

УДК 532.529

## ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВЗВЕСИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЯДУ ЦИЛИНДРОВ: РАСЧЕТ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИЙ ЧАСТИЦ

*О.В. Соловьева*

### Аннотация

Решена задача о течении газозвеси в периодическом ряду цилиндров. В пренебрежении влиянием дисперсной фазы и сжимаемостью несущей среды поле течения газа рассчитано в приближении Стокса с помощью метода коллокаций. Для моделирования движения дисперсной фазы применен полный лагранжев метод, в рамках которого рассчитаны как траектории, так и концентрации взвешенных частиц вдоль них. Исследованы распределения концентрации частиц в окрестности цилиндра и на его поверхности для различных значений параметров ряда цилиндров и дисперсной фазы.

**Ключевые слова:** течение газозвеси, приближение Стокса, периодический ряд цилиндров, концентрация частиц.

### Введение

Аэрозольные волокнистые фильтры широко используются для очистки запыленных воздушных потоков [1–3]. В зависимости от размеров взвешенных в газе частиц и скорости течения газовой фазы доминирует тот или иной механизм осаждения – диффузионное или инерционное осаждение, осаждение за счет зацепления частицы. В процессе работы фильтра на поверхности волокон формируется слой осевших частиц, размер которого с течением времени может сильно увеличиться. Рост этого слоя и, соответственно, изменение размера и формы волокна сказываются на изменении свойств фильтра. В результате начиная с некоторого времени общая эффективность работы фильтра может стать существенно отличной от начальной. Прогнозирование заполнения межпорового пространства осевшими частицами способствует пониманию динамики работы фильтра и оптимальному проектированию типовых аэрозольных фильтров.

Ранее были развиты различные подходы к моделированию роста слоя осевших частиц при обтекании цилиндрических волокон в периодических пористых структурах. В [4, 5] проводится детальное моделирование роста осадка с учетом отдельных частиц, формирующих дендриты на поверхности волокон. Такой подход наиболее достоверно моделирует процессы осаждения частиц в фильтре, но при этом является сложным в реализации и затратным по времени вычислений. В работах [6–9] применяется приближенный подход, в рамках которого осадок от диффузионного оседания частиц рассматривается как непрерывный пористый слой. Для обобщения такого подхода в случае инерционного оседания частиц встает задача определения их концентрации на поверхности элемента фильтра. Постановке и решению такой задачи и посвящена настоящая статья.

Рассматривается течение газозвеси в периодическом ряду цилиндров. Влиянием дисперсной фазы на несущую среду и сжимаемостью газа пренебрегается в силу малости концентрации взвешенных частиц и малых скоростей течения.

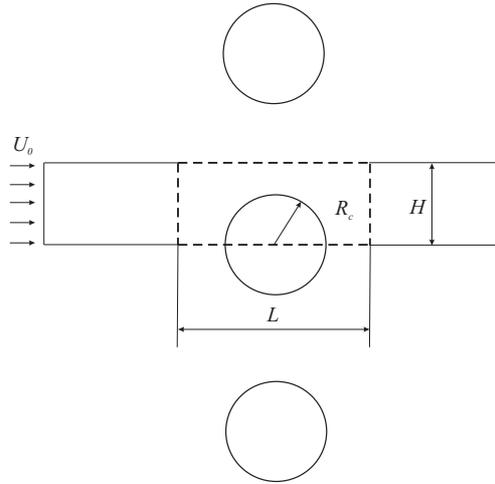


Рис. 1. Схема периодического ряда цилиндров

В приближении Стокса поле скоростей газа рассчитывается методом коллокаций (мультикватратичных функций) [10–12]. Для расчета движения дисперсной фазы частиц применяется полный лагранжев метод А.Н. Осипцова [13–15], в рамках которого рассчитываются как траектории, так и концентрация взвешенных частиц вдоль них. На основе предложенного подхода нами исследованы распределения концентрации частиц в окрестности цилиндра и на его поверхности для различных значений параметров ряда цилиндров и дисперсной фазы.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается обтекание периодического ряда цилиндров радиуса  $R_c$  вязким потоком газа с взвешенными частицами со скоростью  $U_0$  вдали от цилиндра (рис. 1). Соударением частиц и влиянием на газовый поток пренебрегается в силу малости их концентрации. Плотность  $\alpha$  ряда цилиндров с периодической областью высотой  $H$  и длиной  $L = 2H$  может быть выражена в виде

$$\alpha = \frac{\pi}{4h^2}, \quad (1)$$

где  $h = H/R_c$ .

