УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 75–85 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 539.5 doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.75-85

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ПАНЕЛЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Р.А. Каюмов[1,2], *Б.Ф. Тазюков*[3], *И.З. Мухамедова*[1], *Ф.Р. Шакирзянов*[1]

[1]*Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, 420043, Россия*

[2]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

[3]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Рассмотрена задача идентификации механических характеристик волокнистого композитного материала, из которого путем наложения под углом к краю изготовлены цилиндрические панели или предварительно изогнутые пластины. Задача решена на основе анализа результатов испытаний конструкций с доведением их до потери несущей способности по причине потери устойчивости. Преимущество предложенного подхода состоит в том, что в экспериментах не требуется замерять деформации или перемещения указанных элементов конструкций (при этом не требуется наличие сложных измерительных приборов, их тарировка, длительная отладка методик проведения эксперимента). Необходимо определять только критические значения нагрузки, что не требует большого времени на проведение испытаний. Кроме того, подобные испытания не являются разрушающими при нагружении, что обеспечивает возможность многократного использования образца при разных видах нагрузки и условий закрепления. Методика идентификации основана на минимизации квадратичной невязки между результатами решения прямых задач устойчивости и результатами экспериментов. Путем введения в невязку возможных погрешностей измерения экспериментальных данных получена расширенная постановка задачи. Численными решениями модельных задач показано, что решение задачи устойчиво к вариациям исходных данных. Предложенный подход позволяет получить расчетные механические характеристики композитного материала, близкие к истинным, даже в случае немалого разброса жесткостных характеристик композитного материала от образца к образцу и погрешности определения критической нагрузки.

Ключевые слова: волокнистый композит, метод идентификации, минимизация, устойчивость, критическая нагрузка, жесткостные характеристики, численный эксперимент

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим волокнистый композитный материал (ВКМ) в виде тонкой упругой оболочки, изготовленной разноориентированным наложением слоев. Основные уравнения, описывающие ее поведение, считаются известными.

Уравнения равновесия можно записать в общем виде

$$F\,(w, P, g, k) = 0. \tag{1}$$

Здесь $w = (w_x, w_y, w_z)$ и $P = (p_x, p_y, p_z)$ – векторы перемещения и нагрузки в осях x, y, z; k – вектор, составленный из конструктивных параметров; g – вектор независимых упругих констант ВКМ, подлежащих определению.

Граничные условия представим в виде

$$f\,(w, P, g, k) = \psi. \tag{2}$$

Здесь ψ – вектор известных на границе области физических величин.

Механические характеристики ВКМ принадлежат заранее определенному пространству функций, то есть они должны удовлетворять некоторым ограничениям и условиям. Запишем их в виде

$$B_1(g) = 0, \quad B_2(g) \geq 0. \tag{3}$$

Будем считать, что мы можем определить формы потери устойчивости и критическую нагрузку, при которой происходит потеря устойчивости, используя известные методы [1–8]. Таким образом, предполагаем, что выражение для расчетной критической нагрузки $P^{\text{расч}}$ имеет вид

$$P^{\text{расч}} = P^{\text{расч}}(g, k). \tag{4}$$

Рассмотрим задачу определения констант g на основе минимизации невязки расчетных и экспериментальных значений критических нагрузок.

Пусть проведены N серий испытаний упругих элементов с доведением их до потери устойчивости. Обозначим через $P_i^{\text{эксп}}$ $(i = 1, \ldots, N)$ найденные из эксперимента критические нагрузки, через $k_i^{\text{эксп}}$ – векторы, составленные из конструктивных параметров экспериментальных образцов.

Подставим $k_i^{\text{эксп}}$ в соотношение (4) и поставим задачу определения упругих характеристик ВКМ из следующих соотношений:

$$P^{\text{эксп}} = P^{\text{расч}}(g, k^{\text{эксп}}). \tag{5}$$

В общем случае система (5) не может быть решена точно. Поэтому для получения наилучшего решения системы данную задачу обычно сводят к задаче математического программирования, то есть к определению минимума функции цели, представляющей собой некоторую меру невязки уравнений (5).

Традиционной задаче идентификации [9] обычно соответствует следующая целевая функция:

$$\delta_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_i^{\text{расч}} - P_i^{\text{эксп}}}{P_i^{\text{эксп}}} \right)^2 \cdot n_i, \tag{6}$$

где n_i – весовые коэффициенты.

