный модуль непрерывности функции $h(t,\tau)\in C[-1,1]^2$ по переменной $t\in[-1,1]$ равномерно относительно $\tau\in[-1,1]$.

Доказательство. Положим $X=Y=M[-1,1]$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|, \quad \varphi\in X,$$

где $M[-1,1]$ — пространство всех ограниченных на $[-1,1]$ функций. Тогда уравнение (1) эквивалентно линейному операторному уравнению

$$Kx\equiv x+\lambda Hx+\mu Vx = y \quad (x,y\in X), \tag{7}$$

где

$$H(x;t)=\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau-t|}{(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}}x(\tau)d\tau,$$
$$V(x;t)=\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)}{(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}}x(\tau)d\tau, \quad -1\leqslant t\leqslant 1.$$

Поэтому в силу условия a) доказываемой теоремы оператор K имеет ограниченный обратный $K^{-1}:X\to X$

$$\|K^{-1}\|\leqslant c_1=\mathrm{const}<\infty. \tag{8}$$

Обозначим через X_n множество всех сплайнов нулевой степени вида (4). Очевидно, $X_n\subset X$ и $\dim X_n=n<\infty$. Введем линейный оператор проектирования $P_n: X\to X_n\subset X$ по формуле

$$P_n(\varphi;t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\bar t_k)\psi_k(t), \quad n\in\mathbb{N}, \quad \varphi\in C[-1,1].$$

Легко получить

$$P_n^2=P_n \quad \text{и} \quad \|P_n\|=1, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Как доказано в [13], для любой функции $\varphi(t)\in C[-1,1]$ справедливы соотношения

$$\|\varphi-P_n\varphi\|\leqslant\omega\left(\varphi;\frac{\|\Delta_n\|}{2}\right)\to 0, \quad n\to\infty. \tag{10}$$

Теперь нетрудно показать, что условия (5), а следовательно, и СЛАУ (6) эквивалентны операторному уравнению

$$K_nx_n\equiv P_nKx_n=P_ny \quad (x_n, \quad P_ny\in X_n).$$

Отсюда в силу (9) имеем

$$K_nx_n\equiv x_n+\lambda P_nHx_n+\mu P_nVx_n=P_ny \quad (x_n, \quad P_ny\in X_n). \tag{11}$$

Докажем, что уравнения (7) и (11) близки в смысле теоремы 7 главы I [3]. Ввиду условия б) и формулы (10) имеем

$$\delta_n\equiv\|y-P_ny\|\leqslant\omega\left(y;\frac{\|\Delta_n\|}{2}\right)\to 0, \quad n\to\infty. \tag{12}$$

Известно (например, [2], [6]–[9]), что для любой $\varphi \in M[-1,1]$ справедлива оценка

$$\omega(H\varphi;\delta) \leqslant c_2\|\varphi\|(1+|\ln\delta|)\delta^{1-\gamma}, \quad 0<\delta\leqslant 2, \tag{13}$$

где c_2 — положительная постоянная, не зависящая от функции φ и параметра δ. Теперь для любого $x_n \in X_n$ в силу неравенства (13) и соотношений (7), (11) и (12) находим последовательно

$$\begin{aligned}\|Kx_n - K_nx_n\| &= \|\lambda Hx_n + \mu Vx_n - P(\lambda Hx_n+\mu Vx_n)\| \leqslant \\ &\leqslant |\lambda|\,\|Hx_n - P_nHx_n\| + |\mu|\,\|Vx_n - P_nVx_n\| \leqslant \\ &\leqslant |\lambda|\omega\left(Hx_n;\frac{\|\Delta_n\|}{2}\right) + |\mu|\omega\left(Vx_n;\frac{\|\Delta_n\|}{2}\right) \leqslant \\ &\leqslant c_3\|x_n\|\|\Delta_n\|^{1-\gamma}\big|\ln\|\Delta_n\|\big| + c_4\omega_t(h;\|\Delta_n\|)\|x_n\| \leqslant \\ &\qquad c_5\|x_n\|\big\{\|\Delta_n\|^{1-\gamma}\big|\ln\|\Delta_n\|\big| + \omega_t(h;\|\Delta_n\|)\big\},\end{aligned}$$

где c_3, c_4 и c_5 — положительные постоянные, не зависящие от $x_n \in X_n$ и от $n\in\mathbb{N}$.

Поэтому имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|K-K_n\|_{X_n\to X} \leqslant c_5\big\{\|\Delta_n\|^{1-\gamma}\big|\ln\|\Delta_n\|\big| + \omega_t(h;\|\Delta_n\|)\big\}. \tag{14}$$

Отсюда и из неравенства (8) следует

$$q_n \equiv \|K^{-1}\|\varepsilon_n \to 0, \quad n\to\infty. \tag{14$'$}$$

В силу соотношений (8) и (14′) существует такое $n_0\in\mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant n_0$

$$q_n \equiv \|K^{-1}\|\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Тогда в силу (8), (12)–(15) из ([3], гл. I, теорема 1) следует требуемое утверждение. □

Следствие. Пусть функции $y(t)\in \mathrm{Lip}_M\delta$ и $h\in\mathrm{Lip}_M\delta$, $0<\delta\leqslant 1$, по переменной $t\in[-1,1]$.

