Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 010101 – Математика

Специализация: Алгебраические структуры алгоритмической природы

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

ИГРЫ ЭРЕНФОЙХТА-ФРЕССЕ НА СЧЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКАХ

Работа завершена:
«____»______________2015 г. ______________Д.О. Нестеренко

Работа проверена:
Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и математической логики
«____»______________2015 г. ______________М.В. Зубков
Заведующий кафедрой алгебры и математической логики,
доктор физико-математических наук, профессор
«____»______________2015 г. ______________М.М. Арсланов

Казань – 2015 г.

Содержание

Введение **3**

1 Предварительные сведения о линейных порядках **5**

2 Игры Эренфойхта-Фрессе **7**

3 Двухшаговые игры **14**

4 Трехшаговые игры **16**

Заключение **43**

Введение

Тема данной работы находится на стыке таких фундаментальных направлений как теории множеств и теории линейных порядков. Подобные междисциплинарные исследования в последние десятилетия становятся всё более популярными. Особое место в них занимают исследования алгоритмических свойств алгебраических структур, которые проводятся различными коллективами как отечественных, так и зарубежных математиков. В данной работе изучаются свойства классов эквивалентностей задаваемых играми Эйренфойхта-Фрессе на счетных линейных порядках.

В теории моделей, игра Эренфойхта-Фрессе является методом для определения элементарной эквивалентности двух структур. Основное применение этого метода в доказательстве интуитивно определенных свойств логики первого порядка. Эти игры имеют особое значение в теории конечных моделей и её приложениях в компьютерных науках (особенно в базах данных и системах автоматической верификации). Объясняется это тем, что другие широко используемые методы доказательства, такие как теоремы компактности, не работают в конечных моделях. Выше сказанное подтверждает актуальность изучения свойств игр Эренфойхта-Фрессе для различных алгебраических систем.

Впервые данные игры были применены в работах А. Эренхойфта [1], Р. Фрессе [2] при доказательстве элементарной эквивалентности различных моделей.

Основная идея игры заключается в том, что имеется две структуры и два игрока. Цель первого игрока показать, что две структуры различны, в то время как второй игрок должен показать, что они идентичны. Игра проходит в несколько раундов. Каждый раунд протекает следующим образом: сначала первый игрок выбирает элемент в одной из структур. В ответ, второй игрок выбирает элемент из противоположной структуры. Игра продолжается конечное число шагов. Второй игрок выигрывает, если в конце имеется изоморфизм между выбранными элементами из структур. Формальное определение приведено в соответствующем разделе данной работы.

В представленной работе приведено точное определение игр из n шагов на счетных линейных порядках и некоторые свойства, которые позволяют на основе игр Эренхойфта-Фрессе определить отношения эквивалентности. Также приводится теорема, утверждающая конечность числа классов эквивалентности для n-шаговых игр. В доказательстве этой теоремы получена верхняя оценка числа классов для каждого заданного n.

Проблема остается только в том, что полученная оценка имеет очень большую погрешность. Так для $n = 2$ оценка дает не более 16 классов эквивалетности, однако как показано в работе их 7. Целью работы является нахождение всех классов эквивалентности для случаев $n = 2$ и $n = 3$. Анализ этих двух случаев может позволить в дальнейшем уточнить оценку либо подсчитать точное количество классов эквивалентности для заданного n.

1 Предварительные сведения о линейных порядках

В определениях и обозначения мы стараемся придерживаться книги Дж. Розенштейна [3]. Рассмотрим некоторое бинарное отношение R на множестве A, где R определяется следующим образом:

$$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow x < y.$$

Определение 1.1 *Линейным порядком на множестве A является бинарное отношение R на A удовлетворяющее следующим условиям:*

1) если $\langle x, y\rangle \in R$ и $\langle y, z\rangle \in R$, то $\langle x, z\rangle \in R$;
2) если $x \neq y$, тогда $\langle x, y\rangle \in R$ или $\langle y, x\rangle \in R$;
3) $\langle x, x\rangle \notin R$.

Структура $\langle A, R\rangle$ состоящая из множества и отношения линейного порядка R на нем называется линейным порядком.

Определение 1.2 *Пусть R линейный порядок A, и S линейный порядок B. Изоморфизмом $\langle A, R\rangle$ на $\langle B, S\rangle$ называется сохраняющая порядок функция $f : A \mapsto B$ удовлетворяющая условию*

$$\langle f(a_1), f(a_2)\rangle \in S \Leftrightarrow \langle a_1, a_2\rangle \in R,$$

и обозначается $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$.

Определение 1.3 *Мы говорим, что $\langle A, R\rangle$ и $\langle B, S\rangle$ имеют одинаковый порядковый тип, если $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$.*

Будем придерживаться следующих обозначений:

1) Порядковый тип стандартного порядка на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначается ω.
2) Порядковый тип стандартного порядка на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ обозначается η.
3) Порядковый тип стандартного порядка на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ обозначается λ.

Определение 1.4 *Линейный порядок $L = \langle L, R\rangle$ называется плотным, если между любыми двумя элементами всегда найдётся третий:*

$$\forall x, y \in L(x <_R y)\exists z(x <_R z <_R y).$$

Определение 1.5 *$\langle A, R\rangle$ и $\langle B, S\rangle$ линейные порядки и предполагается, что A и B не пересекаются. Мы определим сумму*

$$\langle A, R\rangle + \langle B, S\rangle$$

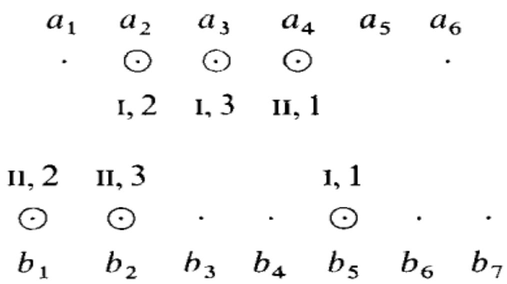
как линейный порядок $\langle C, T\rangle$ где $C = A \cup B$ и $\langle c_1, c_2\rangle \in T \Leftrightarrow$ ($c_1 \in A$ и $c_2 \in B$) или ($c_1 \in A$ и $c_2 \in A$ и $\langle c_1, c_2\rangle \in R$) или ($c_1 \in B$ и $c_2 \in B$ и $\langle c_1, c_2\rangle \in S$).

2 Игры Эренфойхта-Фрессе

Предположим имеются два линейных порядка A и B. Два игрока играют в следующую игру. Первый игрок выбирает элемент из выбранных порядков A или B. Тогда второй игрок берет элемент из противоположного линейного порядка. Этот процесс повторяем три раза и после третьего хода игра считается законченной. Теперь в каждом из линейных порядков имеется по три элемента. Пусть a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} элементы A выбранные на первом втором и третьем ходе соответственно; и пусть b_{j1}, b_{j2}, b_{j3} элементы B выбранные на первом втором и третьем ходе соответственно.

Например, A состоит из шести элементов $\{a_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$, упорядоченных как натуральные числа, и B состоит из семи элементов $\{b_j \mid 1 \leq j \leq 7\}$, упорядоченных как натуральные числа.

Допустим на первом ходе первый игрок выбрал элемент b_5, а второй игрок выбрал элемент a_4. Далее, на втором ходе, первый игрок выбрал a_2, а второй игрок выбрал элемент b_1. И на последнем ходе первый игрок выбрал a_3 и второй выбрал b_2. В результате получаем диаграмму, на которой каждая точка — это выбор игрока на соответствующем ходе.



Заметим, что a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} есть a_4, a_2, a_3, соответственно, и b_{j1}, b_{j2}, b_{j3} есть b_5, b_1, b_2 соответственно.

Будем говорить что выиграл второй игрок, если в результате выбранные элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} так же упорядоченны в A, как элементы b_{j1}, b_{j2}, b_{j3} упорядоченны в B. Если же второй игрок проиграл, то будем говорить, что выиграл первый игрок.

В рассмотренной выше игре выиграл второй игрок так, как a_4, a_2, a_3 упорядоченны в A так же, как b_5, b_1, b_2 в B. Если бы на последнем ходе второй игрок выбрал бы элементы b_6 или b_7, тогда победу одержал бы первый игрок. С другой стороны выбрав элементы b_3 или b_4 победа также бы осталась за вторым игроком.

Проанализировав варианты ходов обоих игроков можно заметить что, в данной игре всегда выигрывает первый игрок. Для этого ему надо взять средний элемент из B. Второй игрок не может выбирать крайние элементы и элементы идущие в соседстве с крайними так, как в дальнейшем выбирая соседние элементы в порядке убывания или возростания, первый игрок сможет одержать победу. Остаются элементы a_3 и a_4. Допустим на первом ходе второй игрок выбрал a_3. Тогда на втором ходе первый игрок выбирает $b2$. Теперь второй игрок может выбрать a_2 или a_1. Выбрать элемент a_1 нельзя так, как следующим ходом b_1, первый игрок остается в выйгрыше. Тогда остается случай выбора элемента a_2. На этот ход первый игрок отвечает выбором элемента b_3 и снова остается в выйгрыше.

Итак, мы увидели что, в рассмотренной игре всегда выигрывает первы игрок. Поэтому будем говорить, что второй игрок имеет выйграшную стратегию, если на любой ход первого игрока, второй игрок всегда сможет выбрать соответствующие элементы чтобы, одержать победу. И наоборот, первый игрок имеет выйграшную стратегию, если после первого хода второй игрок не сможет выйграть игру.

Рассмотрим примеры:

1)$A \cong 7$, $B \cong 8$.

Нам даны два упорядоченных множества состоящие из семи и восьми элементов. В этой игре победу всегда будет одерживать второй игрок так, как на обоих этих линейных порядках у него всегда есть возможность копировать ходы первого игрока.

2)$A \cong \omega$, $B \cong \eta$.

В этом случае у нас имеются упорядоченное множество с наименьшим элементом A и без наименьшего B. В этой игре выигрывает первый игрок. Для этого ему надо на первом ходе выбрать наименший элемент из A и на втором ходе из множества B выбрать на элемент меньше.

3)$A \cong \omega$, $B \cong \zeta$.

Имеем такие же упорядоченные множества как и в предыдущем примере. Аналогичными рассуждениями получаем что, выйграшную стратегию первого игрока.

4)$A \cong \omega$, $B \cong \omega + \omega$.

