УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 354–363 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.62

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

А.А. Самсонов, П.С. Соловьёв, С.И. Соловьёв

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Изучается положительно определенная дифференциальная задача на собственные значения с коэффициентами, нелинейно зависящими от спектрального параметра. Дифференциальная задача формулируется как вариационная задача на собственные значения в гильбертовом пространстве с билинейными формами, нелинейно зависящими от спектрального параметра. Вариационная задача имеет последовательность положительных простых собственных значений, которым соответствует последовательность нормированных собственных функций. Вариационная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке с лагранжевыми конечными элементами произвольного порядка. Устанавливаются оценки погрешности приближенных собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки и величины собственного значения. Полученные результаты являются обобщением хорошо известных результатов для дифференциальных задач на собственные значения с линейной зависимостью от спектрального параметра.

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, задача на собственные значения, сеточная аппроксимация, метод конечных элементов

Введение

В настоящей работе исследуется положительно определенная дифференциальная задача на собственные значения $-(p(\lambda,x)u'(x))' + q(\lambda,x)u(x) = \lambda r(\lambda,x)u(x)$, $\lambda \in (0,\infty)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$, с заданными коэффициентами $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $r(\mu,x)$, $\mu \in (0,\infty)$, $x \in [0,1]$. При фиксированном $x \in [0,1]$ функции $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $\mu \in (0,\infty)$, являются невозрастающими, а функция $r(\mu,x)$, $\mu \in (0,\infty)$, – неубывающей. Дифференциальная задача эквивалентна вариационной задаче на собственные значения: $\lambda \in (0,\infty)$, $u \in V \setminus \{0\}$, $a(\lambda,u,v) = \lambda b(\lambda,u,v)$ для любой функции $v \in V$. Здесь $V = \{v : \ v \in W_2^1(0,1),\ v(0) = v(1) = 0\}$ – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_1$. Эта задача, согласно работе [1], имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений λ_k, $k = 1,2,\ldots$, с предельной точкой на бесконечности, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Последовательности собственных значений соответствует система нормированных собственных функций u_k, $k = 1,2,\ldots$

Вариационная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов: $\lambda^h \in (0,\infty)$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$, $a(\lambda^h,u^h,v^h) = \lambda^h b(\lambda^h,u^h,v^h)$ для любой функции $v^h \in V_h$. Здесь V_h – пространство лагранжевых конечных элементов порядка n. При достаточно малых h сеточная задача на собственные значения имеет $N_h = \dim V_h$ положительных простых собственных значений λ_k^h, $k = 1,2,\ldots,N_h$, $0 < \lambda_1^h < \lambda_2^h < \cdots < \lambda_{N_h}^h$. Собственным значениям

$\lambda_k^h,\ k=1,2,\ldots,N_h$, соответствует система нормированных собственных функций $u_k^h,\ k=1,2,\ldots,N_h$. Для достаточно малых h установлены оценки погрешности

$$0\le\lambda_k^h-\lambda_k\le ch^{2n}\lambda_k^{n+1},\quad |u_k^h-u_k|_1\le ch^n\lambda_k^{(n+1)/2},$$

где c – постоянная, не зависящая от h и λ_k, знаки нормированных собственных функций u_k^h и u_k выбраны согласно условию $b(\lambda_k,u_k^h,u_k)>0,\ b(\lambda_k^h,u_k^h,u_k^h)=1$, $b(\lambda_k,u_k,u_k)=1$.

Нелинейные задачи на собственные значения возникают в различных областях науки и техники, например в физике плазмы, в механике конструкций, в численных алгоритмах решения сеточных уравнений, в теории диэлектрических волноводов [1–5]. Вычислительные методы решения нелинейных матричных задач на собственные значения исследовались в работе [5]. Для нелинейных дифференциальных спектральных задач метод конечных элементов исследовался в [6], а влияние численного интегрирования в схемах метода конечных элементов изучалось в [1, 7, 8] с помощью работ [9–12]. Исследование погрешности приближенных методов решения нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве проведено в работах [13] и основано на использовании общих результатов в линейном случае [14–16]. В работах [17–23] исследовались приближенные методы решения прикладных нелинейных краевых задач и вариационных неравенств.

