Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.03.01 : МАТЕМАТИКА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

«Теорема единственности для линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами.»

Работа завершена:
«____»________________2015 г. ________________(К.А. Долишняк)
Работа допущена к защите:
Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
«____»________________2015 г. ________________(И.А. Бикчантаев)
Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук, профессор
«____»________________2015 г. ________________(А.М. Елизаров)

Казань — 2015

Содержание

Введение

Для полианалитических функций, т. е. для функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(z) = 0,\ \ z = x + \mathrm{i}y,$$

М. Б. Балком [1] была доказана внутренняя теорема единственности: если $f(z)$ в области регулярности обращается в нуль на некотором множестве, имеющем внутри этой области точку сгущения порядка n, то $f = 0$. В статье И. А. Бикчантаева [2] этот результат обобщается на решения более общих эллиптических уравнений.

Для решений эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} = 0, \tag{1}$$

И.А Бикчантаевым была доказана теорема единственности, аналогичная внутренней теореме единственности для аналитических функций.

Цель дипломной работы - построить примеры, когда множество, удовлетворяющее условиям теоремы, не является множеством единственности.

О множествах единственности для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами.

В области $D \subset \mathbb{C}$ рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} = 0, \tag{1}$$

где A_k — комплексные числа, $A_n \neq 0$ и характеристический многочлен $\sum_{k=0}^{n} A_k s^k$ не имеет вещественных корней (это есть условие эллиптичности уравнения (1)). Обозначим различные корни характеристического многочлена через $s_1, \ldots, s_\nu$, а их кратности соответственно через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, причем $\lambda_1 + \ldots + \lambda_\nu = n$.

Для формулировки результатов нам понадобятся следующие определения, принадлежащие М.Б.Балку.

Пусть E – произвольное множество точек плоскости комплексного переменного z; a – какая-либо точка (не обязательно из E); $l = \{z : \arg(z - a) = \alpha\}$ — луч, исходящий из точки a. Множество E назовем *сгущающимся к точке a вдоль луча l*, если в E содержится такая последовательность точек z_n, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} \arg(z_n - a) = \alpha.$$

Иначе можно так сказать: E сгущается к точке a вдоль луча l, если всякий угол с вершиной в точке a, содержащий внутри себя луч l, содержит также такую часть множества E, для которой a является предельной точкой.

Точку a назовем *точкой сгущения порядка k для множества E*, если E сгущается к точке a не менее, чем вдоль k попарно неколлинеарных лучей.

Множество E будем называть *множеством единственности* для решений уравнения (1), если для любого решения f этого уравнения из равенства $f|E = 0$ следует, что $f = 0$. Ясно, что множеством единственности для решений уравнения (1) является любое подмножество E области D, имеющее внутренние точки. В этом случае E содержит точки сгущения порядка бесконечность. Известны также теоремы о слабой и сильной единственности для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В теоремах о слабой единственности доказывают, что если решение обращается в нуль в некоторой окрестности нуля, то оно тождественно равно нулю. В теоремах о сильной единственности доказывают, что если решение убывает быстрее любой степени $|z|$ в связной окрестности начала координат, то оно тождественно равно нулю (см., например, [3,4]). Целью нашей работы является отыскание наиболее „тощих“ множеств E, являющихся множествами единственности для уравнения (1).

Теорема. *Если множество E имеет в области D точку сгущения порядка n, то решение уравнения (1), обращающееся в нуль на E, имеет в этой точке нуль порядка не менее, чем n. Лучи l_k, $k = 1, \ldots, n$, можно подобрать так, чтобы E было множеством единственности для решений уравнения (1).*

Доказательство. Любое решение уравнения (1) можно представить следующим образом:

$$f(z) = \sum_{q=1}^{v} \sum_{j=0}^{\lambda_q - 1} \overline{z}_q^j \varphi_{qj}(z_q), \tag{2}$$

где $z = x + iy$, $z_q = x + s_q y$ и φ_{qj} – аналитические функции своих аргументов (см., например, [5]).

Не умаляя общности, будем считать, что область D содержит внутри себя начало координат, которое является точкой сгущения порядка n для множества $E \subset D$. Для единственности представления (2) будем считать, что $\varphi_{qj}(z) = O\left(z^{\lambda_1+...+\lambda_{q-1}}\right)$, $z \to 0$.

Запишем тейлоровские разложения функций $\varphi_{qj}(z)$:

$$\varphi_{qj}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{qjk} z^k, c_{qjk} = 0 \text{ при } k = 0, 1, ..., \lambda_1 + ... + \lambda_{q-1} - 1. \tag{3}$$

Подставляя ряд (3) в (2), получаем представление

$$f(z) = \sum_{q=1}^{v} \sum_{j=0}^{\lambda_q - 1} \overline{z}_q^j \sum_{k=\lambda_1+...+\lambda_{q-1}}^{\infty} c_{qjk} z_q^k. \tag{4}$$

Пусть $l_m : z = e^{i\alpha_m} t$, $0 < t < \infty$, $m = 1, ..., n$, – неколлинеарные лучи, вдоль которых множество E сгущается к точке 0. Тогда множество E содержит n последовательностей точек, сходящихся к $z = 0$ вдоль этих лучей, т.е. существуют точки $\zeta_j^{(m)} \in E$ такие, что $\zeta_j^{(m)} \to 0$, $arg\ \zeta_j^{(m)} \to \alpha_m$, при $j \to \infty$, причем $\alpha_j - \alpha_k \not\equiv 0 \bmod \pi$, т.е. $(\alpha_j - \alpha_k)/\pi \notin \mathbb{Z}$, при $j \neq k$.