В этой игре первый игрок должен придерживаться следующей стратегии: на первом ходе он выбирает элемент из $\omega + \omega$, то есть из B так, чтобы он был наименьшим из второго ω линейного порядка и обознаим его b_1. Далее второй игрок не может выбирать наименьший элемент из A так, как на следующем ходе первый игрок сможет взять на элемент меньше. Следовательно второй игрок выбирает любой, кроме крайнего, элемент a_1 из A. На втором ходе первый игрок выбирает элемент a_2 соседний слева к a_1, то есть $a_2 < a_1$. Второму игроку остается выбратьэлемент b_2 из первого ω упорядоченного множества . И на последнем ходе первый игрок может выбрать элемент b_3 между b_1 и b_2, а именно $b_2 < b_3 < b_1$. Второй игрок так сделать не может так, как элементы a_1 и a_2 расположены по соседству друг с другом. Следовательно выигрывает первый игрок.

5)$A \cong \omega + 2 + \omega^*$, $B \cong \omega + 1 + \omega^*$.

В данном примере выигрывает также первый игрок. Для этого на первом ходе он выбирает один из двух соседних элементов из A. Пусть это будет левый элемент и обозначим его a_1. Второй игрок имеет три варианта выбора элемента из B — это либо из упорядоченного множества ω, либо из ω^*, либо элемент между ними. Рассмотрим каждый из них подробнее. В первом случае, если второй игрок выбирает любой элемент b_1, кроме крайнего, то на втором ходе первый игрок выбирает элемент b_2 соседний слево к b_1, то есть $b_2 < b_1$. Второй игрок может выбрать теперь произвольный элемент a_2 из ω. Так как элементы a_1 и a_2 расположены не плотно, то на третьем ходе первый игрок между ними вставляет элемент a_3, и таким образом получается $a_2 < a_3 < a_1$. Но так, как элементы b_1 и b_2 являются соседними, то второй игрок проигрывает. Второй случай, когда элемент берется из ω^*, является аналогичным первому. Соответственно действуя по предыдущиму алгоритму, выигрывает первый игрок. Теперь рассмотрим последний случай когда элемент берется между ω и ω^*. Тогда на втором ходе первый игрок берет соседний элементb_2 справо от b_1. Второму игроку остается брать произвольный элемент a_2 только из линейного порядка ω^*. На последнем ходе первый игрок вставляет элемент a_3 между a_1 и a_2, чего не может сделать второй игрок, и выигрывает во всех случаях.

6)$A \cong \omega + 2 + \omega^*$, $B \cong \omega + 3 + \omega^*$.

Этот пример похож на предыдущий. Отличие заключается в том, что в начале первый игрок выбирает средний элемент b_1 между ω и ω^* из противоположного упорядоченного множества B. Здесь также появляются три варианта игры втрого игрока идентичные прошлому примеру. В первых двух случая алгоритм действи остается тот же. Рассмотрим теперь третий случай. Среди двух соседних элементов между ω и ω^* второй игрок может выбрать левый или правый элемент a_1. Поэтому, если второй игрок берет левый элемент, то на втором ходе первому игроку необходимо брать соседний слево от b_1 элемент b_2. Послеэтого второму игроку остается выбрать произвольный элемент a_2 из ω^*. И на третьем ходе первый игрок вставляет элемент a_3 между a_1 и a_2. После этого хода, очевидно, выигрывает первый игрок. Аналогично действуем, если на первом ходе второй игрок выбрал правый элемент, только теперь необходимо будет брать элементы справо. В результате получается что, во всех случая победу одержал первый игрок.

Итак, мы рассмотрели игры состоящие всего из трех ходов и разобрали некоторые примеры, на которых выявили какой игрок в определенных играх имеет выйграшную стратегию .В общем случае не стоит ограничиваться игрой только в три хода. Таким образом для некоторого фиксированного натурального числа $n \geq 1$ и некоторых линейных порядков A и B имеется следующая игра $\mathbf{G}_n(A, B)$, которая состоит из n раундов, в отличие от предыдущих. Таким образом, перейдем к рассмотрению следующих определений.

Определение 2.1 *Пусть A и B линейные порядки и пусть $n \geq 1$ есть фиксированное натуральное число. Игра $\mathbf{G}_n(A, B)$ состоящая из упорядоченной последовательности n ходов построена следующим образом: первый игрок выбирает элемент из A или B, второй игрок выбирает из оставшегося множества. Элемент из A, выбранный на $t-$ шаге обозначим a_t и элемент из B, выбранный на $t-$ шаге обозначим b_t. Будем говорить что, второй игрок выйграл данную игру если для любых $s, t \leq n, a_s <_A a_t$ тогда и только тогда, когда $b_s <_B b_t$; в противном случае будем говорить, первый игрок выйграл данную игру. Также будем говорить, что второй игрок имеет выйграшную стратегию в $\mathbf{G}_n(A, B)$, если существуют функции $f_1, f_2, \cdots, f_n$ такие, что*

1. *область значений f_t есть вполне упорядоченный набор $t-$ элементов из $A \cup B$;*

2. *для данных $c_1, c_2, \cdots, c_t \in A \cup B$*

$$f_t(c_1, c_2, \cdots, c_t) \in \begin{cases} A, & \text{если } c_t \in B; \\ B, & \text{если } c_t \in A. \end{cases}$$

3. *если $c_1, c_2, \cdots, c_t \in A \cup B$ и если определены*

$$a_t = \begin{cases} c_t, & \text{если } c_t \in A; \\ f_t(c_1, c_2, \cdots, c_t), & \text{если } c_t \in B. \end{cases}$$

$$b_t = \begin{cases} c_t, & \text{если } c_t \in B; \\ f_t(c_1, c_2, \cdots, c_t), & \text{если } c_t \in A. \end{cases}$$

для каждого $t \leq n$, тогда для каждых $s, t \leq n$

$$a_s <_A a_t$$

тогда и только тогда, когда $b_s <_B b_t$.

В противном случае будем говорить, что победу одержал первый игрок.

Обозначение 2.1 *Если второй игрок имеет выигрышную стратегию в игре* $\mathbf{G}_n(A,B)$*, тогда мы будем писать* $\mathbf{G}_n(A,B)\in II$*; в противном случае будем писать* $\mathbf{G}_n(A,B)\in I$*.*

Ниже приведены леммы, которые непосредственно следуют из определений.

Лемма 2.1
1. $\mathbf{G}_n(A,B)\in II$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{G}_n(B,A)\in II$
2. *Если* $A\simeq B$*, тогда* $\mathbf{G}_n(A,B)\in II$*.*

Лемма 2.2 *Если* $\mathbf{G}_n(A,B)\in II$ *и* $1\le m<n$*, то* $\mathbf{G}_m(A,B)\in II$*.*

Лемма 2.3
1. *Если* $\mathbf{G}_n(A_1,B_1)\in II$ *и* $\mathbf{G}_n(A_2,B_2)\in II$*, то*
$$\mathbf{G}_n(A_1+A_2,B_1+B_2)\in II.$$
2. *Если* $\mathbf{G}_n(A_i,B_i)\in II$ *для любого* $i\in J$*, то* $\mathbf{G}_n(\sum\{A\mid i\in J\}, \sum\{B\mid i\in J\})\in II$*, где* J *произвольный линейный порядок.*
3. *Если* A *имеет наибольший(наименьший) элемент, а* B *не имеет, то* $\mathbf{G}_2(A,B)\in I$*.*
4. *Если порядок* A *плотный, а* B *нет, то* $\mathbf{G}_3(A,B)\in I$*.*

В дальнейшем мы покажем, что бинарное отношение на линейных порядках, определяемое как $\mathbf{G}_n(A,B)$, в действительности является отношением эквивалентности. Таким образом обоначения $\mathbf{G}_n(A,B)$ в леммах выше будут заменены на $A\sim_n B$.

Теорема, описанная ниже, является фундаментальным результатом, дающая возможность разрешать игры с $n+1$ ходом, используя игры из n ходов.

Теорема 2.1 $\mathbf{G}_{n+1}(A,B)\in II$ *тогда и только тогда, когда*

1. *для любого* $a\in A$ *существует* $b\in B$ *такое, что*
$$\mathbf{G}_n(A^{>a},B^{>b})\in II \text{ и } \mathbf{G}_n(A^{<a},B^{<b})\in II$$
2. *для любого* $b\in B$ *существует* $a\in A$ *такое, что*
$$\mathbf{G}_n(A^{>a},B^{>b})\in II \text{ и } \mathbf{G}_n(A^{<a},B^{<b})\in II.$$

Следствие 2.1 *Пусть A, B и C линейные порядки, и пусть $n \geq 1$ есть натуральное фиксированное число. Если второй игрок имеет выйграшную стратегии в $\mathbf{G}_n(A, B)$, а также в $\mathbf{G}_n(B, C)$, тогда второй игрок имеет выйграшную стратегию в $\mathbf{G}_n(A, C)$.*

Теперь можно сформулировать ниже следующее определение.

Определение 2.2 *Будем говорить A $\mathbf{G}_n - - -$ эквивалентно B, записывая $A \sim_n B$, если второй игрок имеет выйграшную стратегию в $\mathbf{G}_n(A, B)$. Также будем говорить A $\mathbf{G}$ – эквивалентно B, записывая $A \sim B$, если $A \sim_n B$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из Леммы 1.1 и Следствия 1.1 это отношение является отношением эквивалентности.*

Следствие 2.2 *Пуст A и B линейные порядки мощности, по крайней мере, $2^n - 1$. Тогда второй игрок имеет выйграшную стратегию в $\mathbf{G}_n(A, B)$.*

Заметим что это следствие не распространяется на игру $\mathbf{G}_3(6, 7)$ при $n = 3$, взятую из примера выше.

Следствие 2.3 *Второй игрок имеет выигрышную стратегию в $\mathbf{G}_n(\omega, \omega + \zeta\alpha)$, для некоторого порядкового типа α и некоторого $n \geq 1$.*

Ниже будет показано, что для каждого натурального числа n относительно $\sim_n$ существует лишь конечное число классов эквивалентности. Что существенно отличается от случая $\sim$, когда существует бесконечно много различных классов эквивалентности.