1. Вариационная постановка задачи

Пусть $\Omega=(0,1),\ \overline{\Omega}=[0,1],\ G$ – интервал числовой оси $\mathbb{R},\ \Lambda=(0,\infty)$. Обозначим, как обычно, через $L_2(G)$ и $W_2^m(G)$ соответственно вещественное пространство Лебега и вещественное пространство Соболева с нормами

$$|u|_{0,G}=\left(\int\limits_G(u(x))^2\,dx\right)^{1/2},\quad \|u\|_{m,G}=\left(\sum_{i=0}^m|u|_{i,G}^2\right)^{1/2}$$

и полунормами $|u|_{i,G}=|u^{(i)}|_{0,G},\ i=0,1,\ldots,m$, где $u^{(i)}=d^iu(x)/dx^i,\ i=1,2,\ldots,m,\ u^{(0)}=u,\ m$ – целое положительное число. При этом положим $W_2^0(G)=L_2(G)$. Если $G=\Omega$, то для краткости при записи норм и полунорм индекс области будем опускать.

Зададим бесконечное число раз непрерывно дифференцируемые функции $p(\mu,x),\ q(\mu,x),\ r(\mu,x),\ \mu\in\Lambda,\ x\in\overline{\Omega}$. Предположим, что функции $p(\mu,x),\ r(\mu,x)$, $\mu\in\Lambda,\ x\in\overline{\Omega}$, положительные, функция $q(\mu,x),\ \mu\in\Lambda,\ x\in\overline{\Omega}$, неотрицательная. При фиксированном $x\in\overline{\Omega}$ функции $p(\mu,x),\ q(\mu,x),\ \mu\in\Lambda$, являются невозрастающими, а функция $r(\mu,x),\ \mu\in\Lambda$, – неубывающей. Предположим, что существуют положительные постоянные $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ q_2,\ q_3,\ r_1,\ r_2,\ r_3$ такие, что

$$p_1\le p(\mu,x)\le p_2,\quad 0\le q(\mu,x)\le q_2,\quad r_1\le r(\mu,x)\le r_2,$$
$$\left|\frac{\partial p(\mu,x)}{\partial\mu}\right|\le p_3,\quad \left|\frac{\partial q(\mu,x)}{\partial\mu}\right|\le q_3,\quad \left|\frac{\partial r(\mu,x)}{\partial\mu}\right|\le r_3,$$
$$\left|\frac{\partial^i p(\mu,x)}{\partial x^i}\right|\le p_4,\quad \left|\frac{\partial^i q(\mu,x)}{\partial x^i}\right|\le q_4,\quad \left|\frac{\partial^i r(\mu,x)}{\partial x^i}\right|\le r_4,$$

для любых $\mu\in\Lambda,\ x\in\overline{\Omega},\ i=1,2,\ldots$

Рассмотрим дифференциальную задачу на собственные значения: найти числа $\lambda\in\Lambda$ и ненулевые функции $u(x),\ x\in\overline{\Omega}$, такие, что

$$-(p(\lambda,x)u'(x))'+q(\lambda,x)u(x)=\lambda r(\lambda,x)u(x),\quad x\in\Omega,$$

$$u(0)=u(1)=0.$$

Введем гильбертово пространство $V = \{v:\ v \in W_2^1(\Omega),\ v(0) = v(1) = 0\}$ с нормой $|\cdot|_1$. Нетрудно убедиться, что выполняется неравенство Фридрихса $|v|_0 \le |v|_1$ для любой функции $v \in V$. Для $\mu \in \Lambda,\ u, v \in V$ определим билинейные формы

$$a(\mu, u, v) = \int\limits_0^1 (p(\mu, x)u'v' + q(\mu, x)uv)\,dx, \quad b(\mu, u, v) = \int\limits_0^1 r(\mu, x)uv\,dx.$$

Сформулируем обобщенную постановку дифференциальной задачи на собственные значения: найти $\lambda \in \Lambda,\ u \in V \setminus \{0\}$, такие, что

$$a(\lambda, u, v) = \lambda b(\lambda, u, v) \quad \forall\, v \in V. \tag{1}$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения при фиксированном $\mu \in \Lambda$: найти функции $\gamma = \gamma(\mu) \in \Lambda,\ y = y(\mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\mu, y, v) = \gamma b(\mu, y, v) \quad \forall\, v \in V. \tag{2}$$

