Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 01.03.01 — Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

МЕТОД МАЖОРАЦИИ ЛИТТЛВУДА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ОЦЕНКАМ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Работа завершена:

«____»________________2015 г. ________________Р. Ф. Сагитова

Работа проверена:

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры теории функций и приближений

«____»________________2015 г. ________________Ф. Г. Авхадиев

Заведующий кафедрой теории функций и приближений

доктор физико-математических наук, профессор

«____»________________2015 г. ________________Ф. Г. Авхадиев

Казань

2015 г.

Содержание

1 Введение

В 1916 году Людвиг Бибербах выдвинул гипотезу, которая привлекла внимание многих математиков тех времен. Она касается *класса* $\mathbb{S}$ *– аналитических и однолистных функций в единичном круге* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *для которых выполняется* $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, и заявил, что коэффициенты Тейлора $a_n(f)$ этих функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n \in \mathbb{S}$ удовлетворяют неравенству $|a_n(f)| \leqslant n$.

Для $n = 2$ доказательство дал сам Бибербах в 1916 г., потом он сформулировал гипотезу, которую для $n = 3$ вскоре доказал Левнер в 1923 г.. Но потребовалось ещё 32 года чтобы доказать случай для $n = 4$, его доказали Гарабедиан и Шиффер в 1955 г.

Приведем формулировку теоремы Бибербаха.

Т е о р е м а 1. ([1], стр. 41)
Для любой функции $f \in \mathbb{S}$, *которая разложима в ряд Тейлора*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1,$$

имеет место точная оценка $|a_2| \leqslant 2$. *Равенство достигается только в том случае, когда*

$$f(z) \equiv K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $K(z)$ *– функцией Кёбе.*

Впоследствии были разработаны различные подходы и много методов в попытке прийти к выводу неравенства Бибербаха. Одна из первых теорий состояла в проведении анализа подклассов $\mathbb{S}$, которые имели дополнительные геометрические условия.

Близкими к гипотезе Бибербаха оказались проблемы для некоторых классов мероморфных функций, а именно, для класса Σ. *т.е класса функ-*

ций отображающих внешность единичного круга конформно в односвязную область римановой сферы.

По теореме площадей было показано, что первые два коэффициента нормализованной функции

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(g) z^{-n} \in \Sigma$$

ограничены $|b_1(g)| \leqslant 1$ и $|b_2(g)| \leqslant \dfrac{2}{3}$. В 1947 г. Спенсер высказал предположение что для всех $n \in \mathbb{N}$ должно выполняться неравенство $|b_n(g)| \leqslant \dfrac{2}{n+1}$ для любой функции $g \in \Sigma$. Тем не менее в 1955 г. Гарабедиан и Шиффер проверили, что для третьего коэффициента неравенство $|b_3(g)| \leqslant \dfrac{1}{2} + e^{-6}$ является точным, и этим опровергли гипотезу Спенсера.

В 1984 г. Луи де Бранж наконец смог доказать первоначальную гипотезу Бибербаха, но многие из проблем, которые возникли ранее, по–прежнему остаются открытыми. Особенно для класса Σ, у которого до сих пор нет гипотез о коэффициентах и неравенствах для $b_n(g)$, при $n \geqslant 4$.

Как это было в случае с классом $\mathbb{S}$, были рассмотрены подклассы Σ с дополнительными геометрическими свойствами в попытке приблизиться к функции класса Σ. Со временем оказалось, что более удобно анализировать мероморфные однолистные функции в единичном круге, имеющие простой полюс в некоторой точке $p \in D$. В этом случае возможны два разложения в ряд Маклорена в начале координат и в ряд Лорана на полюсе.

Первые попытки исследования таких мероморфных функций были сделаны Гудманом в 1956 г. и Миллером в 1970 и 1980 гг.. Они рассматривали функции, являющиеся "вогнутыми"и вывели несколько аналитических характеристик. Анализ вогнутых функций снова был продолжен Ливингстоном в 1994 г., он впервые рассмотрел простой полюс точки $p \in (0,1)$

внутри единичного круга. Эта точка оказалась важна для оценки коэффициентов вогнутых функций, так как она дает некоторую дополнительную информацию о функции.

Размышления Ливингстона были продолжены и улучшены Ф. Г. Авхадиевым и Виртсом в период с 2002 по 2007 гг.. Они в основном рассматривали разложение в ряд Маклорена вогнутых функций

$$f(z) = z \sum_{n=2}^{\infty} a_n(f) z^n, \qquad |z| < p$$

имеющих простой полюс в точке $p \in (0,1)$. Диапазон коэффициентов, так же как и полюс, связан со значением p. В 2007 г., наконец, удалось вычислить диапазон коэффициентов $a_n(f)$ из этих вогнутых функций для всех $n \in \mathbb{N}$. Обсуждение о разложении ряда Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-1}(f)}{z-p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)(z-p)^n$$

в полюсе p , были начаты Bhowmik, Ponnusmy и Wirths в 2007 г. В работе [6] ими был дан диапазон первого коэффициента $c_1(f)$.