Теорема 2.2 *Для каждого n существует только конечное число классов эквивалентности по модулю $\sim_n$.*

Доказательство. Докажем данную теорему по индукции. Для $n = 1$, как известно, имеется всего два класса эквивалентности — это пустой и непустой линейный порядок. Допустим верно для n, то есть существует конечное число классов эквивалентности по модулю $\sim_n$. Докажем для $n = n+1$. Для этого рассмотрим два упорядоченных множества A и B. Каждый элемент $a \in A$ и $b \in B$ разбивает их на упорядоченные пары $< [A^{<a}], [A^{>a}] >$ и $< [B^{<b}], [B^{>b}] >$. По предположению индукции, эти пары определяют конечное число классов эквивалентности по модулю $\sim_n$. Пусть $I(A) = \{< [A^{<a}], [A^{>a}] > | a \in A\}$, $I(B) = \{< [B^{<b}], [B^{>b}] > | b \in B\}$. Согласно теореме 1.1 $A \sim_{n+1} B$ тогда и только тогда, когда $I(A) = I(B)$. Следовательно число таких классов эквивалентности по модулю $\sim_{n+1}$ есть наибольшее число подпоследовательности

последовательности упорядоченных пар классов эквивалентности по модулю $\sim_n$. Но это число равно $2^{f(n)\cdot f(n)}$. Следовательно $f(n+1) \leq 2^{f(n)\cdot f(n)}$, а значит существует конечное число классов эквивалентности по модулю $\sim_{n+1}$. ■ В доказательстве, приведенном выше, определена функция $f(n)$ дающая верхнюю оценку на число классов эквивалентности для каждого n. Функция задается следующими соотношениями:

$$f(1) = 2$$
$$f(n+1) = 2^{f(n)\cdot f(n)}.$$

Применяя эту формулу в случае $n = 2$, получим $f(n) = 16$. По факту же, при $n = 2$, $f(n) = 7$. Таким образом, функция $f(n)$ дает слишком грубую оценку числа классов эквивалетности. Далее подробно рассматриваются случаи $n = 2$ и $n = 3$. А именно, найдены все классы эквивалетности в этих случаях и показано, что других нет.

3 Двухшаговые игры

Введем следующие обозначения.

Обозначение 3.1 *Линейный порядок без наибольшего и наименьшего элемента будем обозначать* $(\leftarrow, \rightarrow)$. *С наименьшим и наибольшим элементом* $[a, b]$. *Без наименьшего и с наибольшим, и без наибольшего и с наименьшим соответственно —* $(\leftarrow, b)$ *и* $(a, \rightarrow)$.

Итак, применяя формулу, выведенную из доказательства теоремы, путем рекурсии получаем $f(2) = 16$. Выше уже упомянулось о том, что при $n = 2$, в результате получим $f(2) = 7$. Первый класс, который очевидно можно выделить, это класс состоящий только из пустого линейного порядка. Для произвольного $A \neq \emptyset$, очевидно, $\mathbf{G}_n(A, \emptyset) \in I$. Ясно, что рассматривать пустой линейный порядок более подробно нет смысла. Поэтому проанализируем множество непустых линейных порядков и определим на какие классы эквивалетности оно разбивается. Выделим два возможных варианта: порядки состоящие из конечного и бесконечного числа элементов.

При рассмотрении первого варианта можно сразу же выделить следующие различные классы эквивалентности: $A \cong 1$, $B \cong 2$. Этот случай не требует детального разбора и можно уверенно утверждать, что $\mathbf{G}_n(A, B) \in I$.

Следующим возможным эквивалентном классом является класс состоящий из трехэлементного линейного порядка. Для доказательства этого разумно рассмотреть следующую игру:

$$A \cong 2, B \cong 3.$$

На первом ходе первый игрок выбирает средний элемент из B. Далее, если второй игрок на первом ходе выбирает первый элемент из A, то первый игрок, следующим своим ходом выбирает соседний элемент слева из B и выигрывает. В противном случае, первый игрок на втором ходе выбирает соседний элемент справа из B и также выигрывает. Следовательно $\mathbf{G}_n(A, B) \in II$. Вариант игры при котором $A \cong 1$, $B \cong 3$ разбирать смысла нет, так как этот случай идентичен рассмотренному выше. Поэтому получаем новый класс эквивалентности.

Теперь остается показать, что оставшиеся упорядоченные множества из конечного числа элементов эквивалентны трехэлементному линейному порядку. Для этого рассмотрим следующую игру: $A \cong 3$, $B \cong 4$.Так как игра состоит из двух ходов, то для победы второму игроку необходимо на ппервом ходе выбирать любой элемент кроме крайних. Следовательно в любых играх вида $A \cong n$, $B \cong n + 1$, где $n \geq 3$, следует, что $\mathbf{G}_n(A, B) \in II$. Значит любые n-элементные порядки эквивалентны трехэлементному упорядоченному множеству.

Рассмотрим второй вариант, при котором наши порядки состоят из бесконечного числа элементов. Анализ будет проводится на основании третьего пункта леммы 1.3. Получается, наше упорядоченное множество разбивается на следующие четыре класса эквивалентности: с наибольшим элементом, с наименьшим элементом, без наибольшего и наименьшего элемента, с наибольшим и наименьшим элементом. Можно сразу же заметить, что первые три линейных порядка из списка определяют три различных эквивалентных класса. Последнее упорядоченое множество с наибольшим и наименьшим элементом будет эквивалентен ранее описанному трехэлементному линейному порядку. Каждое из них определяет отрезок с начальным и конечным элементом. Поэтому для выйгрыша, второму игроку необходимо выбирать любой элемент кроме крайних.

Итак, выше были рассмотрены все возможные варианты упорядоченных множеств и получены все семь классов эквивалентности: $A \cong \emptyset$, $A \cong 1$, $A \cong 2$, $A \cong 3$, $A \cong (\leftarrow, b)$, $A \cong (a, \rightarrow)$, $A \cong (\leftarrow, \rightarrow)$. Теперь перейдем к рассмотрению игр состоящих из трех шагов.

4 Трехшаговые игры

В случае $n = 2$ было показано, что $f(n) = 7$. Снова применим ранее доказанную формулу получим, что $f(3) \leq 2^{49}$. Как видно, погрешность при вычислении различных классов эквивалентности получается достаточно большой. Поэтому рассмотрим этот случай более подробно и сосчитаем все эквивалентные классы без применения данной формулы. Логика рассуждений похожа выше рассмотренному случаю. В начал найдем классы эквивалентности, состоящие из конечного числа элементов. Непосредственной проверкой можно покаать, что ранее найденные конечные классы эквивалентности для случая $n = 2$ будут такими же и для случая $n = 3$, а именно : $A \cong \emptyset$, $A \cong 1$, $A \cong 2$, $A \cong 3$. Делая проверку, будем сравнивать с классом, состоящим из наибольшего числа элементов из уже найденных классов. Найдем оставшиеся эквивалентные классы.

Алгоритм выйгрыша первого игрока во всех описанных ниже случаях примерно одинаковый. На первом ходе первый игрок выбирает из большего линейного порядка либо средний элемент, если линейный порядок состоит из нечетного количества элементов, либо близкий к середине, если из четного количества элементов. Далее, для четного случая, на втором ходе первый игрок выбирает предпоследний элемент со стороны где остается большее количество невыбранных элементов. На последнем ходе первый игрок выбирает элемент в зависимость от того как сходит второй игрок. Если на втором ходе второй игрок выбирает крайний элемент своего линейного порядка, тогда первый игрок выбирает крайний элемент своего. Если же второй игрок выбирает соседний элемент со средним, тогда первый последним ходом выбирает элемент между первым и вторым выбранным. Этот алгоритм будет действовать только в том случае, когда первый игрок на первом ходе выбирает средний элемент. В противном случае первому игроку необходимо выбирать подряд соседние элементы своего линейного порядка с той стороны, где у второго игрока осталось меньше свободных элементов. Если же больший линейный порядок состоит из четного количества элементов, алгоритм проводится аналогично, с той лишь разницей, что на втором ходе предпоследний элемент выбирается со стороны где у второго игрока меньше элементов. Покажем описанный алгоритм на примерах:

1) $A \simeq 6$, $B \simeq 7$. Этот случай подробно рассмотрен в введении.

2)$A \simeq 5$, $B \simeq 6$. Первым ходом первый игрок выбирает третий элемент из B. Допустим второй игрок в ответ выбирает любой кроме среднего элемента A. Пусть это будет второй элемент A. Тогда первый игрок выбирает второй элемент B. После этого второму игроку остается выбирать только крайний элемент, и как можно видеть, третьим ходом первый игрок выбирает первый элемент B и выигрывает. Теперь пусть на первом ходе первый игрок выбрал средний элемент. Тогда вторым ходом первый игрок выбирает пятый элемент B. Если далее второй игрок в ответ выбирает четвертый элемент A, тогда на третьем ходе первый игрок выбирает четвертый элемент B и выигрывает. Если же вторым ходом второй игрок выбирает пятый элемент A, тогда третьим ходом первый игрок выбирает крайний правый элемент B и также выигрывает.

Данный алгоритм проводится только до тех пор, пока на втором ходе хотя бы с одной из сторон от первого выбранного элемента находится не больше двух свободных элементов. Иначе второй игрок первым ходом всегда будет выбирать элемент из середины линейного порядка. Это подробно показано в примере введения, где $A \cong 7$, $B \cong 8$. Следовательно дополнительно получаем следующий классы эквивалентности: $A \cong 4$, $A \cong 5$, $A \cong 6$, $A \cong 7$. А значит из конечных порядков, получаем следующие классы эквивалентности: $A \cong \emptyset$, $A \cong 1$, $A \cong 2$, $A \cong 3$, $A \cong 4$, $A \cong 5$, $A \cong 6$, $A \cong 7$.

Теперь рассмотри случай бесконечных линейных порядков. Так же, как и в случае $n = 2$, бесконечные классы эквивалентности распадаются на четыре типа:$A \simeq (\leftarrow, \rightarrow)$, $A \simeq (\leftarrow, b)$, $A \simeq (a, \rightarrow)$, $A \simeq (\leftarrow, \rightarrow)$. В отличие от предыдущего случая, здесь каждый из типов содержит различное количество классов эквивалентностей. Наименьшим по количеству эквивалентных классов является тип $(\leftarrow, \rightarrow)$. Оставшиейся классы эквивалентности будут получатся из $(\leftarrow, \rightarrow)$, добавлением наибольшего и наименьшего элементов. Поэтому описание различных классов эквивалентности начнём с линейных порядков без наибольшего и наименьшего элементов, то есть с $(\leftarrow, \rightarrow)$. Для этого введем следующее определение.