При минимизации (6) должны быть учтены ограничения (3). Минимизация функции (6) может привести к решению, не удовлетворяющему уравнениям (1) и (2) с приемлемой точностью (вследствие наличия погрешностей определения исходных данных и погрешностей используемых моделей или же сильной чувствительности задачи к этим погрешностям).

Если решение задачи в традиционной постановке неустойчиво к вариациям исходных данных, то необходимо применять какие-либо методы регуляризации. Иногда повышения устойчивости задачи можно добиться, используя формулировку проблемы идентификации в расширенной постановке [2].

Применительно к данной задаче суть ее заключается в следующем. Во-первых, считаем, что при изготовлении композиционный материал меняет свои свойства от образца к образцу, во-вторых, имеются как погрешности измерения критических нагрузок $P_i^{\text{эксп}}$, так и погрешности замеров конструктивных параметров экспериментальных образцов $k_i^{\text{эксп}}$.

Вместо одного неизвестного вектора g ищем неизвестные $P_i^{\text{расч}}$, $g_i^{\text{расч}}$, $k_i^{\text{расч}}$, $\psi_i^{\text{расч}}$, приближенно удовлетворяя следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &F(w_i^{\text{расч}}, P_i^{\text{расч}}, g_i^{\text{расч}}, k_i^{\text{расч}}) = 0, \quad f(w_i^{\text{расч}}, P_i^{\text{расч}}, g_i^{\text{расч}}, k_i^{\text{расч}}) = \psi_i^{\text{расч}}, \\ &P_i^{\text{расч}} - P_i^{\text{эксп}} = 0, \quad g_i^{\text{расч}} - g = 0, \quad \psi_i^{\text{расч}} - \psi_i^{\text{эксп}} = 0, \\ &k_i^{\text{расч}} - k_i^{\text{эксп}} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $g_i^{\text{расч}}$ – векторы, принадлежащие предполагаемому классу функций; $P_i^{\text{расч}}$, $P_i^{\text{эксп}}$ – расчетные и найденные из эксперимента критические нагрузки соответственно. Соотношения (3) будем считать удовлетворяющими строго.

Введем следующие функции:

$$\Delta g_i = g_i^{\text{расч}} - g, \quad \Delta k_i = k_i^{\text{расч}} - k_i^{\text{эксп}},$$
$$\Delta \psi_i = \psi_i^{\text{расч}} - \psi_i^{\text{эксп}}, \quad P_i^{\text{эксп}} = P_i^{\text{расч}} + \Delta P_i.$$

На функции Δg_i, Δk_i, $\Delta \psi_i$, ΔP_i наложим ограничения, потребовав их малость:

$$|\Delta g_i| \ll |g|, \quad |\Delta k_i| \ll |k_i^{\text{эксп}}|, \quad |\Delta P_i| \ll |P_i^{\text{эксп}}|, \quad |\Delta \psi_i| \ll |\psi_i^{\text{эксп}}|.$$

Функция цели в расширенной постановке имеет вид

$$\Phi^2 = \delta_P^2 + \delta_{\Delta g}^2 + \delta_{\Delta P}^2 + \delta_{\Delta k}^2 + \delta_{\Delta \psi}^2 + (F\alpha)^2 + [(f-\psi)\gamma]^2,$$

$$\delta_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_i^{\text{расч}} - P_i^{\text{эксп}}}{P_i^{\text{эксп}}} \right)^2 \cdot n_i, \quad \delta_{\Delta P}^2 = \sum_{i=1}^{3} \Delta P_i^2 \cdot l_i,$$

$$\delta_{\Delta g}^2 = \sum_i^N \sum_j^M (\Delta g_{ij})^2 \cdot z_i, \quad \delta_{\Delta k}^2 = \sum_i^N \sum_j^L (\Delta k_{ij})^2 m_i, \quad \delta_{\Delta \psi}^2 = \sum_i^N (\Delta \psi_i \chi)^2. \tag{8}$$

$$|\Delta g_{ij}| \le \beta_g \left| \sum_{j=1}^{M} g_j \right|, \quad \beta_g \ll 1; \quad |\Delta P_i| \le \beta_p \, |P_i^{\text{эксп}}|, \quad \beta_p \ll 1;$$

$$|\Delta \psi_i| \le \beta_\psi \, |\psi_i^{\text{эксп}}|, \quad \beta_\psi \ll 1; \quad |\Delta k_{ij}| \le \beta_k \left| k_{ij}^{\text{эксп}} \right|, \quad \beta_k \ll 1.$$