Полагая в (4) $z = \zeta^{(m)} \to 0$, получаем, что $0 = f(0) = c_{100}$; следовательно, $f(z) = O(z)$ при $z \to 0$. Учитывая, что $z_q = x + s_q y = \frac{1-is_q}{2} z + \frac{1+is_q}{2} \overline{z}$, получаем соотношения

$$\lim_{z=\zeta_j^{(m)} \to 0} \frac{z_q}{z} = \frac{1 - is_q}{2} + \frac{1 + is_q}{2} e^{-2i\alpha_m} =: \gamma_{qm},$$

$$\lim_{z=\zeta_j^{(m)} \to 0} \frac{\overline{z}_q}{z} = \frac{1 - i\overline{s}_q}{2} + \frac{1 + i\overline{s}_q}{2} e^{-2i\alpha_m} =: \delta_{qm},$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z_q^k}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}_q^k}{z} = 0, k > 1, q = 1, ..., v, m = 1, ..., n. \tag{5}$$

Пусть $n > 1$ Разделим равенство (4) на z и перейдем к пределу при $z = \zeta_j^{(m)} \longrightarrow 0$. Тогда с учетом соотношений (5) при $\lambda_1 > 1$ приходим к системе уравнений

$$c_{101}\gamma_{1m} + c_{110}\delta_{1m} = 0, m = 1, ..., n,$$

а при $\lambda_1 = 1$ – к системе

$$c_{101}\gamma_{1m} + c_{201}\gamma_{2m} = 0, m = 1, ..., n.$$

Рассматривая в этих системах лишь первые два уравнения ($m = 1, 2$), получаем системы, определители матриц которых равны соответственно $(s_1 - \overline{s}_1) exp(-i(\alpha_1 + \alpha_2)) sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ и $(s_1 - s_2) exp(-i(\alpha_1 + \alpha_2)) sin(\alpha_1 - \alpha_2)$. Так как по предположению $s_1, ..., s_v$ невещественны и различны, а лучи $l_1, ..., l_n$ неколлинеарны, то оба они отличны от нуля. Поэтому системы имеют лишь нулевые решения. Отсюда имеем $f(z) = O(z^2)$, $z \to 0$.

Пусть $n > 2$. Разделив равенство (4) на z^2 переходом к пределу при $z = \zeta_j^{(m)} \to 0$, получим систему уравнений

$$\sum_{q=1}^{v} \sum_{j=0}^{\lambda_q'(2)-1} c_{qj,2-j} \gamma_{qm}^{2-j} \delta_{qm}^j = 0, m = 1, ..., n, \tag{6}$$

где $\lambda'_q(l) := min(\lambda_q, max(0, l+1-\lambda'_1(l)-...-\lambda'_{q-l}(l)))$, $q = 1,...,v, l \in \mathbb{N}$

Возьмем в системе (6) только первые три уравнения ($m = 1, 2, 3$) Тогда получим систему трех уравнений с тремя неизвестными. Определитель матрицы этой системы будет равен

$$(s_1 - \overline{s}_1)^3 exp(-2i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) sin(\alpha_1-\alpha_2) sin(\alpha_1-\alpha_3) sin(\alpha_2-\alpha_3)$$

при $\lambda_1 > 2$,

$$(s_1 - s_2)^2 (s_1 - \overline{s1}) exp(-2i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)) sin(\alpha_1-\alpha_2) sin(\alpha_1-\alpha_3) sin(\alpha_2-\alpha_3)$$

при $\lambda_1 = 2$,

$$(s_1 - s_2)^2 (s_1 - \overline{s_2}) exp(-2i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)) sin(\alpha_1-\alpha_2) sin(\alpha_1-\alpha_3) sin(\alpha_2-\alpha_3)$$

при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 > 1$,

$$(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3) exp(-2i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)) sin(\alpha_1-\alpha_2) sin(\alpha_1-\alpha_3) sin(\alpha_2-\alpha_3)$$

при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, n > 2$.

В любом случае система (6) имеет лишь нулевое решение, и, следовательно, $f(z) = O(z^3)$, $z \to 0$.

Продолжая подобные рассуждения, на l-м шаге ($l < n$) придем к системе уравнений

$$\sum_{q=1}^{v} \sum_{j=0}^{\lambda'_q(l)-1} c_{qj,l-j} \gamma_{qm}^{l-j} \delta_{qm}^{j} = 0, m = 1, ..., n. \tag{7}$$

Взяв только первые $l+1$ из них ($m = 1, ..., l+1$), получим систему с квадратной матрицей, определитель которой равен

$$\Delta(s_1, ..., s_v; \lambda_1, ..., \lambda_v; \alpha_1, ..., \alpha_n; l) = \tag{8}$$

$$= c(\lambda_1, ..., \lambda_v; l) exp(-li(\alpha_1 + ... + \alpha_{l+1})) \prod_{q=1}^{v} (s_q - \overline{s}_q)^{n(q,l)} \prod_{1 \le j < k \le l+1} (s_j - s_k)^{\lambda'_j(l)\lambda'_k(l)} sin(\alpha_j - \alpha_k).$$

Здесь $c(\lambda_1, ..., \lambda_v; l)$– натуральные числа, зависящие только от l и от уравнения (4) (точнее, только от l и от кратностей λ_q корней $s_q, q = 1, ..., v$),

$$n(q,l) = \binom{\lambda'_q(l)}{2} \text{ при } \lambda'_q(l) \ge 2, n(q,l) = 0 \text{ при } \lambda'_q(l) < 2, q = 1, ..., v,$$

$$\sum_{q=1}^{v} n(q,l) + \sum_{1 \le j \le k \le l+1} \lambda'_j(l)\lambda'_k(l) = \binom{l+1}{2},$$

где $\binom{m}{k}$, $m \ge k$, означает число сочетаний из m элементов по k.

Так как $s_1, ..., s_v$ невещественны и различны, $\alpha_j - \alpha_m \not\equiv 0 \bmod \pi$ при $j \neq m$, определитель (8) при $l < n$ отличен от нуля, и поэтому система (7) имеет лишь нулевое решение. Таким образом, $f(z) = O(z^n), z \to 0$ и первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что $l \geq n$. В этом случае числа $c_{qi,l-j}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{q=1}^{v} \sum_{j=0}^{\lambda_q - 1} c_{qj,l-j} \gamma_{qm}^{l-j} \delta_{qm}^{j} = 0, m = 1, ..., n. \tag{9}$$

Число уравнений этой системы равно числу неизвестных. Определитель матрицы системы (9), который по-прежнему обозначаем через $\Delta(s_1, ..., s_v; \lambda_1, ..., \lambda_v; \alpha_1, ..., \alpha_n; l)$, имеет более сложную структуру по сравнению со случаем $l < n$. При некоторых соотношениях между числами s_q и α_k, $q = 1, ..., v$, $k = 1, ..., n$, удовлетворяющими условиям теоремы, этот определитель может обращаться в нуль. Например, $\Delta(-i, i; 2, 2; 0, \pi/2, \pi/4, 3\pi/4; 4) = 0$ при $n = 4$, $l = 4$, $s_1 = -i$, $s_2 = i$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = \pi/4$, $\alpha_4 = 3\pi/4$.