Определение 4.1 *Два элемента находятся в одном блоке если между ними лишь конечное число элементов. Блоком называется максимальное по включению множество элементов находящихся в одном блоке.*

Итак, описание первого типа будем производить, используя блочную модель. Любой блок представим в виде одного из следующих порядковых типов: ω, ω^*, ζ, k - элементный линейный порядок. Таким образом каждый порядковый тип, содержащийся в $(\leftarrow, \rightarrow)$, представим в виде суммы различных блоков. Поэтому для описания всех возможных классов эквивалентности достаточно рассмотреть все порядковые типы, состоящие из различных блоков. Отметим, что плотный линейный порядок состоит из бесконечной суммы одноэлементных блоков, так как по определению плотности, меду любыми двумя элементами находится бесконечное число элементов. Исходя из рассуждений, можно описать первые несколько классов эквивалентности:

$$\eta, \zeta, \omega^* + \zeta, \zeta + \omega, \omega^* + \zeta + \omega, \eta + \zeta, \omega^* + \eta, \eta + \omega,$$

$$\omega^* + \eta + \omega, \omega^* + \eta + \zeta, \eta + \zeta + \omega, \omega^* + \eta + \zeta + \omega.$$

Видно, что каждый из описанных выше классов эквивалентности состоит из различных блоков. Объяснено это тем, что в рассматриваемом случае классы эквивалентности строятся на основании пункта 4 леммы 1.3, то есть плотно или неплотно расположены соседние элементы, а также существование наибольших и наименьших элементов. Поэтому получается, что если элементы находятся в одном и том же блоке, то упорядоченность их будет неплотная. Легко заметить, что описанные выше эквивалентные классы, получаются путем всевозможных сумм различных блочных типов. Исключением является сумма $\omega^* + \omega$. Результат суммы данных линейных порядков сравним с блочным типом ζ. Поэтому этот класс эквивалетности входит в ζ. Теперь, к ранее описанным классам, необходимо добавить k-элементные блоки. Дополнять их можно в любое место бесконечных линейных порядков, кроме первого и последнего элемента, так как описание классов эквивалентности производится в $(\leftarrow, \rightarrow)$. Поэтому добавим эти блоки в середину описанных выше классов, при этом не забывая о следующих свойствах порядковых типов ω и ω^*: $k + \omega = \omega$, $\omega^* + k = \omega^*$, где $k \in \mathbb{N}$. k-элементные блоки также образуют различные классы эквивалентности: 1-элементные, 2-элементные, 3-элементные и т.д. Большинство из них будет содержаться в каком то одном эквивалентном классе. Чтобы определить в каком именно, разберем каждый случай в отдельности. Показанный ниже алгоритм выигрыша первого игрока имеет два различных варианта рассмотрения: линейный порядок содержит η или не содержит. Рассмотрение каждого из вариантов покажем ниже.

$A \simeq \zeta + 1 + \zeta$ $B \simeq \zeta + 2 + \zeta$

Алгоритм победы первого игрока здесь очевиден: на первом ходе первый игрок выбирает любой элемент из B из двухэлементного блока. В ответ, второй игрок может выбрать элемент либо из ζ либо из одноэлеентного блока. В первом случае, на втром ходе первыигрок должен выбрать соседний элемент слева из A. Тогда втрому игроку придется брать на элемент меньше из B. После этого, третьим ходом первый игрок вставляет элемент между первым и вторым выбранном в B, чего не может сделать второй игрок, и выигрывает. Теперь рассмотрим второй случай. Здесь уже первому игроку на втором ходе необходимо выбрать соседний элемент справа из B. Второй игрок тогда на втором ходе должен выбрать на элемент больше из A, то есть из ζ. И аналогичны первому рассмотренному случаю, используя плотность между элементами выигрывает первый игрок.

$A \simeq \zeta + 2 + \zeta$, $B \simeq \zeta + 3 + \zeta$.

В этой игре всегда выигрывает второй игрок. Если на первом ходе первый игрок возьмет элемент из A, тогда второму игроку для победы достаточно просто копировать ходы. Поэтому нет смысла подробного рассмотрения данной игры. Разберем более нетривиальный случай, когда первый игрок выбирает элемент из B. Интерес здесь будет составлять только рассмотрения случая, при котором выбираются элементы из трехэлементного блока. Иначе второму игроку достаточно тривиального копирования ходов. Итак, если первым ходом первый игрок выбирает любой из крайних элементов конечного блока из B, тогда второй игрок также выбирает крайние элементы аналогичного блока из A. Далее второму игроку достаточно делать аналогичные ходы первого игрока, то есть выбирать либо соседние элементы либо через один. В последнем случае, когда первы игрок выбирает втрой элемент трехэлементного блока из B, тогда второй игрок первым ходом берет любой элемент из ζ. После этого второму игроку необходимо для победы делать идентичные первому игроку ходы, как и в описанным выше случае с крайними элементами. Таким образом, разобрав все варианты получаем, что два данных линейных порядка находятся в одном классе эквивалентности.

$A \cong \zeta + k + \zeta$, $B \cong \zeta + (k+1) + \zeta$, $k \neq 3$.

Здесь второй игрок может просто брать такие же элементы как и первый игрок, то есть либо из ζ либо крайние или средние (около средних) элементы. Поэтому все это образует один класс эквивалетности.

Теперь рассмотрим случай с плотными линейными порядками.

$A \cong \eta + 1 + \eta$, $B \cong \eta$.

Выше уже упоминалось о том, что порядковый тип η представляет собой бесконечной сумму одноэлементных блоков. Отсюда можно сделать вывод, что добавив в эту сумму такой же блок, структура блочного типа останется прежней. Поэтому A и B лежат в одном эквивалентном классе.

$A \cong \eta + 1 + \eta$, $B \cong \eta + 2 + \eta$.

Схема выигрыша первого игрока здесь такая же как и в случае когда $A \cong \zeta + 1 + \zeta$ и $B \cong \zeta + 2 + \zeta$. Поэтому сразу же разбиваем эти порядки на различные классы эквивалентности.

$A \cong \eta + 2 + \eta$, $B \cong \eta + 3 + \eta$.

Этот случай похож на выше описанный. На первом ходе первый игрок выбирает второй элемент трехэлементного блока из B. Если в ответ второй игрок выбирает элемент η блока из A, тогда выбирая следующим ходом соседний элемент из B, первый игрок, в силу различной плотности между элемент рассматриваемых линейных порядков, одерживает победу. Если на первом ходе второй игрок выбирает крайние элементы двухэлементного блока из A, тогда следующим ходом первый игрок берет на элемент больше или меньше из B и используя плотность между элементами, также одерживает победу.

$A \cong \eta + k + \eta$, $B \cong \eta + (k+1) + \eta$, $k \geq 3$.

Используя аналогичные рассуждения как и в случае $A \cong \zeta + k + \zeta$, $B \cong \zeta + (k+1) + \zeta$ получаем один и тот же класс эквивелнтности.

Из рассмотренных вариантов можно сделать вывод, что невозможно построить новый класс эквивалетности добавлением одноэлементного блока между порядковыми типами η. С другой стороны, если имеется линейный порядок, содержащий блочный тип ζ, тогда добавление трехэлементного блока не приведет к построению нового класса эквивалентности. Подводя итог вышесказанному, получаем следующих представителей классов эквивалетности:

$$\eta+2+\eta, \eta+3+\eta, \zeta+1+\zeta, \zeta+2+\zeta, \eta+1+\zeta, \eta+2+\zeta, \omega^*+\eta+1+\zeta, \omega^*+\eta+2+\zeta,$$

$$\omega^*+\eta+2+\eta, \omega^*+\eta+3+\eta, \omega^*+\zeta+1+\zeta, \omega^*+\zeta+2+\zeta,$$

$$\eta+2+\eta+\omega, \eta+3+\eta+\omega, \zeta+1+\zeta+\omega, \zeta+2+\zeta+\omega,$$

$$\eta+1+\zeta+\omega, \eta+2+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega,$$

$$\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega.$$

Объядения все классы эквивалентности рассматриваемого типа $(\leftarrow, \rightarrow)$ получаем:

$$\eta, \zeta, \omega^*+\zeta, \zeta+\omega, \omega^*+\zeta+\omega, \eta+\zeta, \omega^*+\eta, \eta+\omega,$$

$$\omega^*+\eta+\omega, \omega^*+\eta+\zeta, \eta+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+\zeta+\omega,$$

$$\eta+2+\eta, \eta+3+\eta, \zeta+1+\zeta, \zeta+2+\zeta, \eta+1+\zeta, \eta+2+\zeta, \omega^*+\eta+1+\zeta, \omega^*+\eta+2+\zeta,$$

$$\omega^*+\eta+2+\eta, \omega^*+\eta+3+\eta, \omega^*+\zeta+1+\zeta, \omega^*+\zeta+2+\zeta,$$

$$\eta+2+\eta+\omega, \eta+3+\eta+\omega, \zeta+1+\zeta+\omega, \zeta+2+\zeta+\omega,$$

$$\eta+1+\zeta+\omega, \eta+2+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega,$$

$$\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega.$$

На этом рассмотрение выбранного типа $(\leftarrow, \rightarrow)$ заканчивается.

Разберём случай $[a, \rightarrow)$. Как было сказано ранее, классы эквивалентности такого типа получаются из разобранного выше, добавлением блоков, имеющих наименьший элемент. Такими блоками являются порядковый тип ω, $k-$элементный блок и $\omega+k$. Добавление $k-$элементных блоков будет аналогично тому, как были добавлены эти же конечне блоки в середину порядкового типа ζ. Поэтому построим новые классы эквивалентности используя 1-элементные, 2-элементные и 3-элементные блоки. Как итог получаем следующее:

$$1+\eta, 2+\eta, 3+\eta, 1+\zeta, 2+\zeta, 3+\zeta, 1+\omega^*+\zeta, 2+\omega^*+\zeta, 3+\omega^*+\zeta, 1+\zeta+\omega,$$

$$2+\zeta+\omega, 3+\zeta+\omega, 1+\omega^*+\zeta+\omega, 2+\omega^*+\zeta+\omega, 3+\omega^*+\zeta+\omega,$$
$$1+\eta+\zeta, 2+\eta+\zeta, 3+\eta+\zeta, 1+\omega^*+\eta, 2+\omega^*+\eta, 3+\omega^*+\eta, 1+\eta+\omega,$$
$$2+\eta+\omega, 3+\eta+\omega, 1+\omega^*+\eta+\omega, 2+\omega^*+\eta+\omega, 3+\omega^*+\eta+\omega,$$
$$1+\omega^*+\eta+\zeta, 2+\omega^*+\eta+\zeta, 3+\omega^*+\eta+\zeta, 1+\eta+\zeta+\omega, 2+\eta+\zeta+\omega,$$
$$3+\eta+\zeta+\omega, 1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega, 2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega, 3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega.$$