Здесь M – количество жесткостных характеристик ВКМ; L – количество конструктивных параметров образца; n_i, l_i, z_i, m_i – нормирующие весовые коэффициенты; α, γ, χ – вектора, составленные из нормирующих весовых коэффициентов; $P_i^{\text{расч}}$, $g_{ij}^{\text{расч}}$, векторы Δg_{ij}, ΔP_i, $\Delta \psi_i$, Δk_{ij} – искомые величины.

Часть уравнений в (7) можно удовлетворить точно, тогда получим задачу на условный экстремум функции Φ^2.

2. Апробация метода на модельных задачах

Изложим предложенный подход на примере шарнирно закрепленной предварительно изогнутой сжимающей силой тонкой упругой пластины, изготовленной наложением слоев ВКМ под углом $\pm\varphi$ к оси x и находящейся под действием центрально приложенной сосредоточенной нагрузки. Рассмотрим случай несимметричной формы потери устойчивости. Для всех других вариантов закрепления краев, внецентренного приложения внешней нагрузки, а также для случая цилиндрической панели задача решается совершенно аналогично.

Решение основываем на упрощенной формуле для $P_{\text{кр}}$, при которой изогнутая пластинка теряет устойчивость [8]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{a\pi^3}{\sqrt{3}b^2}D, \tag{9}$$

где D – цилиндрическая жесткость, a – стрела подъема, $2b$ – длина пролета.

Рассмотрим несколько модельных задач, часть из которых решим в предположении, что критическая нагрузка найдена из эксперимента с некоторой погрешностью, а другие – в предположении, что учтено также влияние технологических факторов процесса изготовления упругих элементов, то есть в предположении, что жесткостные характеристики ВКМ варьируются от образца к образцу.

В качестве теоретически точных значений жесткостных характеристик ВКМ, из которого изготовлены пластины, приняты следующие значения, приведенные в [10] для углепластика: $E_1 = 180$ ГПа, $E_2 = 6.2$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 5$ ГПа, $\nu_{12} = 0.007$, $G_{23} = 4$ ГПа (E_1, E_2 – модули упругости вдоль и поперек армирования, G_{12}, G_{23}, G_{31} – модули сдвига, ν_{12} – коэффициент Пуассона).

Как будет видно из численных экспериментов, применение (8) вместо (6) действительно позволяет восстанавливать жесткостные характеристики слоя с достаточной точностью как в случае приближенных значений экспериментальных данных, так и при наличии разброса значений жесткостных характеристик от образца к образцу.

2.1. Традиционный подход. Согласно вышеизложенному задача идентификации в традиционной постановке [9, 11, 12] основана на минимизации функции цели в виде (6):

$$\delta_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_i^{\text{расч}} - P_i^{\text{эксп}}}{P_i^{\text{эксп}}} \right)^2 \cdot n_i, \tag{10}$$

где $P_i^{\text{расч}}$, $P_i^{\text{эксп}}$ – расчетные и найденные из эксперимента критические нагрузки соответственно; n_i – весовые коэффициенты, N – количество проведенных экспериментов.

Для нахождения расчетной критической нагрузки $P_i^{\text{расч}}$ используем упрощенную аналитическую формулу (9):

$$P^{\text{расч}} = \frac{a\pi^3}{\sqrt{3}b^2}D. \tag{11}$$

Цилиндрическая жесткость предварительно сжатой пластинки, образованной путем наложения под углом $\pm\varphi$ к оси x КМ типа ленты, имеет следующий вид [10, 13]:

$$D = g_{11}\cos^4\varphi + g_{22}\sin^4\varphi + 2(g_{12} + 2g_{33})\cos^2\varphi\sin^2\varphi,$$

где g_{ij} – жесткостные характеристики композитного материала в осях ортотропии однонаправленного материала.