Определитель $\Delta(s_1, ..., s_v; \lambda_1, ..., \lambda_v; \alpha_1, ..., \alpha_n; l)$ является целой аналитической функцией переменных $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Если он отличен от нуля при всех $l \in \mathbb{N}$, то E является множеством единственности для решений уравнения (4). Пусть теперь $\{p_k\}$ $(n \leq p_1 < p_2 < ...)$ – последовательность значений l, при которых $\Delta(s_1, ..., s_v; \lambda_1, ..., \lambda_v; \alpha_1, ..., \alpha_n; l) = 0$. Малым изменением чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (хотя бы одного из них) можно добиться того, чтобы этот определитель стал отличным от нуля при всех $l \in \mathbb{N}$. Тогда множество E будет множеством единственности для решений уравнения (1). Теорема доказана.

Очевидно, что в случае, когда множество E имеет в области D точку сгущения порядка меньше n, то оно не является множеством единственности для решений уравнения (1). В то же время случай, когда множество E, имеющее в D точку сгущения порядка n, не является множеством единственности для решений уравнения (1), является скорее исключительным.

Отметим два частных случая уравнения (1), в которых определитель

$$\Delta(s_1, ..., s_v; \lambda_1, ..., \lambda_v; \alpha_1, ..., \alpha_n; l), l \in N$$

имеет более простую структуру, благодаря чему удается получить более полный результат.

1) Пусть характеристический многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k s^k$ имеет единственный корень s_1 кратности n. Тогда для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Delta(s_1; n; \alpha_1, ..., \alpha_n; l) = (s_1 - \overline{s}_1)^{m_l} exp(-i(\alpha_1 + ... + \alpha_n) min(l, n-1)) \prod_{0 \leq j < k \leq n} sin(\alpha_j - \alpha_k),$$

$$m_l := \binom{min(l+1, n)}{2}$$

В условиях теоремы этот определитель отличен от нуля при любом $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, любое множество E, имеющее в области D точку сгущения порядка n, является множеством единственности для решений уравнения (1). При $s_1 = i$ этот результат совпадает с результатом из [1, с. 16].

2) Пусть $n = 2$ и характеристический многочлен $A_0 + A_1 s + A_2 s^2$ уравнения

$$\sum_{k=0}^{2} A_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k} \partial y^k} = 0, \tag{10}$$

имеет два разных невещественных корня s_1 и s_2. Любое решение уравнения (10) представимо в виде $f(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)$, где φ_1 и φ_2 -аналитические функции. Тогда

$$\Delta(s_1, s_2; 1, 1; \alpha_1, \alpha_2; l) = (\gamma_{11_{\gamma_{22}}})^l - (\gamma_{12_{\gamma_{21}}})^l =$$

$$= [(cos\alpha_1 + s_1 sin\alpha_1)(cos\alpha_2 + s_2 sin\alpha_2) exp(-i(\alpha_1 + \alpha_2))]^l (1 - \delta^l),$$

где

$$\delta = \frac{(cos\alpha_1 + s_2 sin\alpha_1)(cos\alpha_2 + s_1 sin\alpha_2)}{(cos\alpha_1 + s_1 sin\alpha_1)(cos\alpha_2 + s_2 sin\alpha_2)}.$$

В условиях теоремы $\delta \neq 1$. Если $\delta^p = 1$ при некотором $l = p \in \mathbb{N}, p > 1$, то из равенства $f|E = 0$ следует, что тейлоровские разложения функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ содержат лишь степени z, кратные числу p, но φ_1 и φ_2 не обязаны быть нулями. Поэтому E в этом случае не является множеством единственности для решений уравнения (10). Во всех остальных случаях оно таковым является.

Примеры, иллюстрирующие исключительные случаи теоремы единственности.

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/6, \delta = \dfrac{s_1 + \sqrt{3}}{s_2 + \sqrt{3}}$
$1)\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -s_1 - 2\sqrt{3}$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4xys_1 - 4\sqrt{3}s_1y^2 - 12y^2 + 4\sqrt{3}xy$
Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}y}$
$f|_{x=\sqrt{3}y} = 4\sqrt{3}y^2s_1 - 12y^2 + 12y^2 - 4\sqrt{3}y^2s_1 = 0$
$2)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\sqrt{-s_1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3} - s_1 - 3\sqrt{3}\right)$,
$s_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sqrt{-s_1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3} - s_1 - 3\sqrt{3}\right)$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\sqrt{-s_1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3} - s_1 - 3\sqrt{3}\right)$

$$f = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 - \frac{27}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 - \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 + \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{27}{2}s_1y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2y - \frac{27}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}y} = \frac{9}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{27\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 + \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{27}{2}s_1y^3 - \frac{27}{2}s_1y^3 + \frac{27\sqrt{3}}{2}y^3 - \frac{27\sqrt{3}}{2}y^3 = 0$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sqrt{-s_1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3} - s_1 - 3\sqrt{3}\right)$

$$f = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{27}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 - \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{27}{2}s_1y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2y - \frac{27}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}y}=-\frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^3+\frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3+\frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^3+$$
$$\frac{27\sqrt{4}}{2}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^3-\frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3-\frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^3-$$
$$9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^3+\frac{27}{2}s_1y^3y-\frac{27}{2}s_1y^3+\frac{27\sqrt{3}}{2}y^3-\frac{27\sqrt{3}}{2}y^3=0$$

3)$\delta^4=1\Rightarrow s_2=-s_1-2\sqrt{3}, s_2=-\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}-\sqrt{3}, s_2=\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}-\sqrt{3}$
Следует искать функцию в виде

$$f(z)=z_1^4-z_2^4$$

При $s_2=-s_1-2\sqrt{3}$

$$f=8s_1x^3y-24\sqrt{3}s_1x^2y^2+8s_1^3xy^3+24\sqrt{3}s_1^2xy^3+144s_1xy^3-8\sqrt{3}s_1^3y^4-72s_1^2y^4-96\sqrt{3}s_1y^4+$$
$$8\sqrt{3}x^3y-72x^2y^2+96\sqrt{3}xy^3-144y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0}=0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}y}=24\sqrt{3}s_1y^4-72\sqrt{3}s_1y^4+8\sqrt{3}s_1^3y^4+72s_1^2y^4+144\sqrt{3}s_1y^4-8\sqrt{3}s_1^3y^4-72s_1^2y^4-$$
$$96\sqrt{3}s_1y^4+72y^4-216y^4+288y^4-144y^4=0$$