Отдельно необходимо рассмотреть случай, когда в представителе определенного класса эквивалентности уже присутствует конечный блок. То есть, например, если к линейному порядку $\eta+1+\eta$ добавить в начало 1-элементный блок, получим $1+\eta+1+\eta$. Таким образом получим линейный порядок состоящий из повторяющихся блоков, который будет эквивалентен $1+\eta$. Следовательно, чтобы избежать повторения блоков в линейных порядках, необходимо добавлять $k-$элементные блоки, отличные от уже входящих в этот линейный порядок. В данном случае это 2-элементные или 3-элементные блоки. В результате оставшиеся эквивалентные классы будут выглядеть следующим образом:

$$1+\eta+2+\eta, 3+\eta+2+\eta, 1+\eta+3+\eta, 2+\eta+3+\eta, 2+\zeta+1+\zeta, 3+\zeta+1+\zeta,$$

$$1+\zeta+2+\zeta, 3+\zeta+2+\zeta, 1+\eta+1+\zeta, 2+\eta+1+\zeta, 3+\eta+1+\zeta, 1+\eta+2+\zeta,$$
$$2+\eta+2+\zeta, 3+\eta+2+\zeta, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\zeta, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta, 1+\omega^*+\eta+2+\eta,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\eta, 3+\omega^*+\eta+2+\eta, 1+\omega^*+\eta+3+\eta, 2+\omega^*+\eta+3+\eta,$$
$$3+\omega^*+\eta+3+\eta, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta,$$
$$2+\omega^*+\zeta+2+\zeta, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta, 1+\eta+2+\eta+\omega, 3+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$1+\eta+3+\eta+\omega, 2+\eta+3+\eta+\omega, 2+\zeta+1+\zeta+\omega, , 3+\zeta+1+\zeta+\omega,$$
$$3+\zeta+2+\zeta+\omega, 1+\eta+1+\zeta+\omega, 2+\eta+1+\zeta+\omega, 3+\eta+1+\zeta+\omega,$$
$$2+\eta+2+\zeta+\omega, 3+\eta+2+\zeta+\omega, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega,$$
$$2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega,$$
$$3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2+\zeta, 1+\zeta+2+\zeta+\omega, 1+\eta+2+\zeta+\omega, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega,$$
$$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega.$$

Теперь построим эквивалентные классы, добавлением блока ω:

$$\omega+\eta, \omega+\zeta, \omega+\omega^*+\zeta, \omega+\zeta+\omega, \omega+\omega^*+\zeta+\omega, \omega+\eta+\zeta,$$

$$\omega+\omega^*+\eta+\omega, \omega+\omega^*+\eta+\zeta, \omega+\eta+\zeta+\omega, \omega+\omega^*+\eta+\zeta+\omega,$$
$$\omega+\eta+2+\eta, \omega+\eta+3+\eta, \omega+\zeta+1+\zeta, \omega+\zeta+2+\zeta, \omega+\eta+1+\zeta,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+2+\eta, \omega+\omega^*+\eta+3+\eta, \omega+\omega^*+\zeta+1+\zeta, \omega+\omega^*+\zeta+2+\zeta,$$
$$\omega+\eta+2+\eta+\omega, \omega+\eta+3+\eta+\omega, \omega+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega+\zeta+2+\zeta+\omega,$$
$$\omega+\eta+1+\zeta+\omega, \omega+\eta+2+\zeta+\omega, \omega+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega,$$
$$\omega+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, \omega+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$\omega+\omega^*+\eta, \omega+\eta+\omega, \omega+\eta+2+\zeta, \omega+\omega^*+\eta+1+\zeta, \omega+\omega^*+\eta+2+\zeta,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega, \omega+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega.$$

Остается последний случай, когда линейные порядки начинаются с блоков вида $\omega+k$. Для этого будет достаточно добавить блок ω к классам эквивалентности получившиеся добавлением $k-$элементных блоков:

$$\omega+1+\eta, \omega+2+\eta, 3+\eta, \omega+1+\zeta, \omega+2+\zeta, \omega+3+\zeta, \omega+1+\omega^*+\zeta,$$

$$\omega+3+\omega^*+\zeta, \omega+1+\zeta+\omega, \omega+2+\zeta+\omega, \omega+3+\zeta+\omega,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+\omega, \omega+3+\omega^*+\zeta+\omega, \omega+1+\zeta+2+\zeta, \omega+3+\zeta+2+\zeta,$$
$$\omega+1+\eta+\zeta, \omega+2+\eta+\zeta, \omega+3+\eta+\zeta, \omega+1+\omega^*+\eta, \omega+2+\omega^*+\eta,$$
$$\omega+2+\eta+\omega, \omega+3+\eta+\omega, \omega+1+\omega^*+\eta+\omega, \omega+2+\omega^*+\eta+\omega,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+\zeta, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta, \omega+1+\eta+\zeta+\omega,$$
$$\omega+3+\eta+\zeta+\omega, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega,$$
$$\omega+1+\eta+2+\eta, \omega+3+\eta+2+\eta, \omega+1+\eta+3+\eta, \omega+2+\eta+3+\eta, \omega+2+\zeta+1+\zeta,$$
$$\omega+1+\eta+1+\zeta, \omega+2+\eta+1+\zeta, \omega+3+\eta+1+\zeta, \omega+1+\eta+2+\zeta,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta, \omega+1+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$\omega+1+\eta+3+\eta+\omega, \omega+2+\eta+3+\eta+\omega, \omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega,$$
$$\omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega, \omega+1+\eta+1+\zeta+\omega, \omega+2+\eta+1+\zeta+\omega,$$

$$\omega+2+\eta+2+\zeta+\omega, \omega+3+\eta+2+\zeta+\omega, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta, \omega+1+\omega^*+\zeta+\omega, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta, 1+\eta+\omega, \omega+3+\omega^*+\eta+\omega, \omega+2+\eta+\zeta+\omega,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega, \omega+3+\zeta+1+\zeta, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta,$$
$$\omega+2+\eta+2+\zeta, \omega+3+\eta+2+\zeta, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta, \omega+3+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta, \omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega,$$
$$\omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega+3+\eta+1+\zeta+\omega, \omega+1+\eta+2+\zeta+\omega,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega.$$

В конце добавляем сам класс эквивалентности ω. Итак, для случая $[a,\rightarrow)$ получены все классы эквивалентности. Случай $(\leftarrow,b]$ является симметричным к уже разобранному виду $[a,\rightarrow)$. Здесь необходимо рассмотреть все линейные порядки оканчивающиеся блоками ω^*, $k-$элементные блоки, $k+\omega^*$. Поэтому нет смысла проводить рассмотрение всех эквивалентных классов. Достаточно будет перенести $k-$элементные блоки из начала в конец, а случай ω и $\omega+k$ заменить на ω^* и $k+\omega^*$ соответственно и также перенести в конец линейного порядка. В результате получаем классы эквивалентности описанные ниже. Соответственно с $k-$элементными блоками в конце получаем:

$$\eta+1, \eta+2, \eta+3, \zeta+1, \zeta+2, \zeta+3, \omega^*+\zeta+1, \omega^*+\zeta+2, \omega^*+\zeta+3, \zeta+\omega+1,$$
$$\zeta+\omega+2, \zeta+\omega+3, \omega^*+\zeta+\omega+1, \omega^*+\zeta+\omega+2, \omega^*+\zeta+\omega+3,$$
$$\eta+\zeta+1, \eta+\zeta+2, \eta+\zeta+3, \omega^*+\eta+1, \omega^*+\eta+2, \omega^*+\eta+3, \eta+\omega+1,$$
$$\eta+\omega+2, \eta+\omega+3, \omega^*+\eta+\omega+1, \omega^*+\eta+\omega+2, \omega^*+\eta+\omega+3,$$
$$\omega^*+\eta+\zeta+1, \omega^*+\eta+\zeta+2, \omega^*+\eta+\zeta+3, \eta+\zeta+\omega+1, \eta+\zeta+\omega+2,$$
$$\eta+\zeta+\omega+3, \omega^*+\eta+\zeta+\omega+1, \omega^*+\eta+\zeta+\omega+2, \omega^*+\eta+\zeta+\omega+3,$$
$$\eta+2+\eta+1, \eta+2+\eta+3, \eta+3+\eta+1, \eta+3+\eta+2, \zeta+1+\zeta+2, \zeta+1+\zeta+3,$$

$$\zeta+2+\zeta+1, \zeta+2+\zeta+3, \eta+1+\zeta+1, \eta+1+\zeta+2, \eta+1+\zeta+3, \eta+2+\zeta+1,$$
$$\eta+2+\zeta+2, \eta+2+\zeta+3, \omega^*+\eta+1+\zeta+1, \omega^*+\eta+1+\zeta+2, \omega^*+\eta+1+\zeta+3,$$
$$\omega^*+\eta+2+\zeta+1, \omega^*+\eta+2+\zeta+2, \omega^*+\eta+2+\zeta+3, \omega^*+\eta+2+\eta+1,$$
$$\omega^*+\eta+2+\eta+2, \omega^*+\eta+2+\eta+3, \omega^*+\eta+3+\eta+1, \omega^*+\eta+3+\eta+2,$$
$$\omega^*+\eta+3+\eta+3, \omega^*+\zeta+1+\zeta+1, \omega^*+\zeta+1+\zeta+2, \omega^*+\zeta+1+\zeta+3,$$
$$\omega^*+\zeta+2+\zeta+2, \omega^*+\zeta+2+\zeta+3, \eta+2+\eta+\omega+1, \eta+2+\eta+\omega+3,$$
$$\eta+3+\eta+\omega+1, \eta+3+\eta+\omega+2, \zeta+1+\zeta+\omega+2, \zeta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$\zeta+2+\zeta+\omega+3, \eta+1+\zeta+\omega+1, \eta+1+\zeta+\omega+2, \eta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$\eta+2+\zeta+\omega+2, \eta+2+\zeta+\omega+3, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$
$$\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2, \omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3, \omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2,$$
$$\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3,$$
$$\omega^*+\zeta+2+\zeta+1, \zeta+2+\zeta+\omega+1, \eta+2+\zeta+\omega+1, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1, \omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3.$$