При решении задачи нелинейного программирования использовались градиентный (квазиньютоновский) и поисковый (деформируемого многогранника) методы (использовались стандартные процедуры пакета Mathematica). Полученные с помощью них результаты не имеют какого-либо существенного различия, различной

Табл. 1

Результаты численных экспериментов по идентификации жесткостных характеристик $g_{11}^{\text{расч}}, g_{22}^{\text{расч}}, D_3^{\text{расч}}$ ВКМ в традиционной постановке при различных погрешностях ΔP_i определения критической нагрузки

$\delta_{\Delta P}$	$g_{11}^{\text{расч}}$	$g_{22}^{\text{расч}}$	$D_3^{\text{расч}}$	$\sqrt{\delta_P^2}$	k_i
0%**	180.25 (0%)	6.2088 (0%)	11.262 (0%)	0	1
0%*	179.96 (0.2%)	5.1682 (16.8%)	11.909 (5.7%)	$6.06{\cdot}10^{-4}$	1
1%	185.52 (2.9%)	25.369 (308%)	0	0.179	1
5%	184.80 (2.5%)	31.919 (414%)	0	0.067	1
10%	181.84 (0.9%)	41.5 (569%)	0	0.147	1
20%	168.91 (6.3%)	65.562 (955%)	0	0.307	1

Табл. 2

Результаты численных экспериментов по идентификации жесткостных характеристик $g_{11}^{\text{расч}}$, $g_{22}^{\text{расч}}$, $D_3^{\text{расч}}$ ВКМ в традиционной постановке при различных погрешностях ΔP_i определения критической нагрузки и наличии технологических изменений

$\delta_{\Delta P}+\delta_{\Delta g}$	$g_{11}^{\text{расч}}$	$g_{22}^{\text{расч}}$	$D_3^{\text{расч}}$	$\sqrt{\delta_P^2}$	k_i
0%	180.25 (0%)	6.2088 (0%)	11.262 (0%)	0	1
1%	187.38 (3.9%)	25.498 (310%)	0	$5.10{\cdot}10^{-3}$	1
5%	194.04 (7.6%)	32.878 (429%)	0	$6.78{\cdot}10^{-2}$	1
10%	200.03 (10.9%)	44.389 (615%)	0	0.147	1
20%	202.69 (12.4%)	76.071 (1125%)	0	0.307	1

оказалась лишь скорость сходимости решения – градиентный метод имеет бо́льшую скорость по сравнению с поисковым методом.

Численный анализ показал, что указанная методика позволяет определить для ВКМ две жесткостные характеристики g_{11} и g_{22}, а также приведенную жесткость $D_3 = g_{12} + 2g_{33}$, причем для их определения необходимо провести как минимум три эксперимента с пластинами при разных углах укладки слоев $\pm\varphi$.

Рассмотрим пример определения жесткостных характеристик углепластика по результатам трех численных экспериментов с различными погрешностями определения критической нагрузки и углами $\varphi = 25°, 35°, 45°$. В качестве экспериментальных значений $P_i^{\text{эксп}}$ используем величины критических нагрузок, полученных по формуле (11). При этом принималось, что жесткостные характеристики для рассматриваемого углепластика имеют следующие значения: $g_{11} = 180.25$ ГПа, $g_{22} = 6.2088$ ГПа, $D_3 = g_{12} + 2g_{33} = 11.262$ ГПа.

Для решения задачи восстановления жесткостных характеристик g_{11}, g_{22}, D_3 в традиционной постановке минимизировалась функция цели (10). Результаты расчетов представлены в табл. 1. В первом столбце приведены погрешности измерения критических нагрузок $P_i^{\text{эксп}}$. Эти погрешности задавались по нормальному закону распределения случайной величины.

Численный анализ показал, что при решении задачи в традиционной постановке иногда не хватает установленной по умолчанию в пакете Mathematica точности. Например, в третьей строчке табл. 1 (отмечено одной звездочкой) приведены результаты, полученные при установленной по умолчанию точности 16 значащих цифр, а во второй строчке (отмечено двумя звездочками) – при рабочей точности 40 значащих цифр.