2 Некоторые предварительные сведения

Пусть Ω– область, т.е. открытое связное множество, лежащее на плоскости комплексных чисел $\mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Определение 1.

Функция $f(z)$ называется голоморфной в точке $z_0 \in \Omega$, если существует круг $D_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$, в котором функция $f(z)$ имеет производные любого порядка и представляется как сумма своего ряда Тейлора по степеням $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(z - z_0)^k, \qquad z \in D_r(z_0)$$

Введем определение однолистной функции:

Определение 2.

Голоморфная функция, осуществляющая взаимно однозначное отображение одной области в плоскости комплексного переменного на другую, называется однолистной функцией.

Для дальнейших рассуждений сформулируем лемму Шварца .

Лемма Шварца. ([7], стр. 57)

Если функция $f(z)$ голоморфна в области D и непрерывна в замкнутом круге , причем $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$, при $|z| < 1$, то

1. $|f(z)| \leqslant |z|, \quad 0 < |z| < 1,$
2. $|f'(0)| \leqslant 1.$

Равенство в 1.-2. достигается $\Leftrightarrow$ $f(z) = e^{i\alpha}$, где α– действительная постоянная.

3 Метод мажорации Литтлвуда для подчиненных функций

3.1 Отношение подчиненности голоморфных функций и теорема Литтлвуда

Пусть $f(z)$, $g(z)$ – голоморфные функции заданные в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$.

Введем отношение подчиненности функций.

О п р е д е л е н и е 3.

Если функция $w(z)$ голоморфна в единичном круге, в точке нуль обращается в нуль, для всех $z \in D$ ограничена по модулю единицей и

$$f(z) = g(w(z)) \qquad \forall z \in D,$$

то говорят, что $f(z)$ подчинена функции $g(z)$ и обозначают

$$f \prec g.$$

Предложение 1. ([7], стр. 200) *Для произвольной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, голоморфной в некоторой области D, её действительная ($Ref(z) = u(x, y)$) и мнимая ($Imf(z) = v(x, y)$)части являются гармоническими функциями.*

Сформулируем и приведем доказательство теоремы Джона Литтлвуда.

Т е о р е м а 2. (Теорема Дж. Литтлвуда.)

Если f и g аналитичны в единичном круге и f подчинена g, *то для* $\forall r \in (0,1)$ *выполняется неравенство:*

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Доказательство.

Зафиксируем число $r > 0$, $r \in (0,1)$. Возьмем некоторое число $\rho \in (r,1)$. Рассмотрим в области D квадраты аналитических функций $f^2(z)$ и $g^2(z)$.

Отметим, что $f^2(z)$, $g^2(z)$ также окажутся голоморфными в D (в силу того, что сумма и произведение голоморфных функций – голоморфная функция), их вещественные и мнимые части будут гармоническими функциями (по предложению 1). Обозначим

$$u(x,y) = \text{Re } g^2(z), \quad v(x,y) = \text{Im } g^2(z), \qquad \text{где} \;\; z = x + iy.$$

$$g^2(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Тогда

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

По условию Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

К функциям $\text{Re } g^2(z)$, $\text{Im } g^2(z)$ применим формулы Пуассона:

$$\text{Re } g^2(z) = u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\xi) \text{Re } \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\theta, \qquad \text{где} \quad \xi = \rho e^{i\theta}, \quad \rho \in (0,1),$$

$$\operatorname{Im} g^2(z) = v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(\xi)\operatorname{Re}\frac{\xi+z}{\xi-z}\,d\theta, \qquad \text{где} \quad \xi=\rho e^{i\theta}, \quad \rho\in(0,1).$$

Сложив действительную и мнимую части, получим:

$$g^2(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(\xi)\operatorname{Re}\frac{\xi+z}{\xi-z}\,d\theta, \qquad \text{где} \quad \xi=\rho e^{i\theta}, \quad \rho\in(0,1),$$

для любой точки $z = re^{i\varphi}$, $0<r<\rho$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Поэтому

$$f^2(z) = g^2(w(z)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(\xi)\operatorname{Re}\frac{\xi+w(z)}{\xi-w(z)}\,d\theta, \qquad \text{где} \quad \xi=\rho e^{i\theta},$$

учитывая, что $z = re^{i\varphi}$, $\xi=\rho e^{i\theta}$ и $|z|=r<\rho$, $|w(z)|\leqslant|z|$, перейдем к неравенству

$$|f(re^{i\varphi})|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^2\operatorname{Re}\frac{\rho e^{i\theta}+w(re^{i\varphi})}{\rho e^{i\theta}-w(re^{i\varphi})}d\theta. \qquad (*)$$

Так как действительная часть положительна, при условии $|z|=r<\rho=|\xi|:$

$$\operatorname{Re}\frac{\xi+z}{\xi-z} = \operatorname{Re}\frac{(\xi+z)(\overline{\xi}-\overline{z})}{|\xi-z|^2} > \operatorname{Re}(\xi+z)(\overline{\xi}-\overline{z}) =$$
$$= \operatorname{Re}(\xi\overline{\xi}-\xi\overline{z}+z\overline{\xi}-z\overline{z}) = \rho^2+r^2>0,$$

то рассматриваем ее под интегралом без знака модуля.