Движение несущей среды вокруг цилиндра при малых числах Рейнольдса в приближении течения Стокса описывается бигармоническим уравнением для функции тока  $\psi$  [16]:

$$\Delta^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Компоненты скорости  $u_x, u_y$  газа и завихренность  $\omega$  выражаются через функцию тока по формулам

$$u_x(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega(x, y) = -\Delta \psi. \quad (3)$$

Краевая задача для уравнения (2) формулируется в безразмерном виде, в качестве масштабов длины и скорости приняты радиус  $R_c$  цилиндра и скорость  $U_0$ . Расчетная область представляет собой прямоугольную полосу, включающую в себя периодическую зону ряда цилиндров (рис. 2). Вдали от цилиндра на границах  $AE$

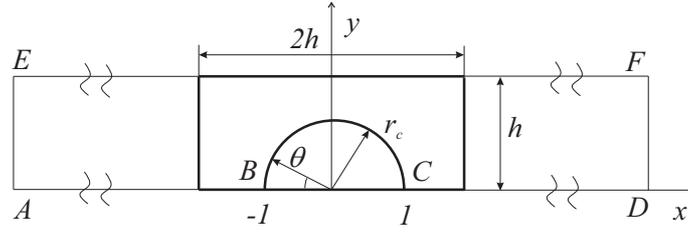


Рис. 2. Расчетная область

и  $FD$  для равномерного плоскопараллельного потока компоненты скорости равны  $u_x = 1$  и  $u_y = 0$ , что соответствует условиям

$$\psi = y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

На поверхности цилиндра задаются условия прилипания

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (5)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе. На границе  $EF$  запишем условия симметрии в виде

$$\psi = h, \quad \omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Потребуем также, чтобы участки  $AB$  и  $CD$  являлись линиями тока

$$\psi = 0, \quad \omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

В приближении стоксового аэродинамического сопротивления безразмерные уравнения движения взвешенной частицы записываются в виде:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{u_x - v_x}{St}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{u_y - v_y}{St}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad (8)$$

где  $v_x, v_y$  – компоненты скорости частицы,  $St = U_0 \tau / R_c$  – число Стокса,  $\tau = \rho_p d_p^2 / 18\mu$  – время релаксации сферической частицы,  $\rho_p$  – плотность частицы,  $d_p$  – диаметр частицы,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости газа.

Для определения поля концентраций частиц применим полный лагранжев метод, развитый в работах [13, 14]. Уравнения движения частиц дополняются уравнениями для компонент  $J_{ij}$  якобиана преобразования эйлеровых переменных к лагранжевым и дополнительных переменных  $\omega_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{11}}{dt} &= \omega_{11}, & \frac{dJ_{12}}{dt} &= \omega_{12}, & \frac{dJ_{21}}{dt} &= \omega_{21}, & \frac{dJ_{22}}{dt} &= \omega_{22}, \\ \frac{d\omega_{11}}{dt} &= \frac{1}{St} \left( J_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + J_{21} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega_{11} \right), \\ \frac{d\omega_{12}}{dt} &= \frac{1}{St} \left( J_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + J_{22} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega_{12} \right), \\ \frac{d\omega_{21}}{dt} &= \frac{1}{St} \left( J_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + J_{21} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega_{21} \right), \\ \frac{d\omega_{22}}{dt} &= \frac{1}{St} \left( J_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + J_{22} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega_{22} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Начальные условия для системы уравнений (8)–(9) при  $t = 0$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_x &= 1, \quad v_y = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \\ J_{11} &= J_{22} = 1, \quad J_{12} = J_{21} = 0, \\ \omega_{11} &= \omega_{12} = \omega_{21} = \omega_{22} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение задачи Коши (8)–(10) позволяет определить  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $J_{ij}$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $j = 1, 2$ , вдоль траектории частицы. Концентрация частиц в произвольной точке траектории находится из уравнения неразрывности для дисперсной фазы в лагранжевой постановке [17]

