МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И.
ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специальность: 010100 — математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ И АБЕЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Работа завершена:
Студент 05–005 группы математического отделения
____________ 2015г. ____________ (А.Х.Гатауллина)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
____________ 2015г. ____________ (В.В. Шурыгин)
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
____________ 2015г. ____________ (А.М. Елизаров)

Казань — 2015

1 Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник как научное направление в работах Софуса Ли и получил дальнейшее развитие в работах Л.В.Овсянникова. Групповой анализ, в частности, является действенным инструментом при решении задачи эквивалентности классов некоторых уравнений относительно действия заданной группы преобразований. В этом случае необходимо найти все дифференциальные инварианты этого действия. Этих инвариантов бесконечное количество, но они образуют алгебру относительно стандартных арифметических операций. Кроме того, на этой алгебре возникают операции инвариантных дифференцирований, которые позволяют строить новые инварианты по уже найденным. Поэтому для решения задачи достаточно найти базисные инварианты и найти все инвариантные дифференцирования.

В настоящей дипломной работе мы рассматриваем действие группы проективных преобразований зависимой переменной на множестве уравнений Риккати. Мы находим три базисных инварианта и одно инвариантное дифференцирование. Это позволяет полностью описать алгебру дифференциальных инвариантов рассматриваемого действия.

Далее мы рассматриваем обобщение этой задачи, когда к проективным преобразованиям зависимой переменной добавляются произвольные преобразования независимой переменной. В этой задаче уже появляется сингулярный случай, когда правая часть уравнения Риккати есть точный квадрат некоторой линейной функции. В каждом из этих случаев оказывается, что алгебра дифференциальных инвариантов порождается одним инвариантом и одним инвариантным дифференцированием.

В последней главе мы решаем более сложную задачу эквивалентности уравнений Абеля относительно линейной группы преобразований вида $x \mapsto f(x)$, $y \mapsto g(x)y + h(x)$. Алгебра дифференциальных инвариантов порождается одним инвариантом второго порядка и одним инвариантным дифференцированием.

Кроме того, в каждом из рассматриваемых случаев мы доказываем теорему об эквивалентности рассматриваемых уравнений относительно соответствующих групп преобразований.

2 Группы преобразований

Пусть $K \subset \mathbb{R}^r$ — открытый шар в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$ с центром в точке 0. Рассматриваются гладкие отображения

$$f : \mathbb{R}^n \times K \mapsto \mathbb{R}^n \tag{1}$$

и определяемые ими преобразования T_a пространства $\mathbb{R}^n$ в себя:

$$T_a(x) = f(x, a), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad a \in K. \tag{2}$$

При этом координаты точки $a = (a^1, \ldots, a^r)$ из K играют роль параметров преобразований (2). Предполагается, что преобразования существенно зависят от всех r вещественных параметров $a^1, \ldots, a^r$ и что каждое преобразование T_a взаимно однозначно. Пусть, далее, $f(x, 0) = x$, так что T_0 является тождественным преобразованием, и пусть для любого ненулевого значения параметра a соответствующее преобразование T_a отлично от тождественного.

Множество G_r всех преобразований (2), снабженное естественной топологией, называется непрерывной r-параметрической локальной группой преобразований в $\mathbb{R}^n$, если G_r является r-мерной локальной группой Ли относительно групповой операции, задаваемой с помощью умножения преобразований:

$$(T_b \cdot T_a)x = T_b(T_a x) \equiv f(f(x, a), b).$$

Допуская вольность в терминологии, эти локальные группы называют просто группами преобразований. Единицей в группе G_r является тождественное преобразование T_0, произведение $T_b \cdot T_a$ и обратное к T_a преобразование T_a^{-1} определены для любых точек a, b из некоторого открытого шара $K' \subset K$. При этом отображение $\phi : K' \times K' \mapsto K$, определяемое групповой операцией в G_r формулой $T_b \cdot T_a = T_{\phi(a,b)}$, является аналитическим. Значение параметра, соответствующее обратному к T_a преобразованию, обозначается a^{-1}, так что $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$.

Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^n$ множество $G_r(x)$ всех ее образов $T(x)$, $T \in G_r$, образует локальное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Это многообразие называется орбитой, или G_r-орбитой, точки x. Орбитой множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является многообразие $G_r(A) = \cup_{x \in A} G_r(x)$.

Уравнение Ли. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, содержащий точку 0, и G_1 — однопараметрическая группа преобразований

$$T_a x = f(x,a), \quad a \in I \tag{3}$$

в $\mathbb{R}^n$. Орбита точки $x \in \mathbb{R}^n$ представляет собой кривую $a \mapsto f(x,a)$ в $\mathbb{R}^n$, проходящую через x. Касательный вектор к этой кривой в точке x имеет вид

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{4}$$

Формула (3) определяет касательное векторное поле $\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ группы G_1. Векторное поле (3) записывается также в виде линейного дифференциального оператора первого порядка

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5}$$

и называется инфинитезимальным операторм, или кратко оператором, однопараметрической группы G_1 и ее инфинитезимальным оператором (5). А именно, орбита $G_1(x)$ точки x является интегральной кривой уравнения Ли

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad f|_{a=0} = x. \tag{6}$$

Обратно, для любого гладкого векторного поля $\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ и любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует, притом единственное, решение уравнения Ли. Это решение определяет однопараметрическую группу преобразований (3), касательное векторное поле которой совпадают с заданным полем ξ.

Умножение поля ξ на постоянный множитель равносильно линейной замене параметра соответствующей однопараметрической группы, как это видно из уравнения Ли. Поэтому инфинитезимальные операторы рассматриваются с точностью до постоянного множителя.

Алгеброй Ли называется векторное пространство L с умножением (билинейным отображением $(\xi_1, \xi_2) \mapsto [\xi_1, \xi_2]$ произведения $L \times L$ в L), которое антисимметрично

$$[\xi_1, \xi_2] + [\xi_2, \xi_1] = 0$$

и удовлетворяют тождеству Якоби

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$$

для всех $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L$. Произведение $[\xi_1, \xi_2]$ называется *коммутатором* векторов ξ_1 и ξ_2. Любое векторное пространство можно превратить в алгебру Ли. Если, например, определить умножение, полагая $[\xi_1, \xi_2] = 0$ для всех векторов ξ_1, ξ_2 рассматриваемого пространства, то получается алгебра Ли, называемая *коммутативной*, или *абелевой*. *Размерностью* алгебры Ли L называется размерность векторного пространства L.

Центральное место в теории групп Ли занимает соответствие между группами и алгебрами Ли. Каждой r-мерной группе Ли G_r сопоставляется r-мерная алгебра Ли L_r, представляющая собой совокупность векторных полей (с естественным определением их коммутатора) на многообразии G_r, инвариантных относительно левых (или, равносильно, правых) сдвигов группы G_r. С другой стороны, каждая конечномерная алгебра Ли изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли.

Подробнее о группах преобразований см. [2, 3, 4, 5, 6].

Примеры.

1) Группа вращений плоскости Oxy вокруг начала координат

$$\bar{x} = x\cos t + y\sin t, \quad \bar{y} = -x\sin t + y\cos t.$$

Оператор (5) в этом случае имеет вид

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

2) Группа $SL(3)$ проективных преобразований плоскости Oxy

$$\bar{x} = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f}, \quad \bar{y} = \frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}.$$

Тождественные преобразования

$$\frac{ax+by+c}{dx+ey+f} = x, \quad \frac{gx+hy+i}{dx+ey+f} = y$$

получаются при $a = f = h = 1$, $b = c = d = e = g = i = 0$. Группа $SL(3)$ имеет размерность 8, базис ее алгебры Ли образуют операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = y\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_8 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}. \quad (7)$$

Покажем это. Запишем уравнение Ли

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=x,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=y,$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=1,$$

$$\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=-x^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=-xy,$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=-xy,$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=-y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=-1,$$

$$\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=-y,$$

$$\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=x,$$

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=y,$$

$$\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{gx+hy+i}{dx+ey+f}\right)\Big|_{(a=f=h=1,b=c=d=e=g=i=0)}=1.$$