Проинтегрируем полученное неравенство $(*)$ для функций $f^2(z)$, $g^2(z)$ при фиксированном $r\in(0,1)$. Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^2d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^2d\theta\ \int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{\rho e^{i\theta}+w(re^{i\varphi})}{\rho e^{i\theta}-w(re^{i\varphi})}d\varphi.$$

К внутреннему интегралу применим теорему о среднем для гармонических функций, т.е формулу:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}V(re^{i\varphi})\,d\varphi = V(0), \qquad \text{где} \quad V=\operatorname{Re}\frac{\rho e^{i\theta}+w(re^{i\varphi})}{\rho e^{i\theta}-w(re^{i\varphi})}.$$

Так как
$$V(0) = \mathrm{Re}\,\frac{\rho e^{i\theta} + w(0)}{\rho e^{i\theta} - w(0)} = \mathrm{Re}\,\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} = 1.$$
Получим выражение
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,\frac{\rho e^{i\theta} + w(re^{i\varphi})}{\rho e^{i\theta} - w(re^{i\varphi})} d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$
для любых ρ, r, удовлетворяющих соотношениям $0 < r < \rho < 1$. В результате приходим к неравенству
$$\int\limits_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$
для любых ρ, r, таких, что $0 < r < \rho < 1$. Переходя к пределу при $\rho \to r$,
$$\lim_{\rho \to r} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$
получаем
$$\int\limits_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$
что является утверждением теоремы. $\Box$

3.2 Сравнение коэффициентов подчиненных функций

Всюду в этом параграфе будут рассматриваться две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$, связанные отношением подчиненности $f \prec g$. Сформулируем и докажем теорему, которая позволяет оценить коэффициенты таких функций.

Т е о р е м а 3. (Следствие из теоремы Литтлвуда) *Если функция f подчинена функции g, причем функции $f(z)$ и $g(z)$, разложены в ряд Тейлора с коэффициентами a_k и b_k соответственно:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Воспользуемся формулой Парсеваля для $|z| = r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(z)\overline{f(z)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{a_k} r^{2k} e^{ik\theta - ik\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |a_k|^2 r^{2k} d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Таким же образом получим равенство

$$\int_0^{2\pi} |g(z)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} g(z)\overline{g(z)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k e^{ik\theta} \overline{b_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{b_k} r^{2k} e^{ik\theta - ik\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k} d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |b_k|^2 r^{2k} d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k}.$$

Используя теорему Литтлвуда, получим следующее.

Так как

$$\int_0^{2\pi} |g(z)|^2 d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\theta,$$

то

$$2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k}.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k}.$$

При $r \to 1$ получаем утверждение теоремы

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2. \square$$

Т е о р е м а 4. (Теорема В. Рогозинского)

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области D, и разлагаются в ряд Тейлора с коэффициентами a_k и b_k :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

и пусть

$$f(z) \prec g(z).$$

Тогда для любого натурального числа n и при $n = 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из определения подчиненности известно, что

$$f(z) = g(w(z)). \tag{1}$$

По лемме Шварца для функции $w(z)$ справедлива точная оценка $|w(z)| \leqslant |z|$. Разложим функции $f(z)$ и $g(w(z))$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad g(w(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k(z). \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2), получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k(z).$$

Выделим конечные суммы

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k w^k(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k w^k(z).$$

Вычтем из обеих частей $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k w^k(z)$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k w^k(z)\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k w^k(z). \tag{3}$$

Поскольку вблизи нуля функция $w(z)$ имеет разложение

$$w(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots = z(\alpha_1 + \alpha_2 z + \dots),$$

выражение

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k w^k(z)$$

можно представить в виде:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k (\alpha_1 + \alpha_2 z + \dots)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k.$$

Равенство (3) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k w^k(z),$$

из определения о подчиненных функциях, становится ясно, что

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k \prec \sum_{k=0}^{n} b_k z^k.$$

Поэтому к функциям

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k$$

и

$$g_1(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

применимо следствие теоремы Литтлвуда. Будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2,$$

отсюда следует

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2,$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

4 Понятие квазиподчиненности и его применение

4.1 Квазиподчиненность функций

Наряду с подчиненными функциями рассматриваются квазиподчиненные функции. Дадим определение квазиподчиненности.

Определение 4.
Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$– единичный круг, $f(z)$, $g(z)$– голоморфные функции, заданные в области D. Функция $f(z)$ является квазиподчиненной функции $g(z)$, если для любых z из области D справедиво равенство

$$f(z) = \varphi(z)g(\omega(z)),$$

где функции ω и φ голоморфны в D, причем $|\omega(z)| \leqslant |z|$ и $|\varphi(z)| \leqslant 1$, $\forall z \in D$.

Выделим частный случай квазиподчиненности: если функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в единичном круге и для любых z из единичного круга справедливо неравенство

$$|f(z)| \leqslant |g(z)|,$$

то, очевидно, функция $f(z)$ является квазиподчиненной функции $g(z)$.

Как видно из определения, понятие квазиподчиненной функции является более широким нежели понятие подчиненной функции.