$$c_p(x, y, t) \det \|J_{ij}\| = c_p(x_0, y_0, 0). \quad (11)$$

## 2. Метод решения и результаты расчетов

Для определения функции тока  $\psi(x, y)$  воспользуемся методом коллокаций на основе мультиквадратичных функций (MQ-метод) [10]. Использование MQ-метода для расчета течения несущей фазы, в отличие от метода конечных разностей, позволяет получить аналитически непрерывные функции первых и вторых производных компонент скорости частиц, что обеспечивает высокую точность расчета концентрации частиц полным лагранжевым методом. Метод MQ, примененный к решению краевой задачи для функции тока течения  $\psi$ , подробно описан в работе [18]. В расчетной области функция тока течения  $\psi$  аппроксимируется взвешенной суммой набора базисных функций

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j r_j(x, y), \quad (12)$$

где  $r_j(x, y) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2}$  – базисные функции,  $x_j, y_j$  – базисные точки,  $\alpha_j$  – неизвестные весовые коэффициенты,  $c$  – параметр MQ-метода. Подставляя функцию (12) в уравнение (2) и граничные условия (4)–(7), получим систему алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов  $\alpha_j$ . Отыскав из указанной системы уравнений величины  $\alpha_j$ , по формуле (12) определим искомую функцию  $\psi(x, y)$ . Компоненты скорости  $u_x$  и  $u_y$  несущей среды запишутся через функцию тока согласно (3). В найденном поле течения несущей среды рассчитываются траектории и концентрация частиц на основе численного интегрирования системы уравнений (8)–(9) методом Гира [19].

Схема периодической области и базисные точки со сгущением вблизи поверхности цилиндра, а также пример рассчитанных линий тока для  $\alpha = 0.05$  приведены на рис. 3.

Для тестирования предложенного метода расчета концентраций рассчитана эффективность  $E$  осаждения аэрозольных частиц на цилиндре на основе метода предельных траекторий и по значениям концентраций на цилиндре. В традиционном методе предельных траекторий вдали от цилиндра стартует множество траекторий с начальной ординатой в пределах миделева сечения цилиндра. Частица, попадающая на поверхность цилиндра, считается осевшей. Эффективность  $E$  осаждения частицы определяется как отношение числа осевших частиц к общему числу стартовавших. В случае известного распределения концентрации  $c_{ps}(x_s(\theta), y_s(\theta))$  частиц на поверхности цилиндра величина  $E$  может быть найдена по формуле

$$E = \int_0^{\theta^*} c_p(x_s(\theta), y_s(\theta)) v_n(x_s(\theta), y_s(\theta)) d\theta, \quad (13)$$