Запишем соответствующие девять векторных полей:

$$x\frac{\partial}{\partial x},\quad y\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x},\quad -x^2\frac{\partial}{\partial x}-xy\frac{\partial}{\partial y},\quad -xy\frac{\partial}{\partial x}-y^2\frac{\partial}{\partial y},$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial x},\quad x\frac{\partial}{\partial y},\quad y\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}.$$

Базис в пространстве их линейных комбинаций действительно образуют поля (7).

Дифференциальные инварианты. Рассмотрим следующую общую ситуацию. Пусть на некотором множестве $\mathcal{S}$ дифференциальных уравнений

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

действует некоторая группа преобразований G. Зададимся вопросом: когда два уравнения из $\mathcal{S}$ являются G-эквивалентными, то есть, когда одно из них можно перевести в другое каким-либо преобразованием $T \in G$? Для ответа на этот вопрос необходимо ввести понятие дифференциального инварианта.

Определение. *(Абсолютным) дифференциальным инвариантом* порядка k действия группы G называется функция I, зависящая от функции F и ее производных до k-го порядка включительно такая, что $I \circ T = I$ для любого элемента $T \in G$.

Это означает, что функция I сохраняется под действием k-го продолжения группы G.

Часто бывает полезен инфинитезимальный аналог этого определения. А именно, рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Функция I является дифференциальным инвариантом тогда и только тогда, когда

$$X^{(k)}(I) = 0$$

для любого $X \in \mathfrak{g}$. Здесь символ $X^{(k)}$ означает продолжение векторного поля X до k-тых производных включительно [2, 6, 10].

Отметим, что все дифференциальные инварианты образуют алгебру относительно операций сложения и умножения, которая называется *алгеброй дифференциальных инвариантов.*

Помимо абсолютных дифференциальных инвариантов нам потребуется понятие относительного дифференциального инварианта.

Определение. *Относительным дифференциальным инвариантом* порядка k действия группы G называется функция I, зависящая от функции F и ее производных до k-го порядка включительно такая, что $I \circ T = \varkappa \cdot I$ для любого элемента $T \in G$, где $\varkappa$ — некоторая функция.

Функция I является относительным дифференциальным инвариантом тогда и только тогда, когда

$$X^{(k)}(I) = \mu \cdot I$$

для любого $X \in \mathfrak{g}$ и некоторой функции μ. Функция μ в этом случае называется весом.

Предложение 1. *При перемножении относительных инвариантов соответствующие веса суммируются, а при делении — вычитаются.*

Доказательство.

Пусть $X(J_1) = \mu_1 J_1$, $X(J_2) = \mu_2 J_2$.

Тогда

$$X(J_1 J_2) = X(J_1)J_2 + X(J_2)J_1 = \mu_1 J_1 J_2 + \mu_2 J_2 J_1 = (\mu_1 + \mu_2) J_1 J_2.$$

Следовательно,

$$X(J_1 J_2) = (\mu_1 + \mu_2) J_1 J_2.$$

Аналогично,

$$X\left(\frac{J_1}{J_2}\right) = \frac{X(J_1)}{J_2} - \frac{J_1 X(J_2)}{J_2^2} = \frac{\mu_1 J_1}{J_2} - \frac{J_1 \mu_2 J_2}{J_2^2} = (\mu_1 - \mu_2)\frac{J_1}{J_2}.$$

□

Из этого Предложения следует, что если возвести относительный инвариант в степень n, то его вес умножится на n и что если два относительных инварианта имеют один и тот же вес, то их отношение будет абсолютным дифференциальным инвариантом. В дальнейшем, употребляя термин «дифференциальный инвариант», мы всегда будем иметь в виду абсолютный дифференциальный инвариант.

Одной из основных характеристик алгебры дифференциальных инвариантов является наличие инвариантных дифференцирований.