Для квазиподчиненной функции справедливы аналогичные теоремы:

Теорема 5. ([8], стр. 36)
Если функция $f(z)$ квазиподчинена функции $g(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \qquad (0 \leqslant r < 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

К функции $g^2(z)$ применима интегральная формула Пуассона:

$$|g(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 \operatorname{Re}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,dt, \qquad |z| \leqslant r < 1.$$

Из определения квазиподчиненности

$$|f(z)| \leqslant |g(w(z)|, \qquad |w(z) \leqslant |z|, \qquad (|z|<1)$$

следует, что для $0<\rho<r$, выполняется:

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |g(w(\rho e^{i\theta}))|^2\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{re^{it}+w(\rho e^{i\theta})}{re^{it}-w(\rho e^{i\theta})}\,d\theta\right)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2\,dt$$

При $\rho \to r$ получим утверждение теоремы. $\square$

Приведем обобщенную теорему Рогозинского.

Т е о р е м а 6. ([8], стр. 37)

Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

И функция $f(z)$ квазиподчинена функции $g(z)$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}|b_k|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По определению квазиподчиненности можем записать

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k - \varphi(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k w^k(z) \right) = \varphi(z) \sum_{k=0}^{n} b_k w^k(z).$$

Выражение в левой части равенства, стоящее в скобках, содержит только степени $z^\mu,\ \mu \geqslant n+1$. Функция в правой части квазиподчинена функции $\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$.

Применяя формулу Парсеваля и предыдущую теорему, получим

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \varphi(re^{i\theta}) \sum_{k=0}^{n} b_k w^k(re^{i\theta}) \right|^2 \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k r^k e^{ik\theta}) \right|^2 \, d\theta = \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 r^{2k}.$$

При $r \to 1$ получим утверждение теоремы. $\square$

4.2 Оценки коэффициентов выпуклых функций

Сформулируем и докажем теорему об оценке коэффициентов выпуклых функций. В дальнейшем, доказательство этой теоремы с некоторыми уточнениями будем использовать для выяснения оценок иных специальных классов функций, не обязательно выпуклых.

Т е о р е м а 7.
Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathbb{S}^0$. *Тогда* $|a_n| \leqslant 1$ *для любых* $n \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Из условия, что функия f является выпуклой, следует выполнение неравества

$$\mathrm{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \qquad \forall z \in D.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(z) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Введем функцию $W(z)$, конформно отображающую правую полуплоскость $\mathrm{Re}\ R > 0$ на единичный круг $|W| < 1$, и определяемую формулой

$$W(z) = \frac{R(z) - 1}{R(z) + 1}.$$

Из неравенства $|W(z)| < 1$ следует, что:

$$|W(z)| = \left|\frac{R(z) - 1}{R(z) + 1}\right| < 1, \qquad z \in D.$$

Так как

$$W(0) = \frac{R(0) - 1}{R(0) + 1} = 0,$$

применим первое утверждение леммы Шварца. Имеем

$$W(z)| \leqslant |z| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{R(z) - 1}{R(z) + 1}\right| \leqslant |z|,$$

$$|R(z)-1| \leqslant |zR(z)+z|,$$

в результате получим неравенство

$$|f''(z)| \leqslant |2f'(z)+zf''(z)|,$$

из которого следует, что функция $f''(z)$ квазиподчинена функции $2f'(z)+zf''(z)$. Разложим первую и вторую производные функции $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + ... = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1},$$

$$f''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3z + ... = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1}.$$

Получили

$$2f'(z) + zf''(z) =$$

$$2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2na_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) z^{n-1} a_n.$$

Неравенство Рогозинского для коэффициентов примет вид

$$4\ |a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 + \cdots + n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_2|^2 + \cdots + n^2(n+1)^2\ |a_n|^2. \qquad (*)$$

При $n=1$ получим неравенство $4|a_2|^2 \leqslant 4$. Откуда следует, что $|a_2| \leqslant 1$. При $n=2$:

$$4|a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 \leqslant 4 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_2|^2,$$

из чего следует, что

$$2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 \leqslant 4 + (2^2 \cdot 3^2 - 4)\ |a_2|^2 \leqslant 4 + (2^2 \cdot 3^2 - 4).$$

Коэффициент $|a_3| \leqslant 1$.

Методом математической индукции выведем оценку коэффициентов.

Базой индукции возьмем неравенство $|a_2| \leqslant 1$.

Предположим, что верны неравенства: $|a_2| \leqslant 1, \ldots, |a_n| \leqslant 1$. Найдем мажоранту для коэффицента $|a_{n+1}|$ из неравенства $(*)$.