При $s_2=-\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}-\sqrt{3}$

$$f=4s_1x^3y+4\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}x^3y+12s_1^2x^2y^2+12\sqrt{3}s_1x^2y^2-$$
$$12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}x^2y^2+4s_1^3xy^3-12\sqrt{3}s_1^2xy^3-72s_1xy^3-4s_1^2\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}xy^3+$$
$$24\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}xy^3-8\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}xy^3-4\sqrt{3}s_1^3y^4+24\sqrt{3}s_1y^4+$$
$$4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+24s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+4\sqrt{3}x^3y-24\sqrt{3}xy^3+36y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0}=0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}y}=12\sqrt{3}s_1y^4+12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+36s_1^2y^4+36s_1y^4-$$
$$36\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+4\sqrt{3}s_1^3y^4-36s_1^2y^4-72\sqrt{3}s_1y^4-4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+$$
$$24\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4-24s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4-4\sqrt{3}s_1^3y^4+24\sqrt{3}s_1y^4+$$
$$4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+24s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+36y^4-72y^4+36y^4=0$$

При $s_2=\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}-\sqrt{3}$

$$f=4s_1x^3y-4\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}x^3y+12s_1^2x^2y^2+12\sqrt{3}s_1x^2y^2+$$
$$12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}x^2y^2+4s_1^3xy^3-12\sqrt{3}s_1^2xy^3-72s_1xy^3+4s_1^2\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}xy^3-$$
$$24\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}xy^3+8\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}xy^3-4\sqrt{3}s_1^3y^4+24\sqrt{3}s_1y^4-$$
$$4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4-24s_1\sqrt{-s_1^2-2\sqrt{3}s_1-3}y^4+4\sqrt{3}x^3y-24\sqrt{3}xy^3+36y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0}=0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}y} = 12\sqrt{3}s_1y^4 - 12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 36s_1^2y^4 + 36s_1y^4 +$$
$$36\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 36s_1^2y^4 - 72\sqrt{3}s_1y^4 + 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 -$$
$$24\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 24s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 24\sqrt{3}s_1y^4 +$$
$$4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 24s_1\sqrt{-s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 36y^4 - 72y^4 + 36y^4 = 0$$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/4, \delta = \dfrac{s_1+1}{s_2+1}$
1)$\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -s_1 - 2$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4(xy - y^2)(s_1 + 1)$
Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y}$
$f|_{x=y} = 4(yy - y^2)(s_1 + 1) = 0$
2)$\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-3 - s_1 + \sqrt{3}\sqrt{-1 - 2s_1 - s_1^2}\right)$,
$s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-3 - s_1 - \sqrt{3}\sqrt{-1 - 2s_1 - s_1^2}\right)$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-3 - s_1 + \sqrt{3}\sqrt{-1 - 2s_1 - s_1^2}\right)$

$$f = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}x^2y + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}xy^2 - 3\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}xy^2 + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 - \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{9s_1y^3}{2} + \frac{9}{2}x^2y - \frac{9}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y}$

$$f|_{x=y} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9}{2}s_1^2y^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 - \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 - 3\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 - 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9}{2}s_1y^3 - \frac{9}{2}s_1y^3 + \frac{9}{2}y^3 - \frac{9}{2}y^3 = 0$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-3 - s_1 - \sqrt{3}\sqrt{-1 - 2s_1 - s_1^2}\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-(s_1+1)^2}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^2 - \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{9s_1y^3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 - 3\sqrt{3}\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 + \frac{9}{2}x^2y - \frac{9}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y}$

$$f|_{x=y} = \frac{9}{2}s_1y^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 + \frac{9}{2}s_1^2y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 - \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{9s_1y^3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 - 3\sqrt{3}\sqrt{-(s_1+1)^2}y^3 + \frac{9}{2}y^3 - \frac{9}{2}y^3$$

3)$\delta^4 = 1 \Rightarrow s_2 = -s_1 - 2, s_2 = -\sqrt{-(s_1+1)^2} - 1, s_2 = \sqrt{-(s_1+1)^2} - 1$
При $s_2 = -s_1 - 2$

$$f = 8s_1x^3y - 24s_1x^2y^2 + 8s_1^3xy^3 + 24s_1^2xy^3 + 48s_1xy^3 - 8s_1^3y^4 - 24s_1^2y^4 - 32s_1y^4 + 8x^3y - 24x^2y^2 + 32xy^3 - 16y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y}$

$$f|_{x=y} = 8s_1y^4 - 24s_1y^4 + 8s_1^3y^4 + 24s_1^2y^4 + 48s_1y^4 - 8s_1^3y^4 - 24s_1^2y^4 - 32s_1y^4 + 8y^4 - 24y^4 + 32y^4 - 16y^4 = 0$$

При $s_2 = -\sqrt{-(s_1+1)^2} - 1$

$$f = 4s_1x^3y + 4\sqrt{-(s_1+1)^2}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 + 12s_1x^2y^2 - 12\sqrt{-(s_1+1)^2}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 - 12s_1^2xy^3 - 24s_1xy^3 - 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^3 + 8\sqrt{(-(s_1+1)^2}xy^3 - 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^3 - 4s_1^3y^4 + 8s_1y^4 + 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 4x^3y - 8xy^3 + 4y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y}$

$$f|_{x=y} = 4s_1y^4 + 4\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 12s_1^2x^2y^2 + 12s_1y^4 - 12\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 4s_1^3y^4 - 12s_1^2y^4 - 24s_1y^4 - 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 8\sqrt{(-(s_1+1)^2}y^4 - 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 - 4s_1^3y^4 + 8s_1y^4 + 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 4y^4 - 8y^4 + 4y^4 = 0$$

При $s_2 = \sqrt{-(s_1+1)^2} - 1$

$$f = 4s_1x^3y - 4\sqrt{-(s_1+1)^2}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 + 12s_1x^2y^2 + 12\sqrt{-(s_1+1)^2}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 - 12s_1^2xy^3 - 24s_1xy^3 + 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^3 - 8\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^3 + 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}xy^3 - 4s_1^3y^4 + 8s_1y^4 - 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 - 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 4x^3y - 8xy^3 + 4y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y}$

$$f|_{x=y} = 4s_1y^4 - 4\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 12s_1^2y^4 + 12s_1y^4 + 12\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 4s_1^3y^4 - 12s_1^2y^4 - 24s_1y^4 + 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 - 8\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 - 4s_1^3y^4 + 8s_1y^4 - 4s_1^2\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 - 8s_1\sqrt{-(s_1+1)^2}y^4 + 4y^4 - 8xy^3 + 4y^4 = 0$$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/3, \delta = \dfrac{\sqrt{3}s_1 + 1}{\sqrt{3}s_2 + 1}$