В рассматриваемом нами случае одной независимой переменной x определение инвариантного дифференцирования выглядит следующим образом.

Определение. Дифференцирование вида $\nabla = A\dfrac{d}{dx}$ называется *инвариантным дифференцированием*, если оно перестановочно с действием группы G, то есть, $\nabla \circ T = T \circ \nabla$ для всех $T \in G$.

Это равносильно тому, что ∇ коммутирует с продолжениями векторных полей $X \in \mathfrak{g}$. Здесь A — гладкая функция, зависящая от F и ее производных, а

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + y'''\frac{\partial}{\partial y''} + \dots$$

— оператор полной производной по переменной x ([1, 2]).

Для любого дифференциального инварианта I функция $\nabla(I)$ также является дифференциальным инвариантом. Это обстоятельство позволяет получать новые инварианты (как правило, более высокого порядка) из уже имеющихся путем применения инвариантных дифференцирований (см. [11]).

В работе В. Лычагина [11] доказана теорема, позволяющая находить коэффициенты инвариантных дифференцирований. Пусть группа Ли G действует на $\mathbb{R}^n$. Пусть f — производящая функция векторного поля X_f на $J^1(\mathbb{R}^n)$ (см. [1]).

Предложение 2. *Пусть* $(x_1, \ldots, x_n)$ *есть координаты в* $\mathbb{R}^n$, *и пусть соответствующие канонические координаты в пространстве джетов* $J^1(\mathbb{R}^n)$ *имеют вид* $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$. *Тогда дифференцирование*

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{d}{dx^i}$$

является $\mathfrak{g}$*-инвариантным тогда и только тогда, когда функции* F_i, $i = 1, \ldots, n$, *являются решениями системы уравнений в частных производных*

$$X_f(F_i) + \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx^j}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) F_j = 0 \tag{8}$$

для всех $j = 1, \ldots, n$, $X_f \in \mathfrak{g}$.

В настоящей работе мы рассматриваем случай одной независимой переменной x, так что поле $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$, а функция f имеет вид $f = \eta - p\xi$, $p = y'$. Поэтому система (8) для нас всегда будет сводиться к одному уравнению

$$X(A) - \frac{d\xi}{dx}A = 0. \tag{9}$$

В силу сложности задачи, все вычисления дифференциальных инвариантов мы будем проводить, используя программу символьных вычислений `Maple` и пакеты `DifferentialGeometry` и `JetCalculus`, автором которых является Я. Андерсон.

3 Действие проективной группы на множестве уравнений Риккати

Как известно, уравнение Риккати имеет вид:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x). \tag{10}$$

Группа G проективных преобразований переменной y

$$y \mapsto \frac{ay+b}{cy+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc \neq 0 \tag{11}$$

переводит уравнение (10) в уравнение такого же вида. Покажем это. Подставим (11) в (10).

$$y'\frac{a(cy+d)-(ay+b)c}{(cy+d)^2} - A\frac{(ay+b)^2}{(cy+d)^2} - B\frac{ay+b}{cy+d} - C = 0.$$

После преобразований получим:

$$y' + \bar{A}y^2 + \bar{B}y + \bar{C} = 0,$$

где

$$\bar{A} = \frac{(Aa^2 + Bac + Cc^2)}{(ad-bc)},$$

$$\bar{B} = \frac{(2Aab + Bbc + Bad + 2Ccd)}{(ad-bc)},$$

$$\bar{C} = \frac{(Ab^2 + Bbd + Cd^2)}{(ad-bc)}.$$

Тождественное преобразование

$$\frac{ay+b}{cy+d} = y$$

получается при $a = d = 1$, $b = c = 0$. Группа G — трехмерная, базис ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ образуют операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2\frac{\partial}{\partial y}. \tag{12}$$

Покажем это. Запишем уравнения Ли при $a = d = 1$, $b = c = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right) = \left(\frac{1}{cy+d}\right)\Bigg|_{(a=d=1,b=c=0)} = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)=\left(\frac{y}{cy+d}\right)\Big|_{(a=d=1,b=c=0)}=y,$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)=\left(\frac{-(ay+b)}{(cy+d)^2}y\right)\Big|_{(a=d=1,b=c=0)}=-y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)=\left(\frac{-(ay+b)}{(cy+d)^2}\right)\Big|_{(a=d=1,b=c=0)}=-y.$$

Это доказывает формулу (12).