Теперь рассмотрим задачу в усложненной постановке. Кроме предположения о том, что критические нагрузки $P_i^{\text{эксп}}$ измерены с некоторой погрешностью, будем считать, что жесткостные характеристики композитной ленты меняют (хотя и не сильно) свои свойства в процессе изготовления конструкции. Результаты решения задачи идентификации с использованием функции цели (10) представлены в табл. 2. Так как наилучшие результаты получены при удержании 40 значащих цифр, то при решении следующих задач этого раздела была использована эта точность. В первом столбце приведены погрешности ΔP_i измерения критических нагрузок и изменения жесткостных характеристик ВКМ. Здесь также разброс исходных данных задавался по нормальному закону распределения случайной величины.

Из представленных в табл. 1, 2 результатов видно, что небольшой разброс жесткостных характеристик композитной ленты в процессе изготовления конструкции или небольшие погрешности измерения критических нагрузок $P_i^{\text{эксп}}$ приводят при использовании традиционного подхода к существенному отличию расчетных значений малых жесткостных характеристик $g_{22},\ D_3$ от истинных.

2.2. Использование расширенной функции цели. Методику расширения функции цели продемонстрируем первоначально на задаче о нахождении жесткостных характеристик углепластика, по результатам испытаний трех пластин с углами укладки слоев $\varphi = 25^\circ,\ 35^\circ,\ 45^\circ$, в которой будем учитывать только погрешности измерения критической нагрузки ΔP_i.

С учетом предположения о малости погрешности определения критической нагрузки ΔP_i из эксперимента расчетную критическую нагрузку ищем в виде

$$P_i = P_i^{\text{расч}}\left(1 + \alpha\sin(\Delta P_i/P_i^{\text{расч}})\right),$$

где $\alpha\sin(\Delta P_i/P_i^{\text{расч}})$ имитирует погрешности измерения нагрузки; α – малая безразмерная величина ($\alpha \ll 1$), которая задает порядок погрешности измерения; $P_i^{\text{расч}}$ и ΔP_i – искомые параметры.

Функцию цели примем в виде $\Phi^2 = \delta_P^2 + \delta_{\Delta P}^2$, где

$$\delta_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{P_i - P_i^{\text{эксп}}}{P_i^{\text{эксп}}}\right)^2 \cdot n_i, \quad \delta_{\Delta P}^2 = \sum_{i=1}^{N}\Delta P_i^2 \cdot l_i.$$

Функция цели расширена за счет новых варьируемых параметров: ΔP_i – погрешностей измерения критической нагрузки; $n_i,\ l_i$ – нормирующих весовых коэффициентов.

Для сравнения с традиционным подходом рассмотрим задачу о нахождения жесткостных характеристик углепластика при тех же значениях $P_i^{\text{расч}}$, которые были использованы при составлении табл. 1. Полученные при решении задачи результаты представлены в табл. 3, в первом столбце которой приведена погрешность измерения критической нагрузки.

Из табл. 3 видно, что решение задачи в расширенной постановке устойчиво к погрешностям исходных данных, и предложенный подход позволяет получить расчетные механические характеристики, близкие к истинным, даже в случае большой погрешности определения критической нагрузки.

Теперь рассмотрим задачу о нахождении жесткостных характеристик углепластика по результатам испытаний трех пластин с углами укладки слоев $\varphi = 25^\circ,\ 35^\circ,\ 45^\circ$, в которой будем учитывать как технологические факторы изготовления (считаем, что при изготовлении композиционный материал меняет свои свойства от образца к образцу), так и погрешности измерения критической нагрузки ΔP_i. В этом случае функцию цели расширяем следующим образом:

$$\Phi^2 = \delta_P^2 + \delta_{\Delta P}^2 + \delta_{\Delta g_{11}}^2 + \delta_{\Delta g_{22}}^2 + \delta_{\Delta D_3}^2,$$

Табл. 3

Результаты численных экспериментов по идентификации жесткостных характеристик $g_{11}^{\text{расч}}$, $g_{22}^{\text{расч}}$, $D_3^{\text{расч}}$ ВКМ в расширенной постановке при различных погрешностях определения критической нагрузки

$\delta_{\Delta P}$	$g_{11}^{\text{расч}}$	$g_{22}^{\text{расч}}$	$D_3^{\text{расч}}$	$\sqrt{\delta_P^2}$	n_i	k_i
0%	180.25 (0%)	6.2088 (0%)	11.262 (0%)	0	1	1
1%	180.69 (0.2%)	6.1831 (0.4%)	11.435 (1.5%)	$7.58\cdot10^{-3}$	10^{-5}	1
5%	180.3 (0.03%)	6.1973 (0.2%)	11.23 (0.3%)	$2.78\cdot10^{-4}$	10^{-8}	1
10%	180.27 (0.01%)	6.3479 (2.2%)	11.211 (0.4%)	$4.71\cdot10^{-7}$	10^{-10}	1
20%	180.3 (0.02%)	6.4461 (3.8%)	11.156 (0.9%)	$5\cdot10^{-12}$	10^{-14}	1