Перенесем первые n слагаемых из левой части формулы $(*)$ в правую и применим неравенства $|a_k| \leqslant 1,\ k = \overline{2, n}$:

$$n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4+(2^2\cdot 3^2-4)|a_2|^2+(3^2\cdot 4^2-2^2\cdot 3^2)|a_3|^2+\cdots+(n^2(n+1)^2-(n-1)^2n^2)|a_n|^2.$$

Применим неравенства $|a_2| \leqslant 1, \ldots, |a_n| \leqslant 1$,

$$n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4+(2^2\cdot 3^2-2^2)+(3^2\cdot 4^2-2^2\cdot 3^2)+\cdots+(n^2(n+1)^2-(n-1)^2n^2) = n^2(n+1)^2.$$

После этих преобразований получена оценка

$$n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2 \leqslant n^2(n+1)^2.$$

Разделив обе части неравенства на положительное число $n^2(n+1)^2$, получим требуемую оценку

$$|a_{n+1}| \leqslant 1. \ \square$$

5 Оценки коэффициентов некоторых специальных классов функций

5.1 Оценка коэффициентов для функций из класса $\mathbb{S}(\frac{3}{2})$

Пусть функция $g(z)$, является голоморфной в области D и разлагается в ряд Тейлора:

$$g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots . \tag{1}$$

Введем класс функций $\mathbb{S}(\frac{3}{2})$ такой, что g имеет разложение (1), $g'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$, и выполняется неравенство:

$$\mathrm{Re} z\frac{g''(z)}{g'(z)} > -\frac{3}{2}, \qquad z \in D.$$

Рассмотрим следующую задачу:

Пусть $g \in \mathbb{S}(\frac{3}{2})$, необходимо оценить $|a_n|$ для $n \geqslant 2$. Так же, как и в предыдущем доказательстве, обозначим

$$R(z) = \frac{3}{2} + z\frac{g''(z)}{g'(z)}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$W(z) = \frac{R(z) - \frac{3}{2}}{R(z) + \frac{3}{2}}, \tag{3}$$

которая отображает правую полуплоскость на внутренность единичного круга, кроме того, легко видеть, что $W(0) = 0$. Применяя лемму Шварца, получаем

$$|W(z)| \leqslant |z|,$$

или же

$$\left| R(z) - \frac{3}{2} \right| \leqslant \left| zR(z) + \frac{3}{2}z \right|. \tag{4}$$

Подставив (2) в (4), получим

$$|g''(z)| \leqslant |3g'(z) + zg''(z)|. \tag{5}$$

Неравенство (5) показывает, что функция $g''(z)$ квазиподчинена функции $3g'(z) + zg''(z)$.

Вычислим коэффициенты ряда Тейлора этих функций и применим к ним теорему 6 (обобщенную теорему Рогозинского). Имеем

$$g'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + 5a_5z^4 + ... = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_nz^{n-1} \tag{6}$$

$$g''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3z + 3 \cdot 4a_3z^2 + 4 \cdot 5a_3z^3 + ... = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nz^{n-2} \tag{7}$$

Подставим выражения (6) и (7) в правую часть неравенства (5):

$$3g'(z)+zg''(z) = 3+\sum_{n=2}^{\infty} 3na_nz^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nz^{n-1} = 3+\sum_{n=2}^{\infty} n(n+2)a_nz^{n-1}.$$

Запишем неравенство Рогозинского для коэффициентов

$$4\ |a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 + \cdots + n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3^2 + 2^2 \cdot 4^2\ |a_2|^2 + \cdots + n^2(n+2)^2\ |a_n|^2 \tag{8}$$

при $n = 1:$

$$4\ |a_2|^2 \leqslant 3^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a_2| \leqslant \frac{3}{2},$$

при $n = 2:$

$$4\ |a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 \leqslant 3^2 + 2^2 \cdot 4^2\ |a_2|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a_3| \leqslant 2,$$

при $n = 3:$

$$4\ |a_2|^2+2^2\cdot 3^2\ |a_3|^2+3^2\cdot 4^2\ |a_4|^2 \leqslant 3^2+2^2\cdot 4^2\ |a_2|^2+3^2\cdot 5^2\ |a_3|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a_4| \leqslant \frac{5}{2}.$$

Следующие вычисления провели в пакете Wolfram Mathematica:

при $n = 4:$

$$|a_5| \leqslant 3;$$

при $n = 5:$

$$|a_6| \leqslant \frac{7}{2};$$

при $n = 6:$

$$|a_7| \leqslant 4;$$

при $n = 7:$

$$|a_8| \leqslant \frac{9}{2};$$

при $n = 8:$

$$|a_9| \leqslant 5.$$

Заметим, что для коэффициентов верна зависимость :

$$|a_n| \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(n-2) = \frac{1}{2}(n+1). \tag{9}$$

Предположим, что (9) верно. Тогда :

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+2). \tag{10}$$

Проверим это.

$$4\,|a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\,|a_3|^2 + \cdots + n^2(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2 \leqslant 3^2 + 2^2 \cdot 4^2\,|a_2|^2 + \cdots + n^2(n+2)^2\,|a_n|^2$$

$$n^2(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2 \leqslant 3^2 + (2^2 \cdot 4^2 - 4)\,|a_2|^2 + (3^2 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 3^2)\,|a_3|^2 + \cdots$$

$$\cdots + (n^2(n+2)^2 - (n-1)^2 n^2)\,|a_n|^2$$

$$n^2(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2 \leqslant 3^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5\,|a_2|^2 + 3^2 \cdot 3 \cdot 7\,|a_3|^2 + \cdots + n^2 \cdot 3(2n+1)\,|a_n|^2. \tag{11}$$