Найдем, как группа G действует на пространстве переменных (A, B, C). Всякий элемент $X \in L$ имеет вид

$$X=(ay^2+by+c)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{13}$$

Использовав формулу продолжения оператора

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$$

на первую производную $\dot{y}=\dfrac{dy}{dx}$

$$X^{(1)}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+(\eta_x+\dot{y}(\eta_y-\xi_x)-\dot{y}^2\xi_y)\frac{\partial}{\partial\dot{y}}$$

на производные первого порядка (см. [3, 6]), получим, что продолжение в пространство переменных $(x, y, \dot{y})$ имеет вид

$$X^{(1)}=(ay^2+by+c)\frac{\partial}{\partial y}+\dot{y}(2ay^2+b)\frac{\partial}{\partial\dot{y}}.$$

Чтобы описать действие группы G в пространстве переменных x, y, $\dot{y}$, A, B, C, нам нужно построить поднятие оператора X в это пространство. Пусть это поднятие имеет вид

$$X=(ay^2+by+c)\frac{\partial}{\partial y}+\alpha\frac{\partial}{\partial A}+\beta\frac{\partial}{\partial B}+\gamma\frac{\partial}{\partial C}+\zeta_1\frac{\partial}{\partial\dot{y}}$$

(будем использовать для него тот же символ X). Определим коэффициенты α, β, γ. Критерий инвариантности уравнения (10) относительно X имеет вид (см. [2, 3, 4, 5, 6])

$$X^{(1)}(y'-Ay^2-By-C)|_{y'-Ay^2-By-C=0}=0.$$

Вычислим это выражение:

$$\Big(\dot y(2ay+b)-\alpha y^2-A(ay^2+by+c)2y-$$
$$-\beta y-B(ay^2+by+c)-\gamma\Big)\Big|_{\dot y=Ay^2+By+C}=0.$$

После преобразований получим,

$$(Ay^2+By+C)(2ay+b)-\alpha y^2-A(ay^2+by+c)2y-$$
$$-\beta y-B(ay^2+by+c)-\gamma=0.$$

Соберем коэффициенты при различных степенях y

$y^2:\quad \alpha=aB-bA,$

$y:\quad \beta=2aC-2cA,$

$1:\quad \gamma=bC-cB.$

Таким образом,

$$X=(ay^2+by+c)\frac{\partial}{\partial y}+(aB-bA)\frac{\partial}{\partial A}+$$
$$+(2aC-2cA)\frac{\partial}{\partial B}+(bC-cB)\frac{\partial}{\partial C}+\dot y(2ay^2+b)\frac{\partial}{\partial \dot y}.$$

Отсюда следует, что базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ образуют три оператора

$$X_1=\frac{\partial}{\partial y}-2A\frac{\partial}{\partial B}-B\frac{\partial}{\partial C},$$

$$X_2=y\frac{\partial}{\partial y}-A\frac{\partial}{\partial A}+C\frac{\partial}{\partial C},$$

$$X_3=y^2\frac{\partial}{\partial y}+B\frac{\partial}{\partial A}+2C\frac{\partial}{\partial B}.$$

Чтобы найти дифференциальные инварианты, нужно вычислить продолжение действия операторов X_i в пространство переменных (x, y, A, B, C).