Теперь добавим ω^*:

$$\eta+\omega^*, \zeta+\omega^*, \omega^*+\zeta+\omega^*, \zeta+\omega+\omega^*, \omega^*+\zeta+\omega+\omega^*, \eta+\zeta+\omega^*,$$

$$\omega^*+\eta+\omega+\omega^*, \omega^*+\eta+\zeta+\omega^*, \eta+\zeta+\omega+\omega^*, \omega^*+\eta+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\eta+2+\eta+\omega^*, \eta+3+\eta+\omega^*, \zeta+1+\zeta+\omega^*, \zeta+2+\zeta+\omega^*, \eta+1+\zeta+\omega^*,$$
$$\omega^*+\eta+2+\eta+\omega^*, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega^*, \omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega^*, \omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega^*,$$
$$\eta+2+\eta+\omega+\omega^*, \eta+3+\eta+\omega+\omega^*, \zeta+1+\zeta+\omega+\omega^*, \zeta+2+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\eta+1+\zeta+\omega+\omega^*, \eta+2+\zeta+\omega+\omega^*, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+\omega^*, \omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega^*+\eta+\omega^*, \eta+\omega+\omega^*, \eta+2+\zeta+\omega^*, \omega^*+\eta+1+\zeta+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega^*,$$
$$\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+\omega^*, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega+\omega^*.$$

И в конце $k+\omega^*$:

$$\eta+1+\omega^*, \eta, 3+\eta+2+\omega^*, \zeta+1+\omega^*, \zeta+2+\omega^*, \zeta+3+\omega^*, \omega^*+\zeta+1+\omega^*,$$

$$\omega^* + \zeta + 3 + \omega^*, \zeta + \omega + 1 + \omega^* + 2 + \omega^*, \zeta + \omega, \zeta + \omega + 3 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \zeta + \omega + 2 + \omega^*, \omega^* + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \zeta + 2 + \zeta + 1 + \omega^*, \zeta + 2 + \zeta + 3 + \omega^*,$$
$$\eta + \zeta + 1 + \omega^*, \eta + \zeta + 2 + \omega^*, \eta + \zeta + 3 + \omega^*, \omega^* + \eta + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + 2 + \omega^*,$$
$$\eta + \omega + 2 + \omega^*, \eta + \omega + 3 + \omega^*, \omega^* + \eta + \omega + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + \omega + 2 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + \zeta + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + \zeta + 2 + \omega^*, \omega^* + \eta + \zeta + 3 + \omega^*, \eta + \zeta + \omega + 1 + \omega^*,$$
$$\eta + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \omega^* + \eta + \zeta + \omega + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + \zeta + \omega + 2 + \omega^*,$$
$$\eta+2+\eta+1+\omega^*, \eta+2+\eta+3+\omega^*, \eta+3+\eta+1+\omega^*, \eta+3+\eta+2+\omega^*, \zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$$
$$\eta + 1 + \zeta + 1 + \omega^*, \eta + 1 + \zeta + 2 + \omega^*, \eta + 1 + \zeta + 3 + \omega^*, \eta + 2 + \zeta + 1 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + 1 + \zeta + 2 + \omega^*, \omega^* + \eta + 1 + \zeta + 3 + \omega^*, \omega^* + \eta + 2 + \zeta + 1 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + 2 + \eta + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + 2 + \eta + 2 + \omega^*, \omega^* + \eta + 2 + \eta + 3 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + 3 + \eta + 3 + \omega^*, \omega^* + \zeta + 1 + \zeta + 1 + \omega^*, \omega^* + \zeta + 1 + \zeta + 2 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \zeta + 2 + \zeta + 2 + \omega^*, \omega^* + \zeta + 2 + \zeta + 3 + \omega^*, \eta + 2 + \eta + \omega + 1 + \omega^*,$$
$$\eta + 3 + \eta + \omega + 1 + \omega^*, \eta + 3 + \eta + \omega + 2 + \omega^*, \zeta + 1 + \zeta + \omega + 2 + \omega^*,$$
$$\zeta + 2 + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \eta + 1 + \zeta + \omega + 1 + \omega^*, \eta + 1 + \zeta + \omega + 2 + \omega^*,$$
$$\eta + 2 + \zeta + \omega + 2 + \omega^*, \eta + 2 + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \omega^* + \eta + 1 + \zeta + \omega + 1 + \omega^*,$$
$$\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega^* + \zeta + 1 + \zeta + \omega + 2 + \omega^*, \omega^* + \zeta + 1 + \zeta + \omega + 3 + \omega^*,$$
$$\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega^* + \zeta + 2 + \omega^*, \omega^* + \zeta + \omega + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + 1 + \zeta + \omega + 3 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + 3 + \omega^*, \eta + \omega + 1 + \omega^*, \omega^* + \eta + \omega + 3 + \omega^*, \eta + \zeta + \omega + 2 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \omega + 3 + \zeta + 1 + \zeta, \omega^* + \eta + 2 + \zeta + 3 + \omega^*,$$
$$\eta + 2 + \zeta + 2 + \omega^*, \eta + 2 + \zeta + 3 + \omega^*, \omega^* + \eta + 1 + \zeta, \omega^* + \eta + 2 + \zeta + 2 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \eta + 3 + \eta + 2 + \omega^*, \omega^* + \eta + 3 + \eta + 1 + \omega^*, \eta + 2 + \eta + \omega + 3 + \omega^*,$$
$$\omega^* + \zeta + 1 + \zeta + 3 + \omega^*, \omega^* + \zeta + 2 + \zeta + 1 + \omega^*, \zeta + 2 + \zeta + \omega + 1 + \omega^*,$$
$$\zeta + 1 + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \eta + 1 + \zeta + \omega + 3 + \omega^*, \eta + 2 + \zeta + \omega + 1 + \omega^*,$$
$$\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega^* + \zeta + 2 + \zeta + \omega + 1 + \omega^*, \omega^* + \zeta + 2 + \zeta + \omega + 2 + \omega^*.$$

Последний случай, который необходимо разобрать для получения всех классов эквивалентности является $[a, b]$. Построение всех эквивалентных классов в нем будет осуществлять с помощью ранее разобранных случаев $(\leftarrow, b]$ и $[a, \rightarrow)$. Объединив эти два множества классов, получим искомые классы эквивалентности. Смысл алгоритма объединения заключается в том, чтобы взять все получившиеся линейные порядки с наименьшими элементами из $[a, \rightarrow)$ и добавить к ним блоки с наибольшими элементами из $(\leftarrow, b]$, а именно добавлением блоков ω, k, $\omega+k$ и ω^*, k, $k+\omega^*$ соответственно. Объединив таким способом все эквивалентные классы, в результате получи необходимое множество всех возможных классов рассматриваемого случая. В начале опишем классы с $k-$элементными блоками на концах:

$$1+\eta+1, 1+\eta+2, 1+\eta+3, 2+\eta+1, 2+\eta+2, 2+\eta+3, 3+\eta+2, 3+\eta+2, 3+\eta+3, 1+\zeta+1,$$

$$1+\zeta+2, 1+\zeta+3, 2+\zeta+1, 2+\zeta+2, 2+\zeta+3, 3+\zeta+1, 3+\zeta+2, 3+\zeta+3, 1+\omega^*+\zeta+1,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2, 1+\omega^*+\zeta+3, 2+\omega^*+\zeta+1, 2+\omega^*+\zeta+2, 2+\omega^*+\zeta+3,$$
$$3+\omega^*+\zeta+1, 3+\omega^*+\zeta+2, 3+\omega^*+\zeta+3, 1+\zeta+\omega+1, 1+\zeta+\omega+2, 1+\zeta+\omega+3,$$
$$2+\zeta+\omega+1, 2+\zeta+\omega+2, 2+\zeta+\omega+3, 3+\zeta+\omega+1, 3+\zeta+\omega+2, 3+\zeta+\omega+3,$$
$$1+\omega^*+\zeta+\omega+1, 1+\omega^*+\zeta+\omega+2, 1+\omega^*+\zeta+\omega+3, 2+\omega^*+\zeta+\omega+1,$$
$$2+\omega^*+\zeta+\omega+2, 2+\omega^*+\zeta+\omega+3, 3+\omega^*+\zeta+\omega+1, 3+\omega^*+\zeta+\omega+2,$$
$$3+\omega^*+\zeta+\omega+3, 1+\eta+\zeta+1, 1+\eta+\zeta+2, 1+\eta+\zeta+3, 2+\eta+\zeta+1,$$
$$2+\eta+\zeta+2, 2+\eta+\zeta+3, 3+\eta+\zeta+1, 3+\eta+\zeta+2, 3+\eta+\zeta+3, 1+\omega^*+\eta+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+2, 1+\omega^*+\eta+3, 2+\omega^*+\eta+3, 2+\omega^*+\eta+2, 2+\omega^*+\eta+3,$$
$$3+\omega^*+\eta+1, 3+\omega^*+\eta+2, 3+\omega^*+\eta+3, 1+\eta+\omega+1, 1+\eta+\omega+2, 1+\eta+\omega+3,$$
$$2+\eta+\omega+1, 2+\eta+\omega+2, 2+\eta+\omega+3, 3+\eta+\omega+1, 3+\eta+\omega+2, 3+\eta+\omega+3,$$
$$1+\omega^*+\eta+\omega+1, 1+\omega^*+\eta+\omega+2, 1+\omega^*+\eta+\omega+3, 2+\omega^*+\eta+\omega+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+\omega+2, 2+\omega^*+\eta+\omega+3, 3+\omega^*+\eta+\omega+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+\omega+2, 3+\omega^*+\eta+\omega+3, 1+\omega^*+\eta+\zeta+1, 1+\omega^*+\eta+\zeta+2,$$
$$1+\omega^*+\eta+\zeta+3, 2+\omega^*+\eta+\zeta+1, 2+\omega^*+\eta+\zeta+2, 2+\omega^*+\eta+\zeta+3,$$
$$3+\omega^*+\eta+\zeta+1, 3+\omega^*+\eta+\zeta+2, 3+\omega^*+\eta+\zeta+3, 1+\eta+\zeta+\omega+1, 1+\eta+\zeta+\omega+2,$$
$$1+\eta+\zeta+\omega+3, 2+\eta+\zeta+\omega+1, 2+\eta+\zeta+\omega+2, 2+\eta+\zeta+\omega+3,$$
$$3+\eta+\zeta+\omega+1, 3+\eta+\zeta+\omega+2, 3+\eta+\zeta+\omega+3, 1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2, 1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3, 2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1,$$

$$2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2, 2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3, 3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2, 3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3.$$

В случае когда класс эквивалентности представляет собой порядковый тип со всталенными в середину $k-$элементными блоками, необходимо поступать так же, как и при описании этих же блоков в $[a, \rightarrow)$ и $(\leftarrow, b]$, тоесть на концах должны быть конечные блоки отличные от тех которые уже присутствуют в представителе класса.Опишем их:

$$1+\eta+2+\eta+1, 1+\eta+2+\eta+3, 3+\eta+2+\eta+1, 3+\eta+2+\eta+3, 1+\eta+3+\eta+1,$$

$$1+\eta+3+\eta+2, 2+\eta+3+\eta+1, 2+\eta+3+\eta+2, 2+\zeta+1+\zeta+2, 2+\zeta+1+\zeta+3,$$
$$3+\zeta+1+\zeta+2, 3+\zeta+1+\zeta+3, 1+\eta+1+\zeta+1, 1+\eta+1+\zeta+2, 1+\eta+1+\zeta+3,$$
$$1+\zeta+2+\zeta+1, 1+\zeta+2+\zeta+3, 3+\zeta+2+\zeta+1, 3+\zeta+2+\zeta+3.$$