Подставив полученное ранее неравенство (9) в (11), получим:

$$n^2(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2 \leqslant 3^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 + \cdots + n^2 \cdot 3(2n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Или

$$n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2(2k+1)(k+1)^2. \tag{12}$$

Раскроем скобки в правой части неравенства

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2(2k+1)(k+1)^2 = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^5 + \frac{15}{4}\sum_{k=1}^{n} k^4 + 3\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2. \tag{13}$$

Предложение 2. ([4],стр 15-16) *Справедливы следующие формулы:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$,
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$,
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$,
6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

Просуммируем конечные суммы, используя формулы 1-4 из предложения 2:

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^5 + \frac{15}{4}\sum_{k=1}^{n} k^4 + 3\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{8}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)+$$

$$+\frac{1}{8}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) + \frac{3}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{8}n(n+1)(2n+1) =$$

$$= \frac{1}{8}n^2(n+1)^2(2n^2+2n+5) + \frac{3}{8}n^2(n+1)^2(2n+1) =$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2(n+2)^2.$$

Неравенство (12) примет вид

$$n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant \frac{1}{4}n^2(n+1)^2(n+2)^2.$$

Разделив обе части на положительное число $n^2(n+1)^2$, получаем

$$|a_{n+1}|^2 \leqslant \frac{1}{4}(n+2)^2,$$

т.е.

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}(n+2).$$

Таким образом была получена оценка коэффициентов для класса $\mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right)$.

Покажем, что оценка коэффициентов является точной. Рассмотрим функцию $g_0 \in \mathbb{S}\left(\frac{3}{2}\right)$, для которой выполняется:

$$\frac{3}{2} + z\frac{g_0''}{g_0'} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{2}{3}z\ \frac{g_0''}{g_0'}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+z}{1-z}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1+z}{1-z}\right) > 0.$$

Из этого условия найдем функцию g_0:

$$\frac{2}{3}z\ \frac{g_0''}{g_0'} = \frac{2z}{1-z}.$$

Разделим обе части уравнения на $\dfrac{2}{3}z$:

$$\frac{g_0''}{g_0'} = \frac{3}{1-z}.$$

Решая дифференциальное уравнение, получим:

$$\ln g_0' = 3\ln\frac{1}{1-z},$$

$$g_0'(z) = \frac{1}{(1-z)^3},$$

$$g_0(z) = \int_0^z g_0(\zeta)\; d\zeta = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-z)^3} = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Из курса математического анализа нам известно:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots .$$

Возьмем производные от обеих частей:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \cdots . \tag{15}$$

Подставим (15) в (14):

$$g_0(z) = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2} z^n.$$

Для функции $g_0 \in \mathbb{S}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ получили точную оценку для коэффициентов

$$|a_n| = \frac{n+1}{2}.$$

Функция g_0 является экстремальной функцией, которая показывает, что полученная нами оценка

$$|a_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

точна.

Таким образом, верна следующая теорема.

Т е о р е м а 8. *Для всякой функции* $g(z) \in \mathbb{S}\left(\dfrac{3}{2}\right)$, *верна следующая оценка для ее коэффицентов в разложении в ряд Тейлора:*

$$|a_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Причем строгое равенство достигается на экстремальной функции

$$g_0(z) = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2}.$$

5.2 Оценка коэффициентов для функций из класса $\mathbb{S}(2)$

Пусть функция $h(z)$, аналитическая в единичном круге, имеет разложение в ряд Тейлора:

$$h(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{1}$$

Введем класс функций $\mathbb{S}(2)$, в котором h имеет разложение в ряд Тейлора, $h'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$, и выполняется неравенство:

$$\mathrm{Re} z\frac{h''(z)}{h'(z)} > -2, \qquad z \in D.$$

Рассмотрим следующую задачу: Пусть $h \in \mathbb{S}(2)$, необходимо оценить $|a_n|$ для $n \geqslant 2$. Введем функцию

$$R(z) = 2 + z\frac{h''(z)}{h'(z)}. \tag{2}$$

Дробно-линейная функция

$$W(z) = \frac{R(z) - 2}{R(z) + 2} \tag{3}$$

отображает правую полуплоскость на внутренность единичного круга, также

$$W(0) = \frac{R(0) - 2}{R(0) + 2} = 0.$$

Из этого, используя лемму Шварца, получаем

$$|W(z)| \leqslant |z|,$$

т.е.

$$|R(z) - 2| \leqslant |zR(z) + 2z|. \tag{4}$$

Подставив (2) в (4):

$$\left|2 + z\frac{h''(z)}{h'(z)} - 2\right| \leqslant \left|2z + z^2\frac{h''(z)}{h'(z)} + 2z\right|,$$

$$\left|z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leqslant \left|4z + z^2\frac{h''(z)}{h'(z)}\right|.$$

Умножив обе части неравенства на $|\dfrac{h'(z)}{z}|$, в конечном итоге получим:

$$|h''(z)| \leqslant |4h'(z) + zh''(z)|. \qquad (5)$$

Из этого неравенства видно, что функция $h''(z)$ квазиподчинена функции $4h'(z) + zh''(z)$.