Табл. 4

Результаты численных экспериментов по идентификации жесткостных характеристик $g_{11}^{\text{расч}}$, $g_{22}^{\text{расч}}$, $D_3^{\text{расч}}$ ВКМ в расширенной постановке при различных погрешностях определения критической нагрузки и наличии разброса жесткостных характеристик от образца к образцу

$\delta_{\Delta P}+\delta_{\Delta g}$	$g_{11}^{\text{расч}}$	$g_{22}^{\text{расч}}$	$D_3^{\text{расч}}$	$\sqrt{\delta_P^2}$	n_i, l_i, m_i	k_i
0%	180.25 (0%)	6.2088 (0%)	11.262 (0%)	0	1	1
1%	182.52 (1.2%)	6.0781 (2.1%)	11.523 (2.3%)	$6.83\cdot10^{-5}$	10^{-4}	1
5%	189.31 (5%)	6.1635 (0.7%)	11.663 (3.6%)	$4.51\cdot10^{-8}$	10^{-7}	1
10%	198.35 (10%)	5.8721 (5.4%)	12.241 (8.7%)	$2.78\cdot10^{-4}$	10^{-7}	1
20%	216.43 (20%)	5.4507 (12.2%)	13.255 (17.7%)	$2.72\cdot10^{-4}$	10^{-8}	1

где

$$\delta^2_{\Delta g_{11}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\Delta g_{11}^i\right)^2 \cdot k_i, \quad \delta^2_{\Delta g_{22}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\Delta g_{22}^i\right)^2 \cdot z_i,$$

$$\delta^2_{\Delta D_3} = \sum_{i=1}^{3} \left(\Delta D_3^i\right)^2 \cdot m_i, \quad \delta^2_{\Delta P} = \sum_{i=1}^{3} \Delta P_i^2 \cdot l_i.$$

Расчетные жесткостные характеристики ищем в виде

$$g_{11} = g_{11}^{\text{расч}}(1+\beta_1 \sin(\Delta g_{11}/g_{11})), \quad g_{22} = g_{22}^{\text{расч}}(1+\beta_2 \sin(\Delta g_{22}/g_{22})),$$

$$D_3 = D_3^{\text{расч}}(1+\beta_3 \sin(\Delta D_3/D_3)), \quad g_{11}^{\text{расч}} > 0, \quad g_{22}^{\text{расч}} > 0, \quad D_3^{\text{расч}} > 0.$$

Здесь $\beta_i \sin(\cdot)$ – максимально возможная относительная величина изменения жесткостей ($\beta_i \ll 1$); $z_i,\ l_i,\ m_i,\ k_i$ – нормирующие весовые коэффициенты, $g_{11}^{\text{расч}}$, $g_{22}^{\text{расч}}$, $D_3^{\text{расч}}$, $\Delta g_{11}, \Delta g_{22},\ \Delta D_3$ – искомые параметры. Результаты расчетов представлены в табл. 4, в первом столбце которой приведены погрешности измерения критической нагрузки и изменения жесткостных характеристик от образца к образцу. Анализ этих результатов показывает, что и в этом случае расширение функции цели ведет к регуляризации задачи.

Заключение

Преимущество решения задачи определения механических характеристик методами идентификации на основе анализа данных испытаний на устойчивость оболочечных конструкций заключается в том, что для определения жесткостных характеристик в эксперименте не требуется проводить замеры деформаций или перемещений. Это сильно упрощает и удешевляет эксперимент, уменьшает время его проведения. Кроме того, подобные испытания можно сделать неразрушающими.

На тестовых задачах показано, что при использовании традиционного подхода небольшой от образца к образцу разброс жесткостных характеристик композитной ленты (вызванный, например, процессом изготовления конструкции) и небольшие погрешности измерения критической нагрузки приводят в задаче идентификации к существенному отличию расчетных значений малых жесткостных характеристик от истинных (то есть задача неустойчива к возмущению начальных данных). Таким образом, применение стандартного подхода в реальных задачах идентификации, вероятнее всего, приведет к получению результатов сильно отличающихся (в разы) от истинных.