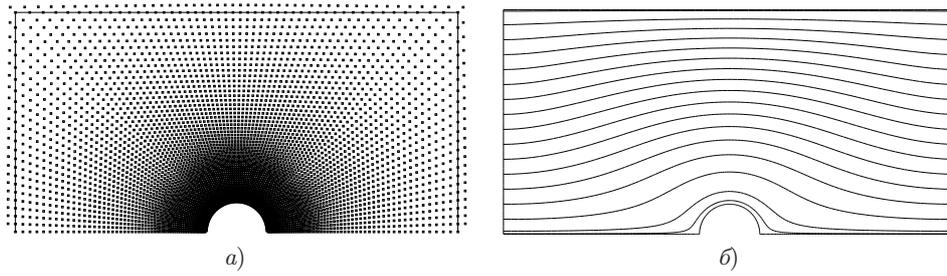
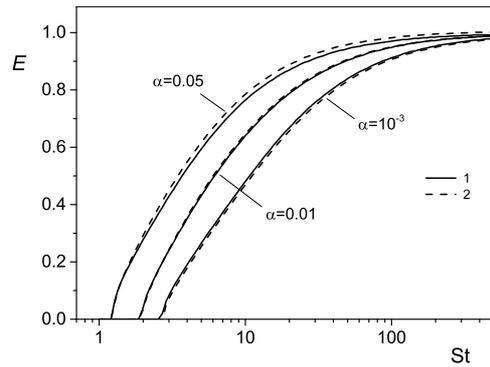
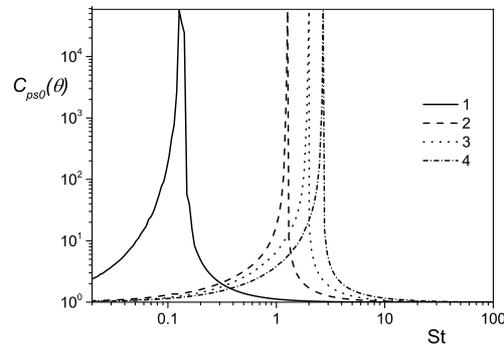
Рис. 3. Периодическая область (а) и линии тока (б) течения несущей среды при  $\alpha = 0.05$ 

Рис. 4. Эффективность захвата аэрозольных частиц: 1 – метод определения предельной траектории, 2 – формула (13)

Рис. 5. Зависимость  $c_p(\theta)$  при  $St = 5.5$ . Кривая 1 соответствует модели потенциального течения для свободного цилиндра при  $\alpha = 0$ , кривые 2–4 – значениям  $\alpha = 0.05, 0.01, 10^{-3}$ 

где  $v_n$  – нормальная компонента скорости частицы,  $(x_s(\theta), y_s(\theta))$  – координаты текущей точки поверхности цилиндра.

Зависимости  $E(St)$  для трех значений плотности упаковки цилиндров  $\alpha = 0.001, 0.01, 0.05$ , рассчитанные методом предельных траекторий (сплошные кривые) и по формуле (13) (штриховые кривые) приведены на рис. 4. Наблюдается хорошее согласование кривых, полученных на основе этих двух подходов, что подтверждает высокую точность расчета концентраций частиц на поверхности цилиндра.

На рис. 5 приведены графики зависимости концентрации  $c_{ps0}$  частиц на поверхности цилиндра при  $\theta = 0$  от числа Стокса для моделей течения Стокса

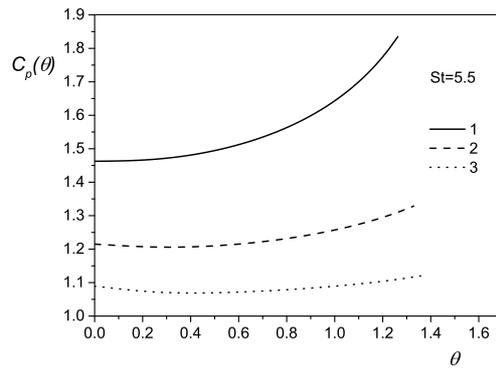


Рис. 6. Зависимость  $c_{ps0}$  при  $St = 5.5$ . Кривые 1–3 соответствуют значениям  $\alpha = 10^{-3}$ , 0.01, 0.05

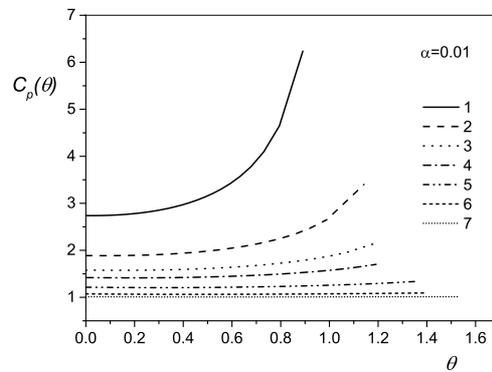


Рис. 7. Зависимость  $c_{ps0}$  при  $\alpha = 0.01$ . Кривые 1–7 соответствуют  $St = 2.5, 3, 3.5, 4, 5.5, 10, 30$