Эти продолжения имеют вид

$$X_3^{(1)}=y^2\frac{\partial}{\partial y}+B\frac{\partial}{\partial A}+2C\frac{\partial}{\partial B}+B'\frac{\partial}{\partial A'}+2C'\frac{\partial}{\partial B'},$$

$$X_2^{(1)}=y\frac{\partial}{\partial y}-A\frac{\partial}{\partial A}+C\frac{\partial}{\partial C}-A'\frac{\partial}{\partial A'}+C'\frac{\partial}{\partial C'},$$

$$X_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial y} - 2A\frac{\partial}{\partial B} - B\frac{\partial}{\partial C} - 2A'\frac{\partial}{\partial B'} - B'\frac{\partial}{\partial C'}.$$

В рассматриваемой задаче уравнение

$$X^{(k)}J = 0.$$

для поиска инвариантов равносильно системе

$$X_i^{(k)}J = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Из того, что переменная x вообще не входит в эти уравнения, а переменная y служит для выделения базиса в алгебре Ли, следует, что инварианты зависят только от функций A, B, C и их производных.

Выпишем матрицу J_0 коэффициентов при $\frac{\partial}{\partial A}$, $\frac{\partial}{\partial B}$, $\frac{\partial}{\partial C}$ в операторах X_1, X_2, X_3.

Эта матрица имеет следующий вид:

$$J_0 = \begin{pmatrix} B & 2C & 0 \\ -A & 0 & C \\ 0 & -2A & -B \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что ее ранг равен 2. Это означает, что имеется инвариант нулевого порядка. Действительно, из трех уравнений $X_1J = X_2J = X_3J = 0$ при $J = J(A, B, C)$ независимыми будут только два. При этом в уравнения входят три переменных A, B, C.

Мы находим этот инвариант, решая эти уравнения. Он имеет вид

$$I_0 = B^2 - 4AC.$$

Выпишем матрицу J_1 коэффициентов при

$$\frac{\partial}{\partial A}, \ \frac{\partial}{\partial B}, \ \frac{\partial}{\partial C}, \ \frac{\partial}{\partial A'}, \ \frac{\partial}{\partial B'}, \ \frac{\partial}{\partial C'}.$$

в операторах X_1, X_2, X_3:

$$J_1 = \begin{pmatrix} B & 2C & 0 & B' & 2C' & 0 \\ -A & 0 & C & -A' & 0 & C' \\ 0 & -2A & -B & -2A' & -B' & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен 3. Следовательно существует $6 - 3 = 3$ инварианта порядка не выше 1. Один из них мы знаем — это I_0. Таким образом, нам нужно найти еще два.

Оператор полной производной по переменной x в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + A'\frac{\partial}{\partial A} + B'\frac{\partial}{\partial B} + C'\frac{\partial}{\partial C} + A''\frac{\partial}{\partial A'} + B''\frac{\partial}{\partial B'} + C''\frac{\partial}{\partial C'} + \dots$$

Оператор полной производной содержит сумму бесконечного числа слагаемых. Но если в него подставить функцию от конечного числа переменных A, B, C, $\dots$, $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $C^{(k)}$, $\dots$, то его действие «оборвется» и будет содержать конечное число слагаемых. Поэтому такое действие определено корректно.

Инвариантное дифференцирование будет иметь вид

$$\nabla = F\frac{d}{dx},$$

где функция F зависит от конечного числа переменных A, B, C, $\dots$, $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $C^{(k)}$ при некотором k. Оператор ∇ удовлетворяет равенствам

$$[\nabla, X_i] = 0$$

для всех $i = 1, 2, 3$.

Запишем уравнение (9). Оно примет вид

$$X(F) = 0,$$

так как $\xi = 0$ для оператора (13). Следовательно, в нашей задаче одним из решений этой системы является функция F, тождественно равная 1.

Поэтому оператор $\dfrac{d}{dx}$ является инвариантным дифференцированием. Следовательно, еще один инвариант первого порядка имеет вид

$$I_{01} = \frac{d}{dx}(I_0) = B'B - 2A'C - 2AC'.$$

Используя Maple, мы находим последний инвариант первого порядка:

$$I_1 = (-BA' + AB')(-BC' + CB') + (AC' - A'C)^2.$$

Дальше мы должны найти три независимых инварианта 2-ого порядка. Два из них мы находим как производные от инвариантов 1-ого порядка:

$$\begin{aligned} I_{12} = \frac{d}{dx}(I_1) = {} & A''C'B^2 - A''BCB' - 2A''CAC' \\ & + 2A''A'C^2 - B''ABC' + 2B''ACB' - B''CBA' + C''A'B^2 \\ & - C''BAB' + 2C''A^2C' - 2C''AA'C, \end{aligned}$$

$$I_{02} = \frac{d}{dx}(I_{01}) = -4C'A' - 2A''C + B'^2 + BB'' - 2C''A.$$

Еще один инвариант 2-го порядка мы находим с помощью Maple:

$$J = (-BA'' + AB'')(-BC'' + B''C) + (C''A - A''C)^2.$$

Он оказывается квадратичным по вторым производным.

Нужно проверить, что I_{12}, I_{02}, J функционально независимы. Для этого необходимо посчитать якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial I_{12}}{\partial A''} & \dfrac{\partial I_{12}}{\partial B''} & \dfrac{\partial I_{12}}{\partial C''} \\ \dfrac{\partial I_{02}}{\partial A''} & \dfrac{\partial I_{02}}{\partial B''} & \dfrac{\partial I_{02}}{\partial C''} \\ \dfrac{\partial J}{\partial A''} & \dfrac{\partial J}{\partial B''} & \dfrac{\partial J}{\partial C''} \end{vmatrix}$$

и убедиться, что он не равен нулю. Этот якобиан равен $-I_0 \cdot J_2$, где

$$J_2 = C''(AB' - A'B) + B''(A'C - C'A) + A''(BC' - CB').$$

Заметим, что J_2 также является дифференциальным инвариантом 2-го порядка. Но он уже зависим со всеми ранее найденными инвариантами.

Проведя аналогичные вычисления, мы проверили, что три инварианта 3-ого порядка, полученные дифференцированием

$$\frac{d}{dx}(I_{02}), \quad \frac{d}{dx}(I_{12}), \quad \frac{d}{dx}(J)$$

независимы. Заметим, что эти инварианты линейны по старшим производным. Их независимость равносильна невырожденности матрицы 3×3, составленной из коэффициентов при старших производных (это просто матрица Якоби). Легко видеть, что при повышении порядка с k до $k+1$ эта матрица не меняется. Поэтому инварианты 4, 5, и т.д. порядков, полученные дифференцированием из инвариантов предыдущих порядков, также будут независимы. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия группы проективных преобразований на множестве уравнений Риккати образована тремя инвариантами I_0, I_1 и J и инвариантным дифференцированием d/dx.*

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^6$ с координатами $(i_0, i_1, j, i_{01}, i_{11}, j_1)$. Для каждого уравнения Риккати $\mathcal{E}$ определим отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \Delta \to \mathbb{R}^6$$

формулами

$$i_0 = I_0^{\mathcal{E}}, \quad i_1 = I_1^{\mathcal{E}}, \quad j = J^{\mathcal{E}}, \quad i_{01} = (\nabla I_0)^{\mathcal{E}}, \quad i_{11} = (\nabla I_1)^{\mathcal{E}}, \quad j_1 = (\nabla J)^{\mathcal{E}},$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, а индекс $\mathcal{E}$ означает, что инварианты вычисляются от коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$. Ясно, что образ

$$\Sigma_{\mathcal{E}} = \mathrm{im}(\sigma_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{R}^6$$

зависит только от класса эквивалентности уравнения $\mathcal{E}$ относительно преобразований (19).

Определение. Назовем уравнение Риккати $\mathcal{E}$ *регулярным* в точке $x \in \mathbb{R}$, если i) кривая $\Sigma_{\mathcal{E}}$ — гладкая для некоторого интервала Δ, содержащего точку x; ii) одна из функций i_0, i_1, j, i_{01}, i_{11}, j_1 может быть выбрана в качестве параметра (координаты) вдоль кривой $\Sigma_{\mathcal{E}}$.

Второе условие означают, что хотя бы одна из функций $I_0(x)$, $I_1(x)$, $J(x)$ или их производных имеют ненулевую производную в точке x.