Путем численных экспериментов показано, что решение задачи в расширенной постановке устойчиво к вариациям исходных данных. Предложенный подход позволяет получить расчетные механические характеристики композитного материала, близкие к истинным даже в случае немалого разброса жесткостных характеристик композитного материала (до 20%) от образца к образцу и большой погрешности (до 20%) определения критической нагрузки.

Благодарности. Результаты исследований получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.5762.2017/ВУ (проект № 9.1395.2017/ПЧ), гранта РФФИ (проект № 19-08-00349) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.12878.2018/12.1.).

Литература

1. *Вольмир А.С* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

2. *Каюмов Р.А.* Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 2. – С. 94–105.

3. *Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Сафиуллин Д.Х.* Моделирование работы оболочек из нелинейно-вязкоупругого композитного материала // Труды Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Н. Новгород, 1994. – Т. 3. – С. 227–235.

4. *Алексеев К.П., Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Терегулов И.Г.* Экспериментальное исследование ползучести композиционных материалов на трубчатых образцах из органопластика // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 2. – С. 199–210.

5. *Giannadakis K., Mannberg P., Joffe R., Varna J.* The sources of inelastic behavior of Glass Fibre/Vinylester non-crimp fabric [±45]s laminates // J. Reinforced Plastics Compos. – 2011. – V. 30, No. 12. – P. 1015–1028. – doi: 10.1177/0731684411412644.

6. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Егоров А.Г., Каюмов Р.А.* Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 3. Идентификация характеристик внутреннего демпфирования // Механика композитных материалов. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 883–902.

7. *Дивеев Б., Бутитер И., Щербина Н.* Идентификация упругих модулей композитных пластин на базе уточненных теорий. Теоретико-экспериментальный подход // Механика композитных материалов. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 207–216.

8. *Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф.* Устойчивость изогнутой тонкой упругой пластины, нагруженной поперечной силой // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2001. – № 4. – С. 12–15.

9. *Каюмов Р.А., Нежданов Р.О., Тазюков Б.Ф.* Определение характеристик волокнистых композитных материалов методами идентификации. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2005. – 258 с.

10. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1998. – 269 с.

11. *Nordin L.O., CityplaceVarna J.* Methodology for parameter identification in nonlinear viscoelastic material model // Mech. Time-Depend. Mater. – 2005. – V. 9, No 4. – P. 57–78. – doi: 10.1007/s11043-005-9000-z.

12. *Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F.* Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – V. 973. – Art. 012006, P. 1–8. – doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012006.

13. *Каюмов Р.А., Терегулов И.Г.* Структура определяющих соотношений для армированных жесткими волокнами наследственно-упругих материалов // Прикл. механика и техн. физика. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 120–128.

Поступила в редакцию
28.11.18

Каюмов Рашит Абдулхакович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики; ведущий научный сотрудник

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *kayumov@rambler.ru*

Тазюков Булат Фэридович, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной деятельности Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *bulat.tazioukov@kpfu.ru*

Мухамедова Инзилия Заудатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
E-mail: *muhamedova-inzilija@mail.ru*

Шакирзянов Фарид Рашитович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
E-mail: *faritbox@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 1, pp. 75–85

doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.75-85

Identification of the Elastic Characteristics of a Composite Material Based on the Results of Tests for the Stability of Panels Made from It

R.A. Kayumov[a,b*], *B.F. Tazyukov*[c**],
I.Z. Muhamedova[a***], *F.R. Shakirzyanov*[a****]

[a]*Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia*
[b]*A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia*
[c]*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
E-mail: **kayumov@rambler.ru*, ***bulat.tazioukov@kpfu.ru*,
****muhamedova-inzilija@mail.ru*, *****faritbox@mail.ru*

Received November 28, 2018

Abstract

The problem of identifying the mechanical characteristics of a fibrous composite material (FCM), from which cylindrical panels or pre-curved plates are made by superposition at an angle to the edge, has been considered. The problem has been solved using the analysis of the results of the tests of structures with bringing them to the loss of bearing capacity due to loss of stability.