Согласно [24], задача (2) имеет последовательность положительных простых собственных значений $\gamma_k = \gamma_k(\mu),\ k = 1, 2, \ldots,$ занумерованных по возрастанию: $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_k < \cdots,\ \gamma_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных функций $y_k = y_k(\mu),\ k = 1, 2, \ldots,$ такая, что $a(\mu, y_i, y_j) = \gamma_i\delta_{ij},\ b(\mu, y_i, y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Функции $y_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ образуют полную систему в пространстве V. Имеют место неравенства $\gamma_k(\mu) \ge \gamma_k(\eta)$ при $\mu < \eta,\ \mu, \eta \in \Lambda$.

Лемма 1. *Для любых функций $v \in V$ и любых чисел $\mu, \eta \in \Lambda$ справедливы следующие соотношения:*

$$\alpha_1|v|_1^2 \le a(\mu, v, v) \le \alpha_2|v|_1^2, \quad |a(\mu, v, v) - a(\eta, v, v)| \le \alpha_3|\mu - \eta|\,|v|_1^2,$$

$$\beta_1|v|_0^2 \le b(\mu, v, v) \le \beta_2|v|_0^2, \quad |b(\mu, v, v) - b(\eta, v, v)| \le \beta_3|\mu - \eta|\,|v|_0^2,$$

где $\alpha_1 = p_1,\ \alpha_2 = p_2 + q_2,\ \beta_1 = r_1,\ \beta_2 = r_2,\ \alpha_3 = p_3 + q_3,\ \beta_3 = r_3$.

Доказательство. Требуемые неравенства вытекают из определений билинейных форм и свойств коэффициентов задачи. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет последовательность положительных простых собственных значений $\lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ занумерованных по возрастанию: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots,\ \lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Каждое собственное значение $\lambda_i,\ i \ge 1$, является единственным корнем уравнения $\mu - \gamma_i(\mu) = 0,\ \mu \in \Lambda,\quad i \ge 1$. Последовательности собственных значений $\lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ соответствует последовательность собственных функций $u_k,\ k = 1, 2, \ldots$ Собственная функция u_k совпадает с собственной функцией y_k, соответствующей собственному значению $\gamma_k(\mu)$, линейной параметрической задачи на собственные значения* (2) *при $\mu = \lambda_k$. Собственные функции $u_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ являются бесконечное число раз непрерывно дифференцируемыми и выполняются оценки $|u_k|_i \le s_i\lambda_k^{i/2},\ k = 1, 2, \ldots,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$ где постоянные $s_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$ не зависят от λ_k, $k = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится с помощью результатов из [1, 13, 24]. Теорема доказана. □

2. Сеточная аппроксимация задачи

Разобьем отрезок $\overline{\Omega}$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, m$, на элементы $e_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $h = 1/m$. Обозначим через V_h пространство лагранжевых конечных элементов, состоящее из непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций v^h, являющихся полиномами степени не выше n на каждом элементе e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, $v^h(0) = v^h(1) = 0$, $N_h = \dim V_h = mn - 1$.

Вариационная задача (1) аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов: найти $\lambda^h \in \Lambda$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\lambda^h, u^h, v^h) = \lambda^h b(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{3}$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения при фиксированном $\mu \in \Lambda$: найти функции $\gamma^h = \gamma^h(\mu) \in \Lambda$, $y^h = y^h(\mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\mu, y^h, v^h) = \gamma^h b(\mu, y^h, v^h) \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{4}$$

Задача (4) имеет N_h положительных простых собственных значений $\gamma_k^h = \gamma_k^h(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, занумерованных по возрастанию: $0 < \gamma_1^h < \gamma_2^h < \cdots < \gamma_{N_h}^h$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных функций $y_k^h = y_k^h(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, такая, что $a(\mu, y_i^h, y_j^h) = \gamma_i^h \delta_{ij}$, $b(\mu, y_i^h, y_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N_h$. Функции y_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, образуют полную систему в пространстве V_h. Выполняются неравенства $\gamma_k^h(\mu) \geq \gamma_k^h(\eta)$ при $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$.