Тогда метод (1)-(6) сходится равномерно со скоростью

$$\|x^*-x_n^*\| = O\big\{\|\Delta_n\|^{1-\gamma}\big|\ln\|\Delta_n\|\big| + \|\Delta_n\|^{\delta}\big\}; \tag{16}$$

если же сетка (2) является равномерной

$$t_k = -1+\frac{2k}{n}, \quad k=\overline{0,n}, \tag{2$'$}$$

то метод (1)–(6) сходится равномерно со скоростью

$$\|x^*-x_n^*\| = O\left\{\frac{\ln n}{n^{1-\gamma}} + \frac{1}{n^{\delta}}\right\}, \tag{16$'$}$$

где параметры γ и δ определены выше.

3. Метод Боголюбова–Крылова

Пусть теперь сетки узлов (2) и (3) являются равномерными, т. е. определяются по формулам соответственно (2′) и

$$\bar t_j = t_{j-\frac12} = -1+\frac{2j-1}{n}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{3$'$}$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\overline{x}_n(t) = y(t) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^* b_k(t), \quad -1\leqslant t\leqslant 1, \tag{17}$$

где

$$b_k(t) = \lambda \int_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(\tau) \ln|\tau - t| d\tau + \mu \int_{t_{k-1}}^{t_k} \rho(\tau) h(t,\tau) d\tau, \tag{18}$$

а $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ — решение СЛАУ (6).

Для вычислительной схемы ($3'$), (17), (18) справедлива

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *метод Боголюбова–Крылова сходится равномерно со скоростью*

$$\|x^*(t) - \overline{x}_n(t)\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\left\{\omega\left(y; \frac{1}{n}\right) + \omega_t\left(h; \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n^{1-\gamma}}\right\}.$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$x^*(t) \equiv y(t) - \lambda H(x_n^*; t) - \mu V(x_n^*; t). \tag{19}$$

Приближенное решение (17) можно представить в виде

$$\overline{x}_n(t) = y(t) - \lambda H(x_n^*; t) - \mu V(x_n^*; t). \tag{20}$$

Из формул (19) и (20) находим

$$x^*(t) - \overline{x}_n(t) = -\lambda H(x^* - x_n^*; t) - \mu V(x^* - x_n^*; t) \in C[-1,1].$$

Поэтому с учетом (1), ($3'$), (16) из теоремы 1 получаем требуемое утверждение:

$$\|x^*(t) - \overline{x}_n(t)\|_{C[-1,1]} \leqslant \|\lambda H + \mu V\|_{M\to C} \|x^* - x_n^*\|_{M[-1,1]} =$$
$$= O(\|x^* - x_n^*\|_{M[-1,1]}) = O\left\{\omega\left(y; \frac{1}{n}\right) + \omega_t\left(h; \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n^{1-\gamma}}\right\}.$$

Автор выражает благодарность участникам научного семинара кафедры теории функций и приближений Казанского государственного университета за внимание к работе.

Литература

[1] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

[2] Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория приближения функций. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.

[3] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

[4] Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

[5] Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.

[6] Габдулхаев Б.Г., Ахметов С.М. *О методе сплайн-коллокаций для интегральных уравнений* // Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1974. – С. 7–14.

[7] Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е. *О сходимости полигонального метода решения слабо сингулярных интегральных уравнений* // Функциональный анализ и его приложения. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – С. 60–72.

[8] Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н. *О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью* // Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1974. – С. 37–57.

[9] Габдулхаев Б.Г., Жечев Й.И. *Полигональный метод решения линейных уравнений* // Научни трудове Висш. пед. ин-т, г. Плодив. – 1971. – № 1. – С. 9-26.

[10] Габдулхаев Б.Г. *Решение операторных и интегральных уравнений методом Боголюбова–Крылова* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 10. – С. 34-47.

[11] Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. *Численные методы в задачах дифракции.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.
[12] Цецохо В.А. *Численное решение задач дифракции методом потенциалов*: Дисс. … д-ра физ.-матем. наук в форме научн. докл. – Новосибирск, 1987. – 38 с.
[13] Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.

С.Р. Еникеева

доцент, кафедра прикладной информатики и математики,
Казанский государственный аграрный университет,
420015, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 65

S.R. Enikeeva

Associate Professor, Chair of Applied Computer Science and Mathematics,
Kazan State Agrarian University,
65 K. Marx str., 420015, Kazan