Оставшиеся классы описываем так же, как и ранее:

$$2+\eta+1+\zeta+1,$$

$$2+\eta+1+\zeta+2, 2+\eta+1+\zeta+3, 3+\eta+1+\zeta+1, 3+\eta+1+\zeta+2, 3+\eta+1+\zeta+3,$$
$$1+\eta+2+\zeta+1, 1+\eta+2+\zeta+2, 1+\eta+2+\zeta+3, 2+\eta+2+\zeta+1, 2+\eta+2+\zeta+2,$$
$$2+\eta+2+\zeta+3, 3+\eta+2+\zeta+1, 3+\eta+2+\zeta+2, 3+\eta+2+\zeta+3, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+1+\zeta+2, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+3, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+1+\zeta+2, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+3, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+1+\zeta+2, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+3, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\zeta+2, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+3, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\zeta+2, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+3, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\zeta+2, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+3, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\eta+2, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+3, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\eta+2, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+3, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\eta+2, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+3, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\eta+2, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+3, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+3+\eta+2, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+3, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+3+\eta+2, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+3, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+1,$$

$$3+\omega^*+\eta+3+\eta+2, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+3, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1,$$
$$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1,$$
$$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1,$$
$$2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1,$$
$$3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1,$$
$$2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1,$$
$$3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3, 1+\eta+2+\eta+\omega+1,$$
$$1+\eta+2+\eta+\omega+2, 1+\eta+2+\eta+\omega+3, 3+\eta+2+\eta+\omega+1, 3+\eta+2+\eta+\omega+2,$$
$$3+\eta+2+\eta+\omega+3, 1+\eta+3+\eta+\omega+1, 1+\eta+3+\eta+\omega+2, 1+\eta+3+\eta+\omega+3,$$
$$2+\eta+3+\eta+\omega+1, 2+\eta+3+\eta+\omega+2, 2+\eta+3+\eta+\omega+3, 2+\zeta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$2+\zeta+1+\zeta+\omega+2, 2+\zeta+1+\zeta+\omega+3, 3+\zeta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$3+\zeta+1+\zeta+\omega+2, 3+\zeta+1+\zeta+\omega+3, 3+\zeta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$3+\zeta+2+\zeta+\omega+2, 3+\zeta+2+\zeta+\omega+3, 1+\eta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$1+\eta+1+\zeta+\omega+2, 1+\eta+1+\zeta+\omega+3, 2+\eta+1+\zeta+\omega+1, 2+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$
$$2+\eta+1+\zeta+\omega+3, 3+\eta+1+\zeta+\omega+1, 3+\eta+1+\zeta+\omega+2, 3+\eta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$2+\eta+2+\zeta+\omega+1, 2+\eta+2+\zeta+\omega+2, 2+\eta+2+\zeta+\omega+3, 3+\eta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$3+\eta+2+\zeta+\omega+2, 3+\eta+2+\zeta+\omega+3, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2,$$

$$2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1$$
$$1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3,$$
$$2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2,$$
$$2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1,$$
$$3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3,$$
$$1+\zeta+2+\zeta+\omega+1, 1+\zeta+2+\zeta+\omega+2, 1+\zeta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$1+\eta+2+\zeta+\omega+1, 1+\eta+2+\zeta+\omega+2, 1+\eta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$
$$3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3.$$

Далее опишем классы замкнутые блоками ω и ω^* на концах линейных порядков:

$$\omega+\eta+\omega^*, \omega+\zeta+\omega^*, \omega+\omega^*+\zeta+\omega^*, \omega+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\eta+\zeta+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+\zeta+\omega^*, \omega+\eta+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\eta+2+\eta+\omega^*, \omega+\eta+3+\eta+\omega^*,$$
$$\omega+\zeta+1+\zeta+\omega^*, \omega+\zeta+2+\zeta+\omega^*, \omega+\eta+1+\zeta+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega^*, \omega+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega^*, \omega+\eta+2+\eta+\omega+\omega^*, \omega+\eta+3+\eta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\zeta+1+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\zeta+2+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\eta+1+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\eta+2+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+\omega^*, \omega+\eta+\omega+\omega^*,$$
$$\omega+\eta+2+\zeta+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega^*,$$
$$\omega+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+\omega^*, \omega+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+\omega^*.$$

Теперь к построенным классам, начинающихся и оканчивающихся на конечные блоки добавим вначале блок ω :

$$\omega+1+\eta+1, \omega+1+\eta+2, \omega+1+\eta+3, \omega+2+\eta+1, \omega+2+\eta+2, \omega+2+\eta+3,$$

$$\omega+3+\eta+2, \omega+3+\eta+2, \omega+3+\eta+3, \omega+1+\zeta+1, \omega+1+\zeta+2,$$

$$\omega+1+\zeta+3, \omega+2+\zeta+1, \omega+2+\zeta+2, \omega+2+\zeta+3, \omega+3+\zeta+1,$$

$$\omega+3+\zeta+2, \omega+3+\zeta+3, \omega+1+\omega^*+\zeta+1, \omega+1+\omega^*+\zeta+2,$$

$$\omega+1+\omega^*+\zeta+3, \omega+2+\omega^*+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+2, \omega+2+\omega^*+\zeta+3,$$

$$\omega+3+\omega^*+\zeta+1, \omega+3+\omega^*+\zeta+2, \omega+3+\omega^*+\zeta+3, \omega+1+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+1+\zeta+\omega+2, \omega+1+\zeta+\omega+3, \omega+2+\zeta+\omega+1, \omega+2+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\zeta+\omega+3, \omega+3+\zeta+\omega+1, \omega+3+\zeta+\omega+2, \omega+3+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+1+\omega^*+\zeta+\omega+1, \omega+1+\omega^*+\zeta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+2+\omega^*+\zeta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+\omega+2, \omega+2+\omega^*+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+3+\omega^*+\zeta+\omega+1, \omega+3+\omega^*+\zeta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+1+\eta+\zeta+1, \omega+1+\eta+\zeta+2, \omega+1+\eta+\zeta+3, \omega+2+\eta+\zeta+1,$$

$$\omega+2+\eta+\zeta+2, \omega+2+\eta+\zeta+3, \omega+3+\eta+\zeta+1, \omega+3+\eta+\zeta+2,$$

$$\omega+3+\eta+\zeta+3, \omega+1+\omega^*+\eta+1, \omega+1+\omega^*+\eta+2, \omega+1+\omega^*+\eta+3,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+3, \omega+2+\omega^*+\eta+2, \omega+2+\omega^*+\eta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+1,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2, \omega+3+\omega^*+\eta+3, \omega+1+\eta+\omega+1, \omega+1+\eta+\omega+2,$$

$$\omega+1+\eta+\omega+3, \omega+2+\eta+\omega+1, \omega+2+\eta+\omega+2, \omega+2+\eta+\omega+3,$$

$$\omega+3+\eta+\omega+1, \omega+3+\eta+\omega+2, \omega+3+\eta+\omega+3, \omega+1+\omega^*+\eta+\omega+1,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\eta+\omega+3, \omega+2+\omega^*+\eta+\omega+1,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+\omega+2, \omega+2+\omega^*+\eta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\eta+\omega+1,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\eta+\omega+3, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+1,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+2, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+3, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+1,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+2, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+1,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+2, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+3, \omega+1+\eta+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+1+\eta+\zeta+\omega+2, \omega+1+\eta+\zeta+\omega+3, \omega+2+\eta+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+2+\eta+\zeta+\omega+2, \omega+2+\eta+\zeta+\omega+3, \omega+3+\eta+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+3+\eta+\zeta+\omega+2, \omega+3+\eta+\zeta+\omega+3, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega+1+\eta+2+\eta+1, \omega+1+\eta+2+\eta+3, \omega+3+\eta+2+\eta+1, \omega+3+\eta+2+\eta+3,$$
$$\omega+1+\eta+3+\eta+1, \omega+1+\eta+3+\eta+2, \omega+2+\eta+3+\eta+1, \omega+2+\eta+3+\eta+2,$$
$$\omega+2+\zeta+1+\zeta+2, \omega+2+\zeta+1+\zeta+3, \omega+3+\zeta+1+\zeta+2,$$
$$\omega+3+\zeta+1+\zeta+3, \omega+1+\eta+1+\zeta+1, \omega+1+\eta+1+\zeta+2, \omega+1+\eta+1+\zeta+3,$$
$$\omega+1+\zeta+2+\zeta+1, \omega+1+\zeta+2+\zeta+3, \omega+3+\zeta+2+\zeta+1, \omega+3+\zeta+2+\zeta+3,$$
$$\omega+2+\eta+1+\zeta+1, \omega+2+\eta+1+\zeta+2, \omega+2+\eta+1+\zeta+3,$$
$$\omega+3+\eta+1+\zeta+1, \omega+3+\eta+1+\zeta+2, \omega+3+\eta+1+\zeta+3,$$
$$\omega+1+\eta+2+\zeta+1, \omega+1+\eta+2+\zeta+2, \omega+1+\eta+2+\zeta+3, \omega+2+\eta+2+\zeta+1,$$
$$\omega+2+\eta+2+\zeta+2, \omega+2+\eta+2+\zeta+3, \omega+3+\eta+2+\zeta+1, \omega+3+\eta+2+\zeta+2,$$
$$\omega+3+\eta+2+\zeta+3, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+1, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+2,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+3, \omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+1, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+2,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+3, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+1, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+2,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+3, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+1, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+2,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+3, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+1, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+2,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+3, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+1, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+1, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+2,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+1, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+2,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+3, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+1, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+2,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+3, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+1, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+3, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+1, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+2,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+3, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2,$$

$$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2,$$

$$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2,$$

$$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2,$$

$$\omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2,$$

$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2,$$

$$\omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3, \omega+1+\eta+2+\eta+\omega+1, \omega+1+\eta+2+\eta+\omega+2,$$

$$\omega+1+\eta+2+\eta+\omega+3, \omega+3+\eta+2+\eta+\omega+1, \omega+3+\eta+2+\eta+\omega+2,$$

$$\omega+3+\eta+2+\eta+\omega+3, \omega+1+\eta+3+\eta+\omega+1, \omega+1+\eta+3+\eta+\omega+2,$$

$$\omega+1+\eta+3+\eta+\omega+3, \omega+2+\eta+3+\eta+\omega+1, \omega+2+\eta+3+\eta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\eta+3+\eta+\omega+3, \omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega+1, \omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega+3, \omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega+1, \omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega+3, \omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega+1, \omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega+3, \omega+1+\eta+1+\zeta+\omega+1, \omega+1+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+1+\eta+1+\zeta+\omega+3, \omega+2+\eta+1+\zeta+\omega+1, \omega+2+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\eta+1+\zeta+\omega+3, \omega+3+\eta+1+\zeta+\omega+1, \omega+3+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+3+\eta+1+\zeta+\omega+3, \omega+2+\eta+2+\zeta+\omega+1, \omega+2+\eta+2+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\eta+2+\zeta+\omega+3, \omega+3+\eta+2+\zeta+\omega+1, \omega+3+\eta+2+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+3+\eta+2+\zeta+\omega+3, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2,$$

$$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1,$$

$$\omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3,$$

$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3,$$
$$\omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega+1, \omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega+2, \omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega+1+\eta+2+\zeta+\omega+1, \omega+1+\eta+2+\zeta+\omega+2, \omega+1+\eta+2+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3.$$