Теорема 2. *Задача* (3) *имеет* N_h *положительных простых собственных значений* λ_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, *занумерованных по возрастанию:* $0 < \lambda_1^h < \lambda_2^h < \cdots < \lambda_{N_h}^h$. *Каждое собственное значение* λ_i^h, $i \geq 1$, *является единственным корнем уравнения* $\mu - \gamma_i^h(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$, $i \geq 1$. *Собственным значениям* λ_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, *соответствуют собственные функции* u_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$. *Собственная функция* u_k^h *совпадает с собственной функцией* y_k^h, *соответствующей собственному значению* $\gamma_k^h(\mu)$, *линейной параметрической задачи на собственные значения* (4) *при* $\mu = \lambda_k^h$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 с учетом конечномерности задач (3) и (4). Теорема доказана. □

3. Исследование погрешности сеточной схемы

Пусть u_k – собственная функция задачи (1), соответствующая собственному значению λ_k, u_k^h – собственная функция задачи (3), соответствующая собственному значению λ_k^h. Через c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от h и λ_k.

Для $\mu \in \Lambda$ введем оператор ортогонального проектирования $P_h(\mu): \ V \to V_h$ по формуле $a(\mu, u - P_h(\mu)u, v^h) = 0$ для любых $v^h \in V_h$, где $u \in V$. Обозначим $P_h = P_h(\lambda_k)$.

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки погрешности ортогонального проектирования:*

$$|u_k - P_h u_k|_i \leq c h^{n+1-i} \lambda_k^{(n+1)/2}, \quad i = 0, 1.$$

Доказательство. Оценки погрешности леммы устанавливаются с помощью результатов [25]. Лемма доказана. □

Теорема 3. *Для достаточно малых* h *имеет место оценка погрешности*

$$0 \leq \lambda_k^h - \lambda_k \leq c h^{2n} \lambda_k^{n+1}.$$

Доказательство. Требуемая оценка вытекает из соотношений

$$0 \le \lambda_k^h - \lambda_k = \gamma_k^h(\lambda_k^h) - \gamma_k(\lambda_k) \le \gamma_k^h(\lambda_k) - \gamma_k(\lambda_k),$$

оценки погрешности приближенных собственных значений для линейной задачи на собственные значения [12], лемм 1 и 2. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Для достаточно малых h выполняется оценка погрешности*

$$|u_k^h - u_k|_1 \le ch^n \lambda_k^{(n+1)/2},$$

где $b(\lambda_k, u_k^h, u_k) > 0,\ b(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = 1,\ b(\lambda_k, u_k, u_k) = 1.$

Доказательство. Положим $\beta_i^h = b(\lambda_k^h, P_h u_k, y_i^h),\ i = 1, 2, \ldots, N_h$, где y_i^h, $i = 1, 2, \ldots, N_h$, – собственные функции задачи (4) при $\mu = \lambda_k^h$, $b(\lambda_k, u_k, u_k) = 1$. Заметим, что $y_k^h = u_k^h$. Поскольку функции y_i^h, $i = 1, 2, \ldots, N_h$, образуют ортонормированный базис в пространстве V_h, то элемент $P_h u_k \in V_h$ можно представить в виде разложения $P_h u_k = \beta_k^h u_k^h + v_k^h + w_k^h$, где

$$v_k^h = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^h y_i^h, \quad w_k^h = \sum_{i=k+1}^{N_h} \beta_i^h y_i^h.$$

Положим

$$\xi_k^h = \sup_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(\lambda_k^h, P_h u_k, v^h) - \lambda_k b(\lambda_k^h, P_h u_k, v^h)|}{|v^h|_1}.$$

Имеет место оценка $\xi_k^h \le ch^{n+1} \lambda_k^{(n+3)/2}$.