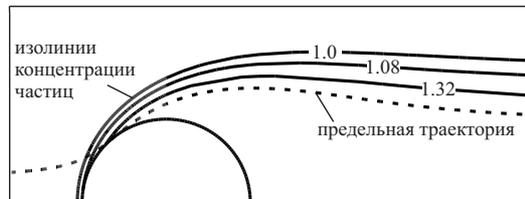


Рис. 8. Распределение концентрации  $c_p(x, y)$  частиц в окрестности цилиндра для потенциального обтекания свободного цилиндра при  $\alpha = 0$ ,  $St = 0.75$

и потенциального обтекания свободного цилиндра. С увеличением числа Стокса наблюдается рост концентрации  $c_{ps0}$  частиц. При некотором критическом числе Стокса частицы начинают оседать на поверхности цилиндра, и неограниченный рост концентрации сменяется падением. Значение критического числа Стокса для модели потенциального обтекания цилиндра соответствует теоретической величине  $St = 0.125$ , найденной из аналитического решения уравнения движения частиц на оси симметрии [21].

Результаты параметрических исследований распределения концентрации частиц на поверхности и в окрестности цилиндра для различных  $\alpha$  и  $St$  представлены на рис. 6–9.

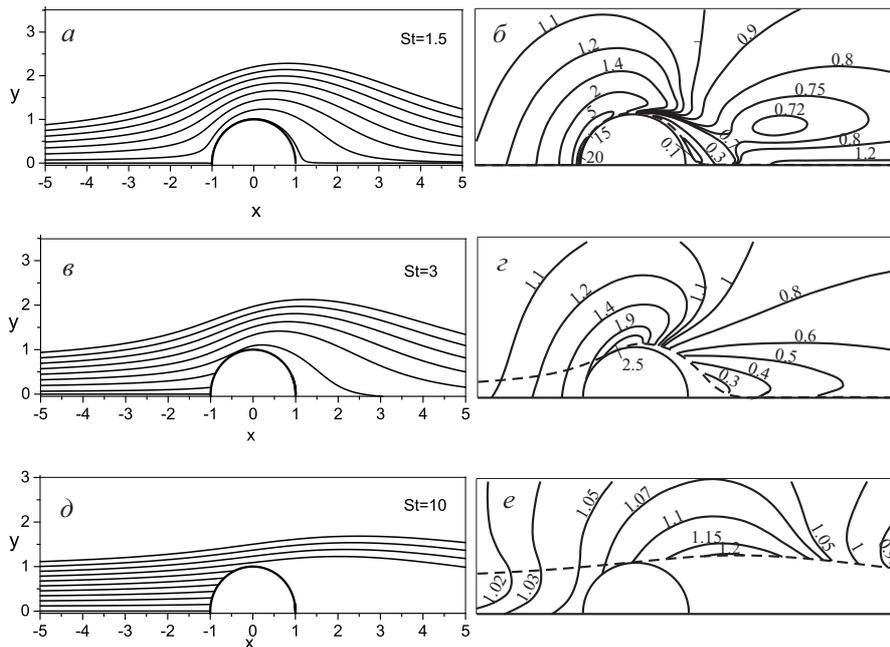


Рис. 9. Траектории частиц ( $a$ ,  $b$ ,  $d$ ) и распределения концентраций  $c_p(x, y)$  частиц ( $b$ ,  $z$ ,  $e$ ) в окрестности цилиндра:  $a$ ,  $b$  –  $St = 1.5$ ,  $b$ ,  $z$  –  $St = 3$ ,  $d$ ,  $e$  –  $St = 10$