Вычислим тейлоровские коэффициенты этих функций и применим к ним обобщенную теорему Рогозинского. Имеем

$$h'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + 5a_5z^4 + ... = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_nz^{n-1} \qquad (6)$$

$$h''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3z + 3 \cdot 4a_3z^2 + 4 \cdot 5a_3z^3 + ... = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nz^{n-2} \quad (7)$$

Подставим выражения (6) и (7) в правую часть неравенства (5):

$$4h'(z)+zh''(z) = 4+\sum_{n=2}^{\infty} 4na_nz^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nz^{n-1} = 4+\sum_{n=2}^{\infty} n(n+3)a_nz^{n-1}.$$

Запишем неравенство Рогозинского для коэффициентов

$$4\ |a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 + \cdots + n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4^2 + 2^2 \cdot 5^2\ |a_2|^2 + \cdots + n^2(n+3)^2\ |a_n|^2 \qquad (8)$$

при $n = 1:$

$$4\ |a_2|^2 \leqslant 4^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a_2| \leqslant 2,$$

при $n = 2:$

$$4\ |a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 \leqslant 4^2 + 2^2 \cdot 5^2\ |a_2|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a_3| \leqslant \frac{10}{3},$$

при $n = 3:$

$$4\,|a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\,|a_3|^2 + 3^2 \cdot 4^2\,|a_4|^2 \leqslant 4^2 + 2^2 \cdot 5^2\,|a_2|^2 + 3^2 \cdot 6^2\,|a_3|^2 \qquad \Rightarrow \qquad |a_4| \leqslant 5,$$

Следующие подсчеты проведем в пакете Wolfram Mathematica:

при $n = 4:$

$$|a_5| \leqslant 7;$$

при $n = 5:$

$$|a_6| \leqslant \frac{28}{3};$$

при $n = 6:$

$$|a_7| \leqslant 12;$$

при $n = 7:$

$$|a_8| \leqslant 15;$$

при $n = 8:$

$$|a_9| \leqslant \frac{55}{3};$$

при $n = 9:$

$$|a_{10}| \leqslant 22;$$

Найдем зависимость коэффициентов :

$$|a_2| \leqslant 2 = 1 + 1 = |a_1| + 1 = |a_1| + \frac{2+1}{3},$$

$$|a_3| \leqslant \frac{10}{3} = 2 + \frac{4}{3} = |a_1| + \frac{2+1}{3} + \frac{3+1}{3},$$

$$|a_4| \leqslant 5 = \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = |a_1| + \frac{2+1}{3} + \frac{3+1}{3} + \frac{4+1}{3},$$

$$|a_5| \leqslant \frac{28}{3} = 5 + \frac{6}{3} = |a_1| + \frac{2+1}{3} + \frac{3+1}{3} + \frac{4+1}{3}, + \frac{5+1}{3},$$

$$\ldots$$

$$|a_n| \leqslant |a_1| + \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3}$$

Используя формулу арифметической прогрессии и равенство для первого коэффициента $|a_1| = 1$, преобразуем неравенство:

$$|a_n| \leqslant 1 + \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n}{3} = 1 + \frac{n(n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)}{6} \tag{9}$$

Предположим, что (9) верно. Тогда :

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{(n+2)(n+3)}{6}. \tag{10}$$

Проверим это:

$$4\ |a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2\ |a_3|^2 + \cdots + n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant .$$

$$\leqslant 4^2 + 2^2 \cdot 5^2\ |a_2|^2 + \cdots + n^2(n+3)^2\ |a_n|^2$$

Перенесем все члены суммы, кроме последнего, из левой части неравенства в правую:

$$n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant 4^2 + (2^2 \cdot 5^2 - 4)\ |a_2|^2 + (3^2 \cdot 6^2 - 2^2 \cdot 3^2)\ |a_3|^2 + \cdots$$

$$\cdots + (n^2(n+3)^2 - (n-1)^2 n^2)\ |a_n|^2,$$

$$n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant 4^2 + 2^2 \cdot 24\ |a_2|^2 + 3^2 \cdot 32\ |a_3|^2 + \cdots + 8n^2 \cdot (n+1)\ |a_n|^2. \tag{11}$$

Подставив полученное ранее неравенство (9) в (11), получим:

$$n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant 3^2 + 2^2 \cdot 24 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 32 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \cdots$$

$$\cdots + 8n^2 \cdot (n+1)\ \left(\frac{(n+1)(n+2)}{6}\right)^2,$$

или

$$n^2(n+1)^2\ |a_{n+1}|^2 \leqslant \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^3(k+2)^2. \tag{12}$$

Раскроем скобки в правой части неравенства

$$\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^3(k+2)^2 =$$

$$= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n} k^7 + \frac{14}{9}\sum_{k=1}^{n} k^6 + \frac{38}{9}\sum_{k=1}^{n} k^5 + \frac{50}{9}\sum_{k=1}^{n} k^4 + \frac{32}{9}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{n} k^2. \quad (13)$$