Для $k \ge 1$ и $\lambda_0 = 0$ обозначим

$$\rho_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}.$$

Из теоремы 3 получаем сходимость $\lambda_i^h \to \lambda_i$ при $h \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$. Следовательно, для достаточно малых h выполняются неравенства $\lambda_k - \lambda_{k-1}^h > 0$, $\lambda_{k+1}^h - \lambda_k > 0$, где $k \ge 1$, $\lambda_0^h = 0$, и для некоторой положительной постоянной c справедливы соотношения

$$\frac{\lambda_{k-1}^h}{\lambda_k - \lambda_{k-1}^h} \le c\rho_k, \quad \frac{\lambda_{k+1}^h}{\lambda_{k+1}^h - \lambda_k} \le c\rho_k.$$

Для $k \ge 1$ докажем оценку $|v_k^h|_1 \le c\rho_k \xi_k^h$. Эта оценка при $k = 1$ выполняется тривиально. Пусть $k \ge 2$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$a(\lambda_k^h, P_h u_k, v_k^h) = a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h), \quad b(\lambda_k^h, P_h u_k, v_k^h) = b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h),$$

$$a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \le \lambda_{k-1}^h b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h).$$

Таким образом, получаем цепочку неравенств

$$|v_k^h|_1\, \xi_k^h \ge -a(\lambda_k^h, P_h u_k, v_k^h) + \lambda_k b(\lambda_k^h, P_h u_k, v_k^h) = -a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) + \lambda_k b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \ge$$
$$\ge (\lambda_k - \lambda_{k-1}^h) b(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \ge \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}^h}{\lambda_{k-1}^h}\, a(\lambda_k^h, v_k^h, v_k^h) \ge \frac{1}{c\rho_k}\, |v_k^h|_1^2, \quad k \ge 2,$$

откуда вытекает требуемая оценка.

Для $k \geq 1$ докажем оценку $|w_k^h|_1 \leq c\rho_k \xi_k^h$. Нетрудно проверить, что

$$a(\lambda_k^h, P_h u_k, w_k^h) = a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h), \quad b(\lambda_k^h, P_h u_k, w_k^h) = b(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h),$$

$$a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) \geq \lambda_{k+1}^h b(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h).$$

Тогда выполняются соотношения

$$|w_k^h|_1\, \xi_k^h \geq a(\lambda_k^h, P_h u_k, w_k^h) - \lambda_k b(\lambda_k^h, P_h u_k, w_k^h) =$$

$$= a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) + \lambda_k b(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) \geq \frac{\lambda_{k+1}^h - \lambda_k}{\lambda_{k+1}^h} a(\lambda_k^h, w_k^h, w_k^h) \geq \frac{1}{c\rho_k}\, |w_k^h|_1^2, \quad k \geq 1,$$

которые приводят к требуемой оценке.

Теперь, используя полученные выше оценки, имеем

$$|P_h u_k - \beta_k^h u_k^h|_1 \leq |v_k^h|_1 + |w_k^h|_1 \leq c\,\rho_k \xi_k^h \leq c\,\rho_k h^{n+1} \lambda_k^{(n+3)/2}$$

при достаточно малых h.

Обозначим $\|v\|_b^2 = b(\lambda_k, v, v)$, $\|v^h\|_{b_h}^2 = b(\lambda_k^h, v^h, v^h)$ для любых $v \in V$, $v^h \in V_h$. Тогда из соотношений

$$\beta_k^h = \|\beta_k^h u_k^h\|_{b_h} \leq 1 + \|u_k - P_h u_k\|_b + \|P_h u_k - \beta_k^h u_k^h\|_{b_h} + |\, \|P_h u_k\|_{b_h} - \|P_h u_k\|_b \,|,$$

$$\beta_k^h = \|\beta_k^h u_k^h\|_{b_h} \geq 1 - \|u_k - P_h u_k\|_b - \|P_h u_k - \beta_k^h u_k^h\|_{b_h} - |\, \|P_h u_k\|_{b_h} - \|P_h u_k\|_b \,|,$$

получим

$$|\beta_k^h - 1| \leq \|u_k - P_h u_k\|_b + \|P_h u_k - \beta_k^h u_k^h\|_{b_h} + c|\, \|P_h u_k\|_{b_h}^2 - \|P_h u_k\|_b^2 \,|,$$

$$|\beta_k^h u_k^h - u_k^h|_1 = |\beta_k^h - 1|\, |u_k^h|_1 \leq c\sqrt{\lambda_k}\, |\beta_k^h - 1| \leq c\,\rho_k h^{n+1} \lambda_k^{(n+4)/2}$$

для достаточно малых h. В итоге заключаем, что

$$|u_k - u_k^h|_1 \leq |u_k - P_h u_k|_1 + |P_h u_k - \beta_k^h u_k^h|_1 + |\beta_k^h u_k^h - u_k^h|_1 \leq c h^n \lambda_k^{(n+1)/2}.$$

Теорема доказана. □

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10299).