$1)\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -s_1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4s_1xy + \dfrac{4}{\sqrt{3}}xy - \dfrac{4s_1}{\sqrt{3}}y^2 - \dfrac{4}{3}y^2$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=y/\sqrt{3}}$

$f|_{x=y/\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}s_1y^2 + \dfrac{4}{3}y^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}s_1y^2 - \dfrac{4}{3}y^2 = 0$

$2)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - s_1 + \sqrt{-1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3s_1^2}\right),$

$s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - s_1 - \sqrt{-1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3s_1^2}\right)$

Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - s_1 + \sqrt{-1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3s_1^2}\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y + \frac{3}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^2 - \frac{3}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{3}{2}s_1y^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 + \sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2y - \frac{3}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}/y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}/y} = \frac{27}{2}s_1y + \frac{9}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y + \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y - \frac{9}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{3}{2}s_1y^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 + \sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 0$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - s_1 - \sqrt{-1 - 2\sqrt{3}s_1 - 3s_1^2}\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{3}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^2 + \frac{3}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{3}{2}s_1y^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 - \sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2y - \frac{3}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}/y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}/y} = \frac{27}{2}s_1 y - \frac{9}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y + \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2 y + \frac{9}{2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2 y^3 - \frac{3}{2}s_1 y^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 - \sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 0$$

$3)\delta^4 = 1 \Rightarrow s_2 = \frac{1}{3}\left(-3s_1 - 2\sqrt{3}\right), s_2 = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} - \sqrt{3}\right)$,
$s_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} - \sqrt{3}\right)$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^4 - z_2^4$$

При $s_2 = \frac{1}{3}\left(-3s_1 - 2\sqrt{3}\right)$

$$f = 6s_1x^2y - 4\sqrt{3}s_1xy^2 + 2s_1^3y^3 + 2\sqrt{3}s_1^2y^3 + 4s_1y^3 + 2\sqrt{3}x^2y - 4xy^2 + \frac{8}{3\sqrt{3}}y^3$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}/y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}/y} = \frac{18s_1}{y} - 12s_1y + 2s_1^3y^3 + 2\sqrt{3}s_1^2y^3 + 4s_1y^3 + \frac{6\sqrt{3}}{y} - 4\sqrt{3}y + \frac{8}{3\sqrt{3}}y^3 = 0$$

При $s_2 = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} - \sqrt{3}\right)$

$$f = 4s_1x^3y + \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 + 4\sqrt{3}s_1x^2y^2 - 4\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 - 4\sqrt{3}s_1^2xy^3 - 8s_1xy^3 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy + \frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^3 - \frac{8}{3}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^3 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4 + \frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^4 + \frac{4}{\sqrt{3}}x^3y - \frac{8}{3\sqrt{3}}xy^3 + \frac{4}{9}y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}/y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}/y} = \frac{12\sqrt{3}s_1}{y^2} + \frac{12}{y^2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} + \frac{8}{3}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^2 + 36s_1^2 + 12\sqrt{3}s_1 - 12\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} + 4\sqrt{3}s_1^3y^2 - 12s_1^2y^2 - 8\sqrt{3}s_1y^2 - 4s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}s_1y^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4 + \frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}s_1y^4 + \frac{4}{9}y^4 - \frac{8}{3}y^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0$$

При $s_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} - \sqrt{3}\right)$

$$f = 4s_1x^3y - \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 + 4\sqrt{3}s_1x^2y^2 +$$
$$4\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 - 4\sqrt{3}s_1^2xy^3 - 8s_1xy^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^3 -$$
$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^3 + \frac{8}{3}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}xy^3 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4 -$$
$$\frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^4 - \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^4 + \frac{4}{\sqrt{3}}x^3y - \frac{8}{3\sqrt{3}}xy^3 + \frac{4}{9}y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=\sqrt{3}/y}$

$$f|_{x=\sqrt{3}/y} = \frac{12\sqrt{3}s_1}{y^2} - \frac{12}{y^2}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} - \frac{8}{3}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^2 + 36s_1^2 + 12\sqrt{3}s_1 +$$
$$12\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1} + 4\sqrt{3}s_1^3y^2 - 12s_1^2y^2 - 8\sqrt{3}s_1y^2 + 4s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^2 +$$
$$\frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}s_1y^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4 - \frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}y^4 -$$
$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2 - 2\sqrt{3}s_1 - 1}s_1y^4 + \frac{4}{9}y^4 - \frac{8}{3}y^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0$$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/2, \delta = \dfrac{s_1}{s_2}$
$1)\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -s_1$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4s_1xy$
Очевидно, $f = 0$ на осях координат.
$2)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = -\dfrac{i}{2}\left(-is_1 + \sqrt{3}s_1\right), s_2 = -\dfrac{i}{2}\left(is_1 + \sqrt{3}s_1\right)$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=0}$
$f(iy) = (s_1y)^3 - (s_2y)^3 = y^3(s_1^3 - s_2^3) \equiv 0 \Rightarrow s_1^3 = s_2^3$
$3)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = -s_1, s_2 = -is_1, s_2 = is_1$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^4 - z_2^4$$

При $s_2 = -s_1$
$f = 8s_1x^3y + 8s_1^3xy^3$
Очевидно, $f = 0$ на осях координат.
При $s_2 = -is_1$
$f = (4+4i)s_1x^3y + 12s_1^2x^2y^2 + (4-4i)s_1^3xy^3$
Очевидно, $f = 0$ на осях координат.
При $s_2 = is_1$
$f = (4-4i)s_1x^3y + 12s_1^2x^2y^2 + (4+4i)s_1^3xy^3$
Очевидно, $f = 0$ на осях координат.