Просуммируем ряды, используя формулы 1-6 из предложения 1:

$$\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^3(k+2)^2 =$$

$$\frac{1}{108}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)+\frac{1}{27}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)+$$

$$+\frac{19}{54}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)+\frac{5}{27}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+$$

$$+\frac{8}{9}n^2(n+1)^2+\frac{4}{27}n(n+1)(2n+1) =$$

$$= \frac{1}{36}n^2(n+1)^2(n^4+2n^3+25n^2+24n+20)+\frac{1}{9}n^2(n+1)^2(2n+1)(n^2+n+4) =$$

$$= \frac{1}{36}n^2(n+1)^2(n^4+10\,n^3+37\,n^2+60\,n+36) = \frac{1}{36}n^2(n+1)^2(n+2)^2\,(n+3)^2$$

Неравенство (12) примет вид

$$n^2(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2 \leqslant \frac{1}{36}n^2(n+1)^2(n+2)^2\,(n+3)^2.$$

Разделив обе части на $n^2(n+1)^2$, получаем

$$|a_{n+1}|^2 \leqslant \frac{1}{36}(n+2)^2\,(n+3)^2,$$

т.е.

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{6}(n+2)\,(n+3).$$

Получили оценку коэффициентов для класса $\mathbb{S}\,(2)$.

Покажем, что эта оценка является точной. Рассмотрим функцию $h_0 \in \mathbb{S}(2)$, для которой выполняется:

$$2 + z\frac{h_0''}{h_0'} = 2\left(1 + \frac{1}{2}z\ \frac{h_0''}{h_0'}\right) = 2 \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

$$\operatorname{Re}\left(2 \cdot \frac{1+z}{1-z}\right) > 0$$

Найдем функцию h_0:

$$2z\ \frac{h_0''}{h_0'} = \frac{2z}{1-z}.$$

Разделим обе части уравнения на $2z$:

$$\frac{h_0''}{h_0'} = \frac{4}{1-z}.$$

Решая дифференциальное уравнение, получим:

$$\ln h_0' = 4 \ln \frac{1}{1-z},$$

$$h_0'(z) = \frac{1}{(1-z)^4},$$

$$h_0(z) = \int\limits_0^z h_0(\zeta)\ d\zeta = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{(1-z)^4} = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{1}{3}. \tag{14}$$

Из курса математического анализа нам известно:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots .$$

Вычислим вторые производные от обеих частей:

$$\frac{2}{(1-z)^3} = 2 + 6z + 4 \cdot 3\ z^2 + 5 \cdot 4\ z^3 + 6 \cdot 5\ z^4 + \cdots =$$

$$= 2 + 6z + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n. \tag{15}$$

Подставим (15) в (14):

$$h_0(z) = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{1}{3} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{6} z^n.$$

Для функции $h_0 \in \mathbb{S}(2)$ получили точную оценку для коэффициентов

$$|a_n| = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

Функция h_0 является экстремальной функцией, которая показывает, что полученная нами оценка

$$|a_n| \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

точна.

Сформулируем полученную теорему.

Т е о р е м а 9. *Для всякой функции* $h(z) \in \mathbb{S}(2)$, *верна следующая оценка для ее коэффицентов в разложении в ряд Тейлора:*

$$|a_n| \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

Причем строгое равенство достигается на экстремальной функции

$$h_0(z) = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{1}{3}$$

6 Заключение

В данной работе исследуется возможность оценки коэффициентов некоторых классов функций, базируясь на известных фактах из этой области, описание которых приведено выше. Кроме того, для получения интересующих оценок вводятся некоторые дополнительные отношения эквивалентности (подчиненность и квазиподчиненность функций), свойства которых описываются в разделах 3 и 4.

В вводной части работы сообщаются необходимые определения базовых классов функций. В параграфе 3.1 приводится теорема Литтлвуда, которая помогает доказать некоторые утверждения, касающиеся характеристики коэффициентов у подчиненных и квазиподчиненных функций. Важными этапами данной работы являются доказательства теорем Рогозинского. Все эти утверждения в дальнейшем помогают оценить коэффициенты выпуклых функций. На основе этого результата с некоторыми оговорками и дополнениями, исследуются два класса функций, вообще говоря, не обязательно выпуклых, что составляет основной результат этой работы.

Список литературы

[1] Ф. Г. Авхадиев *Введение в геометрическую теорию функций: учебное пособие.* Казань. Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. - 127с.

[2] Г.М. Голузин *Геометрическая теория функций комплексного переменного.*- - Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1965. - 628с.

[3] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Schwarz - Pick Type Inequalities.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009. - 156pp.

[4] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений,*Москва: Физматгиз, 1963.- 1100с.

[5] R. Ohno *A Study on Concave Funtion in Geometric Function Theory.* Tohoku university, 2014. pp. iv-vi

[6] B. Bhowmik, S. Ponnusamy and K.-J. Wirths, *Domains of variability of Laurent coefficients and the convex hull for the family of concave univalent functions*, Kodai Math. Journal 30, 2007, 385-393

[7] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного.* 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит. 1973. -749 с

[8] Ch. Pommerenke. *Univalent functions.* Vandenhoeck and Rupercht, Göttingen,1975, 382pp.