Литература

1. *Solov'ev S.I.* Approximation of differential eigenvalue problems with a nonlinear dependence on the parameter // Differ. Equations. – 2014. – V. 50, No 7. – P. 947–954. – doi: 10.1134/S0012266114070106.
2. *Lyashko A.D., Solov'ev S.I.* Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modell. – 1991. – V. 6, No 2. – P. 121–129.
3. *Solov'ev S.I.* Fast direct methods of solving finite-element grid schemes with bicubic elements for the Poisson equation // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2799–2804.
4. *Solov'ev S.I.* A fast direct method of solving Hermitian fourth-order finite-element schemes for the Poisson equation // J. Math. Sci. – 1995. – V. 74, No 6. – P. 1371–1376.

5. *Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I.* The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell. – 1994. – V. 9, No 5. – P. 417–427.
6. *Solov'ev S.I.* The finite element method for symmetric nonlinear eigenvalue problems // Comput. Math. Math. Phys. – 1997. – V. 37, No 11. – P. 1269–1276.
7. *Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I.* Convergence of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with parameter entering nonlinearly // Differ. Equations. – 1991. – V. 27, No 7. – P. 799–806.
8. *Solov'ev S.I.* The error of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // Comput. Math. Math. Phys. – 1992. – V. 32, No 5. – P. 579–593.
9. *Solov'ev S.I.* Superconvergence of finite element approximations of eigenfunctions // Differ. Equations. – 1994. – V. 30, No 7. – P. 1138–1146.
10. *Solov'ev S.I.* Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // Differ. Equations. – 2002. – V. 38, No 5. – P. 752–753.
11. *Solov'ev S.I.* Approximation of differential eigenvalue problems // Differ. Equations. – 2013. – V. 49, No 7. – P. 908–916.
12. *Solov'ev S.I.* Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Appl. Numer. Math. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
13. *Solov'ev S.I.* Approximation of nonlinear spectral problems in a Hilbert space // Differ. Equations. – 2015. – V. 51, No 7. – P. 934–947.
14. *Solov'ev S.I.* Approximation of variational eigenvalue problems // Differ. Equations. – 2010. – V. 46, No 7. – P. 1030–1041.
15. *Solov'ev S.I.* Approximation of positive semidefinite spectral problems // Differ. Equations. – 2011. – V. 47, No 8. – P. 1188–1196. – doi: 10.1134/S001226611108012X.
16. *Solov'ev S.I.* Approximation of sign-indefinite spectral problems // Differ. Equations. – 2012. – V. 48, No 7. – P. 1028–1041.
17. *Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R.* On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // Appl. Math. Sci. – 2015. – V. 9, No 113–116. – P. 5697–5705.
18. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paymushin V.N.* Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Res. J. Appl. Sci. – 2015. – V. 10, No 8. – P. 428–435.
19. *Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф.* О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 1. – С. 15–24.
20. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 10. – P. 57–60. – doi: 10.3103/S1066369X15100072.
21. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // Proc. Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1050–1055. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.
22. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // Proc. Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1056–1062. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.

23. *Бадриев И.Б., Нечаева Л.А.* Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2013. – № 3. – P. 35–62.

24. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

25. *Ciarlet P.G.* The Finite Element Method for Elliptic Problems. – Philadelphia: Am. Math. Soc., 2002. – xxiii, 529 p.