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2\pi/3, \delta = \dfrac{\sqrt{3}s_1 - 1}{\sqrt{3}s_2 - 1}$

$1)\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -\dfrac{-\sqrt{3}s_1 + 2}{\sqrt{3}}$

Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4s_1xy + \dfrac{4}{\sqrt{3}}s_1y^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}xy - \dfrac{4}{3}y^2$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y/\sqrt{3}}$

$f|_{x=-y/\sqrt{3}} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}s_1y^2 + \dfrac{4}{3}s_1y^2 + \dfrac{4}{3}y^2 - \dfrac{4}{3}y^2 = 0$

$2)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}s_1 + \sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3} + 3\right)$,

$s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 - \dfrac{\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)$

Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}s_1 + \sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3} + 3\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 - \frac{3}{2}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1^2y^3 - \frac{3}{2}s_1y^3 + \frac{1}{2}s_1\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2y - \frac{3}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y/\sqrt{3}}$

$$f|_{x=-y/\sqrt{3}} = \frac{3}{2}s_1y^3 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{3}{2}s_1y^3 - \frac{1}{2}s_1\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{1}{2}s_1\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}y^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}y^3 = 0$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 - \dfrac{\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 + \frac{3}{2}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1^2y^3 - \frac{3}{2}s_1y^3 - \frac{1}{2}s_1\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-9s_1^2 + 6\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2y - \frac{3}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0}=0$. Рассмотрим $f|_{x=-y/\sqrt{3}}$

$$f|_{x=-y/\sqrt{3}}=\frac{3}{2}s_1y^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-9s_1^2+6\sqrt{3}s_1-3}y^3-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-9s_1^2+6\sqrt{3}s_1-3}y^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3+\frac{3\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3+\frac{3}{2}s_1y^3-\frac{1}{2}s_1\sqrt{-9s_1^2+6\sqrt{3}s_1-3}y^3-\frac{1}{2}s_1\sqrt{-9s_1^2+6\sqrt{3}s_1-3}y^3+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-9s_1^2+6\sqrt{3}s_1-3}y^3-\frac{\sqrt{3}}{2}y^3+\frac{\sqrt{3}}{2}y^3=0$$

3)$\delta^4=1\Rightarrow s_2=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-3s_1\right), s_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}\right)$,
$s_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}+\sqrt{3}\right)$
Следует искать функцию в виде

$$f(z)=z_1^4-z_2^4$$

При $s_2=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-3s_1\right)$

$$f=8s_1x^3y+8\sqrt{3}s_1x^2y^2+8s_1^3xy^3-8\sqrt{3})s_1^2xy^3+16s_1xy^3+\frac{8}{\sqrt{3}}s_1^3y^4-8s_1^2y^4+\frac{32}{3\sqrt{3}}s_1y^4-\frac{8}{\sqrt{3}}x^3y-8x^2y^2-\frac{32}{3\sqrt{3}}xy^3-\frac{16}{9}y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0}=0$. Рассмотрим $f|_{x=-y/\sqrt{3}}$

$$f|_{x=-y/\sqrt{3}}=-\frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4+\frac{8}{\sqrt{3}}s_1y^4-\frac{8}{\sqrt{3}}s_1^3y^4+8s_1^2y^4-\frac{16}{\sqrt{3}}s_1y^4+\frac{8}{\sqrt{3}}s_1^3y^4-8s_1^2y^4+\frac{32}{3\sqrt{3}}s_1y^4+\frac{8}{9}y^4-\frac{8}{3}y^4+\frac{32}{9}y^4+\frac{32}{9}y^4-\frac{16}{9}y^4=0$$

При $s_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}\right)$

$$f=4s_1x^3y+\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}x^3y+12s_1^2x^2y^2-4\sqrt{3}s_1x^2y^2+4\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}x^2y^2+4s_1^3xy^3+4\sqrt{3}s_1^2xy^3-8s_1xy^3-\frac{4}{\sqrt{3}}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}xy^3+\frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}xy^3+\frac{8}{3}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}xy^3+\frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4-\frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4-\frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4+\frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4-\frac{4}{\sqrt{3}}x^3y+\frac{8}{3\sqrt{3}}xy^3+\frac{4}{9}y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0}=0$. Рассмотрим $f|_{x=-y/\sqrt{3}}$

$$f|_{x=-y/\sqrt{3}}=4s_1^2y^4-\frac{4}{3\sqrt{3}}s_1y^4-\frac{4}{9}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4-\frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4-\frac{4}{\sqrt{3}}s_1y^4+\frac{4}{3}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4-4s_1^2y^4+\frac{8}{\sqrt{3}}s_1y^4+\frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4+\frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4-\frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4-\frac{8}{9}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4-\frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4-\frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4+\frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4+\frac{4}{9}y^4-\frac{8y^4}{9}+\frac{4}{9}y^4=0$$

При $s_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}+\sqrt{3}\right)$

$$f = 4s_1x^3y - \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 - 4\sqrt{3}s_1x^2y^2 - 4\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 + 4\sqrt{3}s_1^2xy^3 - 8s_1xy^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}xy^3 - \frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}xy^3 - \frac{8}{3}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}xy^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 - \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4 + \frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 - \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}x^3y + \frac{8}{3\sqrt{3}}xy^3 + \frac{4}{9}y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y/\sqrt{3}}$

$$f|_{x=-y/\sqrt{3}} = -4s_1^2y^4 + \frac{4}{3\sqrt{3}}s_1y^4 + \frac{4}{9}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}s_1y^4 - \frac{4}{3}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 - 4s_1^2y^4 + \frac{8}{\sqrt{3}}s_1y^4 - \frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 + \frac{4}{\sqrt{3}}s_1^3y^4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 + \frac{8}{9}\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 - \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1y^4 + \frac{4}{3}s_1^2\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 - \frac{8}{3\sqrt{3}}s_1\sqrt{-3s_1^2+2\sqrt{3}s_1-1}y^4 + \frac{4}{9}y^4 - \frac{8y^4}{9} + \frac{4}{9}y^4 = 0$$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3\pi/4, \delta = \dfrac{s_1 - 1}{s_2 - 1}$
$1)\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -s_1 - 2$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4(xy + y^2)(s_1 - 1)$
Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y}$
$f|_{x=-y} = 4(-yy + y^2)(s_1 - 1) = 0$
$2)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 - \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1} + 3\right)$,
$s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 + \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1} + 3\right)$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 - \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1} + 3\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y + \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 + \frac{9}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}xy^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}xy^2 + \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{9s_1y^3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{9}{2}x^2y - \frac{9}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y}$

$$f|_{x=-y} = +\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9}{2}s_1y^3 - \frac{9}{2}s_1^2y^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 + \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{9s_1y^3}{2} - \frac{9}{2}y^3 + \frac{9}{2}y^3 = 0$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 + \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1} + 3\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 - \frac{9}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}xy^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}xy^2 + \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{9s_1y^3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - 3\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{9}{2}x^2y - \frac{9}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y}$

$$f|_{x=-y} = +\frac{9}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{9}{2}y^3 + \frac{9}{2}s_1y^3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - \frac{9}{2}s_1^2y^3 + \frac{9}{2}s_1^2y^3 - \frac{9s_1y^3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2s_1 - 1}y^3 - + \frac{9}{2}y^3 = 0$$