The advantage of the proposed approach is no necessity to measure the deformation or movement of these structural elements during experiments (this does not require the presence of complex measuring devices, their calibration, long-term debugging of the experimental techniques). Only the critical values of the load, which can be tested in a short period of time, must be determined. In addition, such tests are not destructive under loading, which enables the repeated use of the sample under different types of load and conditions of fixing. The identification technique is based on minimizing the quadratic discrepancy between the results of solving direct problems of stability and the results of experiments. By introducing the discrepancy of possible errors in experimental data measurement, an extended formulation of the problem has been obtained. Numerical solutions of the model problems show that the solution of the problem is stable to variations of the original data. The proposed approach allows to obtain the calculated mechanical characteristics of the composite material close to true even in the case of a considerable variation in the stiffness characteristics of the composite material from sample to sample and errors in determining the critical load.

Keywords: fiber composite, identification method, minimization, stability, critical load, stiffness characteristics, numerical experiment

Acknowledgments. The study was performed as part of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation no. 9.5762.2017/VU (project no. 9.1395.2017/PCh) and supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-08-00349) and the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities (project no. 1.12878.2018/12.1.).

References

1. Vol'mir A.S. *Ustoichivost' deformiruemykh sistem* [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984 p. (In Russian)

2. Kayumov R.A. The extended problem of identification of mechanical characteristics of materials based on the results of testing of constructions. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2004, no. 2, pp. 94–105. (In Russian)
3. Teregulov I.G., Kayumov R.A., Safiullin D.Kh. Modeling the operation of shells from a nonlinearly viscoelastic composite material. *Tr. Mezhdunar. konf. po teorii obolochek i plastin* [Proc. Int. Conf. on the Theory of Shells and Plates]. Nizhny Novgorod, 1994, vol. 3, pp. 227–235. (In Russian)
4. Alekseev K.P., Kayumov R.A., Mukhamedova I.Z., Teregulov I.G. Experimental study of the creep of composite materials on tubular Plexiglas samples. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2004, vol. 10, no. 2, pp. 199–210. (In Russian)
5. Giannadakis K., Mannberg P., Joffe R., Varna J. The sources of inelastic behavior of Glass Fibre/Vinylester non-crimp fabric [± 45]s laminates. *J. Reinf. Plast. Compos.*, 2011, vol. 30, no. 12, pp. 1015–1028. doi: 10.1177/0731684411412644.
6. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G., Kayumov R.A. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 3. Identification of the characteristics of internal damping. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, no. 5, pp. 633–646. doi: 10.1007/s11029-014-9451-x.
7. Diveyev B., Butiter I., Shcherbina N. Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories. 2. Theoretical-experimental approach. *Mech. Compos. Mater.*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 139–144. doi: 10.1007/s11029-008-9003-3.
8. Kayumov R.A., Tazyukov B.F. Stability of bent thin elastic plate loaded by transverse force. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 2001, no. 4, pp. 12–15. (In Russian)
9. Kayumov R.A., Nezhdanov R.O., Tazyukov B.F. *Opredelenie kharakteristik voloknistykh kompozitnykh materialov metodami identifikatsii* [Determination of Fiber Composite Material Characteristics by the Identification Methods]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2005. 258 p. (In Russian)
10. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1998. 269 p. (In Russian)
11. Nordin L.O., CityplaceVarna J. Methodology for parameter identification in nonlinear viscoelastic material model. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2005, vol. 9, no. 4, pp. 57–78. doi: 10.1007/s11043-005-9000-z.
12. Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, art. 012006, pp. 1–8. doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012006.
13. Kayumov R.A., Teregulov I.G. Structure of the constitutive relations for hereditarily elastic materials reinforced by hard fibers. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 3, pp. 405–411. doi: 10.1007/s10808-005-0090-9.

Для цитирования: *Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф., Мухамедова И.З., Шакирзянов Ф.Р.* Определение жесткостных параметров композитного материала по результатам испытаний панелей на устойчивость // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 1. – С. 75–85. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.75-85.

For citation: Kayumov R.A., Tazyukov B.F., Muhamedova I.Z., Shakirzyanov F.R. Identification of the elastic characteristics of a composite material based on the results of tests for the stability of panels made from it. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 1, pp. 75–85. doi: 10.26907/2541-7746.2019.1.75-85. (In Russian)