Поступила в редакцию
05.06.17

Самсонов Антон Андреевич, аспирант кафедры вычислительной математики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*

Соловьёв Павел Сергеевич, магистрант вычислительной математики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *pavel.solovev.kpfu@mail.ru*

Соловьёв Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *sergei.solovyev@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 3, pp. 354–363

Error Investigation of Finite Element Approximation for a Nonlinear Sturm–Liouville Problem

A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev**, S.I. Solov'ev****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **anton.samsonov.kpfu@mail.ru*, ***pavel.solovev.kpfu@mail.ru*, ****sergei.solovyev@kpfu.ru*

Received June 5, 2017

Abstract

A positive definite differential eigenvalue problem with coefficients depending nonlinearly on the spectral parameter has been studied. The differential eigenvalue problem is formulated as a variational eigenvalue problem in a Hilbert space with bilinear forms nonlinearly depending on the spectral parameter. The variational problem has an increasing sequence of positive simple eigenvalues, which correspond to a normalized system of eigenfunctions. The variational problem has been approximated by a mesh scheme of the finite element method on the uniform grid with Lagrangian finite elements of arbitrary order. Error estimates for approximate eigenvalues and eigenfunctions in dependence on mesh size and eigenvalue size have been established. The obtained results are generalizations of the well-known results for differential eigenvalue problems with linear dependence on the spectral parameter.

Keywords: eigenvalue, eigenfunction, eigenvalue problem, mesh approximation, finite element method

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10299).

References

1. Solov'ev S.I. Approximation of differential eigenvalue problems with a nonlinear dependence on the parameter. *Differ. Equations*, 2014, vol. 50, no. 7, pp. 947–954. doi: 10.1134/S0012266114070106.
2. Lyashko A.D., Solov'ev S.I. Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modell.*, 1991, vol. 6, no. 2, pp. 121–129.
3. Solov'ev S.I. Fast direct methods of solving finite-element grid schemes with bicubic elements for the Poisson equation. *J. Math. Sci.*, 1994, vol. 71, no. 6, pp. 2799–2804.
4. Solov'ev S.I. A fast direct method of solving Hermitian fourth-order finite-element schemes for the Poisson equation. *J. Math. Sci.*, 1995, vol. 74, no. 6, pp. 1371–1376.
5. Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I. The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell.*, 1994, vol. 9, no. 5, pp. 417–427.
6. *Solov'ev S.I.* The finite element method for symmetric nonlinear eigenvalue problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1997, vol. 37, no. 11, pp. 1269–1276.
7. Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I. Convergence of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with parameter entering nonlinearly. *Differ. Equations*, 1991, vol. 27, no. 7, pp. 799–806.
8. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov–Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 5, pp. 579–593.
9. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations of eigenfunctions. *Differ. Equations*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1138–1146.
10. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces. *Differ. Equations*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 752–753.
11. Solov'ev S.I. Approximation of differential eigenvalue problems. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 908–916.
12. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems. *Appl. Numer. Math.*, 2015, vol. 93, pp. 206–214.
13. Solov'ev S.I. Approximation of nonlinear spectral problems in a Hilbert space. *Differ. Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 934–947.
14. Solov'ev S.I. Approximation of variational eigenvalue problems. *Differ. Equations*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
15. Solov'ev S.I. Approximation of positive semidefinite spectral problems. *Differ. Equations*, 2011, vol. 47, no. 8, pp. 1188–1196. doi: 10.1134/S001226611108012X.

16. Solov'ev S.I. Approximation of sign-indefinite spectral problems. *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 7, pp. 1028–1041.

17. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 113–116, pp. 5697–5705.

18. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paymushin V.N. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler. *Res. J. Appl. Sci.*, 2015, vol. 10, no. 8, pp. 428–435.

19. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. On solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversely soft filler. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 1, pp. 15–24.

20. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. doi: 10.3103/S1066369X15100072.

21. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending. *Proc. Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1050–1055. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.

22. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test. *Proc. Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.

23. Badriev I.B., Nechaeva L.A. Mathematical simulation of steady filtration with multivalued law. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ., Mekh.*, 2013, no. 3, pp. 35–62. (In Russian)

24. Mikhailov V.P. Differential Equations in Partial Derivatives. Moscow, Nauka, 1983. 424 p. (In Russian)

25. Ciarlet P.G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Philadelphia, Am. Math. Soc., 2002. xxiii, 529 p.

⟨ ***Для цитирования:*** *Самсонов А.А., Соловьёв П.С., Соловьёв С.И.* Исследование погрешности конечно-элементной аппроксимации нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 354–363. ⟩

⟨ ***For citation:*** Samsonov A.A., Solov'ev P.S., Solov'ev S.I. Error investigation of finite element approximation for a nonlinear Sturm–Liouville problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 354–363. (In Russian) ⟩