3)$\delta^4 = 1 \Rightarrow s_2 = 1 - \sqrt{-(s_1-1)^2}, s_2 = \sqrt{-(s_1-1)^2}+1, s_2 = 2 - s_1$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^4 - z_2^4$$

При $s_2 = 1 - \sqrt{-(s_1-1)^2}$

$$f = 4s_1x^3y + 4\sqrt{-(s_1-1)^2}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 - 12s_1x^2y^2 + 12\sqrt{-(s_1-1)^2}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 + 12s_1^2xy^3 - 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2xy^3 - 24s_1xy^3 + 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1xy^3 + 8\sqrt{-(s_1-1)^2}xy^3 + 4s_1^3y^4 - 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2y^4 + 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1y^4 - 8s_1y^4 - 4x^3y + 8xy^3 + 4y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y}$

$$f|_{x=-y} = -4s_1y^4 - 4\sqrt{-(s_1-1)^2}y^4 + 12s_1^2y^4 - 12s_1y^4 + 12\sqrt{-(s_1-1)^2}y^4 - 4s_1^3y^4 - 12s_1^2y^4 + 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2y^4 + 24s_1y^4 - 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1y^4 - 8\sqrt{-(s_1-1)^2}y^4 + 4s_1^3y^4 - 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2y^4 + 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1y^4 - 8s_1y^4 + 4y^4 - 8y^4 + 4y^4 = 0$$

При $s_2 = \sqrt{-(s_1-1)^2} + 1$

$$f = 4s_1x^3y - 4\sqrt{-(s_1-1)^2}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 - 12s_1x^2y^2 - 12\sqrt{-(s_1-1)^2}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 + 12s_1^2xy^3 + 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2xy^3 - 24s_1xy^3 - 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1xy^3 - 8\sqrt{-(s_1-1)^2}xy^3 + 4s_1^3y^4 + 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2y^4 - 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1y^4 - 8s_1y^4 - 4x^3y + 8xy^3 + 4y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y}$

$$f|_{x=-y} = -4s_1y^4 + 4\sqrt{-(s_1-1)^2}y^4 + 12s_1^2y^4 - 12s_1y^4 - 12\sqrt{-(s_1-1)^2}y^4 - 4s_1^3y^4 - 12s_1^2y^4 - 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2y^4 + 24s_1y^4 + 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1y^4 + 8\sqrt{-(s_1-1)^2}y^4 + 4s_1^3y^4 + 4\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1^2y^4 - 8\sqrt{-(s_1-1)^2}s_1y^4 - 8s_1y^4 + 4y^4 - 8y^4 + 4y^4 = 0$$

При $s_2 = 2 - s_1$

$$f = 8s_1x^3y + 24s_1x^2y^2 + 8s_1^3xy^3 - 24s_1^2xy^3 + 48s_1xy^3 + 8s_1^3y^4 - 24s_1^2y^4 + 32s_1y^4 - 8x^3y - 24x^2y^2 - 32xy^3 - 16y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-y}$
$f|_{x=-y} = -8s_1y^4 + 24s_1y^4 - 8s_1^3y^4 + 24s_1^2y^4 - 48s_1y^4 + 8s_1^3y^4 - 24s_1^2y^4 + 32s_1y^4 + 8y^4 - 24y^4 + 32y^4 - 16y^4 = 0$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 5\pi/6, \delta = \dfrac{s_1 - \sqrt{3}}{s_2 - \sqrt{3}}$

$1)\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = -1, s_2 = -s_1 + 2\sqrt{3}$

Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$f = 4xys_1 + 4\sqrt{3}s_1y^2 - 12y^2 - 4\sqrt{3}xy$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-\sqrt{3}y}$

$f|_{x=-\sqrt{3}y} = -4\sqrt{3}y^2s_1 - 12y^2 + 12y^2 + 4\sqrt{3}y^2s_1 = 0$

$2)\delta^3 = 1 \Rightarrow s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 - \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3} + 3\sqrt{3}\right),$

$s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 + \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3} + 3\sqrt{3}\right)$

Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^3 - z_2^3$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 - \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3} + 3\sqrt{3}\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y + \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 + \frac{27}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{9}{2}\sqrt{3}s_1^2y^3 - \frac{27}{2}s_1y^3 - \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{9}{2}\sqrt{3}x^2y - \frac{27}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=-\sqrt{3}y} = \frac{27}{2}s_1y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{27\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 + \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{27}{2}s_1y^3 - \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{27\sqrt{3}}{2}y^3 + \frac{27\sqrt{3}}{2}y^3 = 0$$

При $s_2 = \dfrac{1}{2}\left(-s_1 + \sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3} + 3\sqrt{3}\right)$

$$f = \frac{9}{2}s_1x^2y - \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y + \frac{9}{2}s_1^2xy^2 - \frac{27}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^2 + \frac{9}{2}\sqrt{3}s_1^2y^3 - \frac{27}{2}s_1y^3 + \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{9}{2}\sqrt{3}x^2y - \frac{27}{2}xy^2$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=-\sqrt{3}y} = \frac{27}{2}s_1y^3 - \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 + \frac{27\sqrt{3}}{2}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}s_1^2y^3 - \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{27}{2}s_1y^3 + \frac{9}{2}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - 9\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^3 - \frac{27\sqrt{3}}{2}y^3 + \frac{27\sqrt{3}}{2}y^3 = 0$$