На рис. 6 приведена зависимость  $c_p(\theta)$  при различной плотности упаковки для  $St = 5.5$ . При малой плотности упаковки ( $\alpha = 0.001$ ) минимальная концентрация частиц наблюдается в передней точке цилиндра при  $\theta = 0$ . С ростом  $\theta$  концентрация растет, что характерно для обтекания свободного цилиндра газозвесью [20]. Вместе с тем видно, что для  $\alpha = 0.01, 0.05$  зависимость  $c_p(\theta)$  является немонотонной. Незначительное падение концентрации сменяется ростом. Представление о зависимости  $c_p(\theta)$  с изменением числа Стокса дает рис. 7, на котором приведены графики  $c_p(\theta)$  для чисел Стокса, при которых величина  $E(St)$  не равна нулю. С ростом числа Стокса распределение  $c_p(\theta)$  выравнивается и стремится к значению  $c = 1$ .

Поля концентрации частиц в окрестности цилиндра в виде изолиний представлены на рис. 8–9. Штриховой линией показана предельная траектория, разделяющая поток оседаемых частиц. Рис. 8 соответствует потенциальной модели обтекания свободного цилиндра. В этом случае наблюдается типичная картина возмущений концентрации частиц в окрестности цилиндра [15]. Изолинии, начинающиеся на поверхности цилиндра, уходят на бесконечность по потоку. Во всей области концентрация частиц принимает значения, большие начальной [21].

В случае стоксовой модели вязкого обтекания цилиндра картина изолиний концентраций частиц заметно отличается (рис. 9). В отличие от случая потенциального обтекания, концентрация частиц в окрестности цилиндра может быть как больше, так и меньше начальной концентрации, равной единице. Высокие значения концентраций частиц наблюдаются перед цилиндром. При  $St = 1.5$ , когда частицы не оседают, наблюдается сильный рост концентрации частиц перед цилиндром. Поток несущей среды тормозится, и перед цилиндром его скорость минимальна. Попавшие в эту область слабо инерционные частицы также затормаживаются и начинают очень медленно двигаться вдоль границы цилиндра. Попадание новых частиц в эту зону приводит к их накоплению и росту величины  $c_p(x, y)$ .

При увеличении числа Стокса ( $St = 3, 10$ ) участок с повышенной концентрацией частиц начинает смещаться от цилиндра вниз по потоку газа. В то же время за цилиндром наблюдаются зоны со значениями концентрации частиц, меньшими начального значения в невозмущенном потоке. Такие значения концентраций обусловлены разрежением траекторий частиц в этих зонах за цилиндром (рис. 9,  $d, e$ ).

### Выводы

Решена задача об обтекании периодического ряда цилиндров потоком газозвеси. На основе полного лагранжевого подхода рассчитаны распределения концентраций частиц в окрестности цилиндра и на его поверхности. Рассмотренная методика расчета может быть использована для определения инерционного оседания взвешенных частиц в аэрозольных фильтрах с учетом формирования оседаемого слоя.

Автор выражает благодарность доценту кафедры аэрогидромеханики КФУ Р.Ф. Марданову за предоставленную программу расчета течения несущей среды MQ-методом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-06135, 14-01-31118) и гранта Президента РФ МК-6235.2015.1.

### Summary

*O. V. Soloveva.* Gas Suspension Flow in a Periodic Row of Cylinders: Calculation of Particle Concentration Fields.

The problem of the flow of a gas suspension in a periodic row of cylinders is solved. The gas flow field is calculated in the Stokes approximation by the method of collocations neglecting the influence exercised by the dispersed phase and compressibility of the carrier medium. To simulate the dispersed phase movement, the full Lagrangian method is used, within which the trajectories and concentration of suspended particles along them are calculated. The distribution of particle concentration in the vicinity of the cylinder and on its surface for different values of parameters of the row of cylinders and the dispersed phase are studied.