После этого добавим к тем же классам эквивалентности добавим в конце блок ω^*:

$$1+\eta+1+\omega^*, 1+\eta+2+\omega^*, 1+\eta+3+\omega^*, 2+\eta+1+\omega^*, 2+\eta+2+\omega^*, 2+\eta+3+\omega^*,$$
$$3+\eta+2+\omega^*, 3+\eta+2+\omega^*, 3+\eta+3+\omega^*, 1+\zeta+1+\omega^*, 1+\zeta+2+\omega^*,$$
$$1+\zeta+3+\omega^*, 2+\zeta+1+\omega^*, 2+\zeta+2+\omega^*, 2+\zeta+3+\omega^*, 3+\zeta+1+\omega^*,$$
$$3+\zeta+2+\omega^*, 3+\zeta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+2+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\zeta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+1+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+2+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+3+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\zeta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+2+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+3+\omega^*, 1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$1+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$

$$2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$1+\omega^*+\zeta+\omega+1+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+\omega+2+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$3+\omega^*+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$1+\eta+\zeta+1+\omega^*, 1+\eta+\zeta+2+\omega^*, 1+\eta+\zeta+3+\omega^*, 2+\eta+\zeta+1+\omega^*,$$

$$2+\eta+\zeta+2+\omega^*, 2+\eta+\zeta+3+\omega^*, 3+\eta+\zeta+1+\omega^*, 3+\eta+\zeta+2+\omega^*,$$

$$3+\eta+\zeta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+3+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\eta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+1+\omega^*,$$

$$3+\omega^*+\eta+2+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+3+\omega^*, 1+\eta+\omega+1+\omega^*, 1+\eta+\omega+2+\omega^*,$$

$$1+\eta+\omega+3+\omega^*, 2+\eta+\omega+1+\omega^*, 2+\eta+\omega+2+\omega^*, 2+\eta+\omega+3+\omega^*,$$

$$3+\eta+\omega+1+\omega^*, 3+\eta+\omega+2+\omega^*, 3+\eta+\omega+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+\omega+1+\omega^*,$$

$$1+\omega^*+\eta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+\omega+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+\omega+1+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\eta+\omega+2+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+\omega+1+\omega^*,$$

$$3+\omega^*+\eta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+\omega+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+\zeta+1+\omega^*,$$

$$1+\omega^*+\eta+\zeta+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+\zeta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+\zeta+1+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\eta+\zeta+2+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+\zeta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+\zeta+1+\omega^*,$$

$$3+\omega^*+\eta+\zeta+2+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+\zeta+3+\omega^*, 1+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$1+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, 2+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$2+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, 2+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$3+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$1+\eta+2+\eta+1+\omega^*, 1+\eta+2+\eta+3+\omega^*, 3+\eta+2+\eta+1+\omega^*, 3+\eta+2+\eta+3+\omega^*,$$

$$1+\eta+3+\eta+1+\omega^*, 1+\eta+3+\eta+2+\omega^*, 2+\eta+3+\eta+1+\omega^*, 2+\eta+3+\eta+2+\omega^*,$$

$$2+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*, 2+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, 3+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$$

$3+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, 1+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, 1+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, 1+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$

$1+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*, 1+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*, 3+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*, 3+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*,$

$2+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, 2+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, 2+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$

$3+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, 3+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, 3+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$

$1+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, 1+\eta+2+\zeta+2+\omega^*, 1+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, 2+\eta+2+\zeta+1+\omega^*,$

$2+\eta+2+\zeta+2+\omega^*, 2+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, 3+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, 3+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$3+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$1+\omega^*+\eta+1+\zeta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$2+\omega^*+\eta+1+\zeta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\eta+1+\zeta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$1+\omega^*+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$2+\omega^*+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*,$

$1+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*,$

$2+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+2+\omega^*,$

$1+\omega^*+\eta+3+\eta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+2+\omega^*,$

$2+\omega^*+\eta+3+\eta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\eta+3+\eta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*, 1+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*, 1+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*,$

$1+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*, 3+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*, 3+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*,$

$3+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*, 1+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, 1+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*,$

$$1+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*, 2+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, 2+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*, 2+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$3+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$3+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 1+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 1+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$1+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 2+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$3+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 2+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$3+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$$

$$2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*,$$
$$1+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 1+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$1+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 1+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, 1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, 2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*, 3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*.$$

Оставшиеся классы эквивалетности построим таким образом, чтобы на концах находился блок ω вначале и блок ω^* в конце. Другими словами, к последним построенным эквивалентным классам добавим в начало блоки ω:

$$\omega+1+\eta+1+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\omega^*, \omega+1+\eta+3+\omega^*, \omega+2+\eta+1+\omega^*,$$
$$\omega+2+\eta+2+\omega^*, \omega+2+\eta+3+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\omega^*,$$
$$\omega+3+\eta+3+\omega^*, \omega+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\zeta+1+\omega^*, \omega+2+\zeta+2+\omega^*, \omega+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\zeta+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+3+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+3+\omega^*, \omega+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$

$$\omega+2+\omega^*+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\eta+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\eta+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\eta+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\eta+\zeta+1+\omega^*, \omega+2+\eta+\zeta+2+\omega^*, \omega+2+\eta+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+3+\eta+\zeta+1+\omega^*, \omega+3+\eta+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\eta+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+1+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+2+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+3+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+3+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+\omega+3+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+1+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+2+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+2+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+2+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+3+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+3+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+3+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$

$$\omega+1+\eta+2+\eta+1+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\eta+3+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\eta+1+\omega^*,$$

$$\omega+3+\eta+2+\eta+3+\omega^*, \omega+1+\eta+3+\eta+1+\omega^*, \omega+1+\eta+3+\eta+2+\omega^*,$$

$$\omega+2+\eta+3+\eta+1+\omega^*, \omega+2+\eta+3+\eta+2+\omega^*, \omega+2+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$$

$$\omega+2+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+1+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+1+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*,$$

$$\omega+3+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+2+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$$

$$\omega+2+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+2+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+2+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+3+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+3+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+1+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+2+\eta+2+\zeta+2+\omega^*, \omega+2+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\zeta+1+\omega^*,$$

$$\omega+3+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+1+\omega^*,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+2+\omega^*,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+1+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+1+\omega^*,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+2+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+3+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+1+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+2+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*,$$

$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*,$$

$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+1+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+2+\omega^*,$$

$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+1+\omega^*,$$

$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+3+\omega^*,$

$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+2+\omega^*,$

$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+1+\omega^*,$

$\omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+3+\omega^*,$

$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*,$

$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*,$

$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*,$

$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+1+\omega^*,$

$\omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+3+\omega^*,$

$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2+\omega^*,$

$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*,$

$\omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*,$

$\omega+1+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*,$

$\omega+1+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*,$

$\omega+3+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*,$

$\omega+1+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*,$

$\omega+1+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*, \omega+2+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*,$

$\omega+2+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+2+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$

$\omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$

$\omega+2+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$

$\omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$

$\omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$

$\omega+3+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$

$\omega+1+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$

$\omega+2+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$

$\omega+2+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$

$\omega+3+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$

$$\omega+2+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+3+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+2+\zeta+3+\omega^*,$$
$$\omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+1+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$

$$\omega+1+\eta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\eta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+2+\omega^*, \omega+1+\omega^*+\zeta+1+\zeta+\omega+3+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+2+\omega^*,$$
$$\omega+2+\omega^*+\zeta+2+\zeta+\omega+3+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+1+\omega^*,$$
$$\omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*+\eta+2+\eta+\omega+3+\omega^*.$$

Остается ко всем этим классам добавить последних представителей классов эквивалентности:

$$\omega+\omega^*, \omega+1+\omega^*, \omega+2+\omega^*, \omega+3+\omega^*.$$

Рассмотрев все возможные типы различных представителей классов эквивалентности, были построены все эквивалентные классы для случа $n=3$.

Заключение

В данной работе были рассмотрены свойства классов эквивалентности на счетных линейных порядках задаваемых играми Эренфойхта-Фрессе. В частности, подробно исследованы двухшаговые и трехшаговые игры и найдены все классы эквивалентности для каждого из этих случаев. Таким образом поставленные цели данной работы были достигнуты. Количество классов эквивалентностей, и представители классов в некоторых случаях, приведены в следующей сводной таблице.

	$n = 2$	$n = 3$
Конечные линейные порядки		
Представители	$\emptyset, 1, 2, 3$	$\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
Количество классов эквивалентности	4	8
Бесконечные линейные порядки		
Количество классов эквивалентности	3	1740
Общее количество классов эквивалентности	**7**	**1748**

Список литературы

[1] Sur quelques classifications des systemes de relations / Roland Fraïssé, thesis, Paris, 1953; Publications Scientifiques de l'Université d'Alger — A1 — 1954 — 35–182.

[2] An application of games to the completeness problem for formalized theories / A. Ehrenfeucht, Fundamenta Mathematicae 49 — 1961 — 129–141

[3] Rosenstein, J.G. Linear orderings [Text]: Introduction to linear orderings / Joseph G. Rosenstein; by ed. Samuel Eilenberg and Hyman Bass. – AP. – 1982. – P. 487.

[4] Ehrenfeucht-Fraisse game//Википедия-свободная энциклопедия. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Ehrenfeucht-Fraisse game