3)$\delta^4 = 1 \Rightarrow s_2 = 2\sqrt{3} - s_1, s_2 = \sqrt{3} - \sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}, s_2 = \sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3} + \sqrt{3}$
Следует искать функцию в виде

$$f(z) = z_1^4 - z_2^4$$

При $s_2 = 2\sqrt{3} - s_1$

$$f = 8s_1x^3y + 24\sqrt{3}s_1x^2y^2 + 8s_1^3xy^3 - 24\sqrt{3}s_1^2xy^3 + 144s_1xy^3 + 8\sqrt{3}s_1^3y^4 - 72s_1^2y^4 + 96\sqrt{3}s_1y^4 - 8\sqrt{3}x^3y - 72x^2y^2 - 96\sqrt{3}xy^3 - 144y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=-\sqrt{3}y} = -24\sqrt{3}s_1y^4 + 72\sqrt{3}s_1y^4 - 8\sqrt{3}s_1^3y^4 + 72s_1^2y^4 - 144\sqrt{3}s_1y^4 + 72\sqrt{3}s_1^3y^4 - 72s_1^2y^4 + 96\sqrt{3}s_1y^4 + 72y^4 - 216y^4 + 288y^4 - 144y^4 = 0$$

При $s_2 = \sqrt{3} - \sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}$

$$f = 4s_1x^3y + 4\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 - 12\sqrt{3}s_1x^2y^2 + 12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 + 12\sqrt{3}s_1^2xy^3 - 72s_1xy^3 - 4s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^3 + 24\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^3 + 8\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^3 + 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 24\sqrt{3}s_1y^4 - 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 24s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 4\sqrt{3}x^3y + 24\sqrt{3}xy^3 + 36y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=-\sqrt{3}y} = -12\sqrt{3}s_1y^4 - 12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 36s_1^2y^4 - 36\sqrt{3}s_1y^4 + 36\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 36s_1^2y^4 + 72\sqrt{3}s_1y^4 + 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 24\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 24s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 24\sqrt{3}s_1y^4 - 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 24s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 36y^4 - 72y^4 + 36y^4 = 0$$

При $s_2 = \sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3} + \sqrt{3}$

$$f = 4s_1x^3y - 4\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^3y + 12s_1^2x^2y^2 - 12\sqrt{3}s_1x^2y^2 - 12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}x^2y^2 + 4s_1^3xy^3 + 12\sqrt{3}s_1^2xy^3 - 72s_1xy^3 + 4s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^3 - 24\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^3 - 8\sqrt{3}s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}xy^3 + 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 24\sqrt{3}s_1y^4 + 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 24s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 4\sqrt{3}x^3y + 24\sqrt{3}xy^3 + 36y^4$$

Очевидно, $f|_{y=0} = 0$. Рассмотрим $f|_{x=-\sqrt{3}y}$

$$f|_{x=-\sqrt{3}y} = -12\sqrt{3}s_1y^4 + 12\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 36s_1^2y^4 - 36\sqrt{3}s_1y^4 - 36\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 36s_1^2y^4 + 72\sqrt{3}s_1y^4 - 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 24\sqrt{3}\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 24s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 4\sqrt{3}s_1^3y^4 - 24\sqrt{3}s_1y^4 + 4\sqrt{3}s_1^2\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 - 24s_1\sqrt{-s_1^2 + 2\sqrt{3}s_1 - 3}y^4 + 36y^4 - 72y^4 + 36y^4 = 0$$

$\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/2$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x/\sqrt{3}} = 0$ следует, что $s_2 = -3s_1/(3 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}s_1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{3s_1}{3 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x/\sqrt{3}} = 0$ следует, что $s_2 = -3s_1/(3 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}s_1}{3}\right)^3 \left(x - \frac{3s_1}{3 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^3$$

3) $\delta^4 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x/\sqrt{3}} = 0$ следует, что $s_2 = -3s_1/(3 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}s_1}{3}\right)^4 \left(x - \frac{3s_1}{3 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^4$$

$\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/2$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - (1 + 2s_1)^2 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2s_1} y \right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - (1 + 2s_1)^3 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2s_1} y \right)^3$$

3) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - (1 + 2s_1)^4 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2s_1} y \right)^4$$

$\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = \pi/2$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^2 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^3 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^3$$

3) $\delta^4 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^4 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^4$$

$\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/3$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^2 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^3 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^3$$

3) $\delta^4 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^4 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^4$$

$\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/3$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^2 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^3 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^3$$

3) $\delta^4 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^4 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^4$$

$\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/3$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^2 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^3 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^3$$

3) $\delta^4 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=\sqrt{3}x} = 0$ следует, что $s_2 = -s_1/(1 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}s_1\right)^4 \left(x - \frac{s_1}{1 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^4$$

$\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = 2\pi/3$.

1) $\delta^2 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^2 - \alpha^2 (x + s_2 y)^2$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x/\sqrt{3}} = 0$ следует, что $s_2 = -3s_1/(3 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^2 - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}s_1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{3s_1}{3 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^2$$

2) $\delta^3 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^3 - \alpha^3 (x + s_2 y)^3$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x/\sqrt{3}} = 0$ следует, что $s_2 = -3s_1/(3 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^3 - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}s_1}{3}\right)^3 \left(x - \frac{3s_1}{3 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^3$$

3) $\delta^4 = 1$

Следует искать функцию в виде

$$f = (x + s_1 y)^4 - \alpha^4 (x + s_2 y)^4$$

Тогда из условия $f|_{x=0} = 0$ следует, что $\alpha = s_1/s_2$. Из условия $f|_{y=x/\sqrt{3}} = 0$ следует, что $s_2 = -3s_1/(3 + 2\sqrt{3}s_1)$

$$f = (x + s_1 y)^4 - \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}s_1}{3}\right)^4 \left(x - \frac{3s_1}{3 + 2\sqrt{3}s_1} y\right)^4$$

Заключение

В дипломной работе рассмотрела эллиптическое дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{2} A_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k} \partial y^k} = 0.$$

Построила примеры, когда множество, удовлетворяющее условиям теоремы, не является множеством единственности.

Список литературы

[1] Balk M.B. *Polyyanalytic functions* - Berlin: Akademie Verlag, 1991.

[2] И.А.Бикчантаев И.А. *О множествах единственности для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами* Дифференциальные уравнения. 2011. том 47. №2. 278-282 с.

[3] Hormander L. *Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations* Communs. Partial Differ. Equat. 1983. V. P. 21-64

[4] Мешков В.З. *Теорема единственности для эллиптических уравнений второго порядка* Мат. сб. 1986. Т. 129. №3. С. 386-396

[5] И.А.Бикчантаев *Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения* Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. №5. 1013-1016 с.

[6] И.А.Бикчантаев . *Об одной внутренней теореме единственности для линейного эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.* Известия вузов. Математика. . 2015. № 5. С.17 -21.