**Keywords:** gas suspension flow, Stokes approximation, periodic row of cylinders, concentration of particles.

### Литература

1. *Brown R.C.* Air filtration: An integrated approach to the theory and applications of fibrous filters. – Oxford: Pergamon Press, 1993. – 272 p.
2. *Hinds W.C.* Aerosol technology: Properties, behavior, and measurement of airborne particles. – Wiley-Interscience, 1999. – 504 p.
3. *Кири А.А., Будыка А.К., Кири В.А.* Фильтрация аэрозолей волокнистыми материалами ФП // Рос.хим. журн. (ЖРХО им. Д.И. Менделеева). – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 97–102.
4. *Przekop R., Moskal A., Gradon L.* Lattice-Boltzmann approach for description of the structure of deposited particulate matter in fibrous filters // J. Aerosol Sci. – 2003. – V. 34, No 2. – P. 133–147.
5. *Kasper G., Schollmeier S., Meyer J.* Structure and density of deposits formed on filter fibers by inertial particle deposition and bounce // J. Aerosol Sci. – 2010. – V. 41, No 12. – P. 1167–1182.

6. *Dunnett S.J., Clement C.F.* A numerical study of the effects of loading from diffusive deposition on the efficiency of fibrous filters // *J. Aerosol Sci.* – 2006. – V. 37, No 9. – P. 1116–1139.
7. *Dunnett S.J., Clement C.F.* A numerical model of fibrous filters containing deposit // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2009. – V. 33, No 5. – P. 601–610.
8. *Kirsh V.A.* Porous-fiber aerosol filters: deposition of inertialless particles in model filters // *Colloid J.* – 1997. – V. 59, No 2. – P. 264–265.
9. *Kirsh V.A.* Deposition of aerosol nanoparticles in filters composed of fibers with porous shells // *Colloid J.* – 2007. – V. 69, No 5. – P. 615–619.
10. *Young D., Jane S., Lin C., Chiu C., Chen K.* Solutions of 2d and 3d stokes laws using multiquadrics method // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2004. – V. 28, No 10. – P. 1233–1243.
11. *Chantasiriwan S.* Solutions to harmonic and biharmonic problems with discontinuous boundary conditions by collocation methods using multiquadrics as basis functions // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* – 2007. – V. 34, No 3. – P. 313–320.
12. *Kutanaei S. S., Roshan N., Vosoughi A., Saghaei S., Barari A., Soleimani S.* Numerical solution of stokes flow in a circular cavity using mesh-free local rbf-dq // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2012. – V. 36, No 5. – P. 633–638.
13. *Osiptsov A.N.* Modified Lagrangian method for calculating the particle concentration in dusty-gas flows with intersecting particles trajectories // *Proc. 3d Int. Conf. Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France.* – 1998. – P. 236.
14. *Osiptsov A.N.* Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // *Astrophys. Space Sci.* – 2000. – V. 274, No 1. – P. 377–386.
15. *Healy D.P., Young J.B.* Full Lagrangian methods for calculating particle concentration fields in dilute gas-particle flows // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2005. – V. 461. – P. 2197–2225.
16. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
17. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
18. *Зарипов Ш.Х., Марданов Р.Ф.* Решение задачи Стокса в приближении бигармонического уравнения методом мультиквадратичных функций // *Обратные краевые задачи и их приложения: Материалы конференции (г. Казань, 20–24 окт., 2014 г.).* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
19. *Gear C.W.* The automatic integration of ordinary differential equations // *Commun. ACM.* – 1971. – V. 14, No 3. – P. 176–179.
20. *Wessel R.A., Righi J.* Generalized correlations for inertial impaction of particles on a circular cylinder // *Aerosol Sci. Technol.* – 1988. – V. 9, No 1. – P. 29–60.
21. *Волощук В.М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. – Л.: Гидрометеоздат, 1971. – 208 с.

Поступила в редакцию  
07.09.15

---

**Соловьева Ольга Викторовна** – младший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет; старший преподаватель кафедры «Теоретические основы теплотехники», Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [rara\\_avis86@mail.ru](mailto:rara_avis86@mail.ru)