Теорема 2. *Два регулярных уравнения Риккати $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ локально эквивалентны относительно группы проективных преобразований* (11) *тогда и только тогда, когда*

$$\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\overline{\mathcal{E}}}.$$

Это означает, что у этих двух уравнений совпадают наборы инвариантов

$$I_0, \quad I_1, \quad J, \quad \nabla I_0, \quad \nabla I_1, \quad \nabla J.$$

Доказательства всех теорем эквивалентности аналогичны, поэтому мы приведем доказательство только в последнем рассматриваемом нами случае уравнений Абеля (см. с. 32).

Пример. Рассмотрим два уравнения

$$y' = -y^2 + 2xy + 5 - x^2$$

и

$$z' = z^2(x^2 + 2x - 4) + z(-2x - 2) + 1.$$

Инварианты у них совпадают

$$I_0 = 20, \quad I_1 = -20, \quad J = 4, \quad \nabla I_0 = 0, \quad \nabla I_1 = 0, \quad \nabla J = 0.$$

Действительно, преобразование

$$z = \frac{1}{y+1}, \quad y = \frac{1}{z} - 1$$

переводит одно из этих уравнений в другое.

4 Действие обобщенной проективной группы на множестве уравнений Риккати

Теперь рассмотрим более общую задачу, когда к преобразованиям (11) добавляется преобразование независимой переменной x, то есть рассмотрим группу преобразований:

$$x \mapsto \varphi(x)\,, \quad y \mapsto \frac{ay+b}{cy+d}\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc \neq 0. \tag{15}$$

Оператор этой группы имеет вид:

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + (ay^2+by+c)\frac{\partial}{\partial y}\ . \tag{16}$$

Таким образом, в отличие от предыдущего случая, группа оказывается бесконечномерной.

Продолжение оператора (16) в пространство переменных (x,y,A,B,C) имеет вид:

$$X^{(1)} = aX_1 + bX_2 + cX_3 + f(x)\frac{\partial}{\partial x} + f'(x)X_4 + f''(x)X_5,$$

где

$$\begin{gathered}
X_1 = y^2\frac{\partial}{\partial y} + B\frac{\partial}{\partial A} + 2C\frac{\partial}{\partial B} + B'\frac{\partial}{\partial A'} + 2C'\frac{\partial}{\partial B'},\\
X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial A} + C\frac{\partial}{\partial C} - A'\frac{\partial}{\partial A'} + C'\frac{\partial}{\partial C'},\\
X_3 = \frac{\partial}{\partial y} - 2A\frac{\partial}{\partial B} - B\frac{\partial}{\partial C} - 2A'\frac{\partial}{\partial B'} - B'\frac{\partial}{\partial C'},\\
X_4 = -A\frac{\partial}{\partial A} - B\frac{\partial}{\partial B} - C\frac{\partial}{\partial C} - 2A'\frac{\partial}{\partial A'} - 2B'\frac{\partial}{\partial B'} - 2C'\frac{\partial}{\partial C'},\\
X_5 = -A\frac{\partial}{\partial A'} - B\frac{\partial}{\partial B'} - C\frac{\partial}{\partial C'}.
\end{gathered}$$

Заметим, что на этот раз $T = B^2 - 4AC$ уже не является абсолютным дифференциальным инвариантом, но является относительным дифференциальным инвариантом с весом $-2f'$. Еще один относительный инвариант с весом $-6f'$ имеет вид $SR - Q^2$, где

$$S = C'B - B'C, \quad R = B'A - A'B, \quad Q = A'C - C'A.$$

Следовательно, абсолютный инвариант первого порядка есть

$$I = \frac{SR - Q^2}{T^3},$$

Уравнение (9) для инвариантного дифференцирования $\nabla = F\frac{d}{dx}$ примет вид

$$X(F) - f' \cdot F = 0.$$

так как $\xi = f(x)$ для оператора (16). Следовательно функция F должна быть относительным инвариантом с весом f'. В качестве такой функции можно взять $1/\sqrt{|T|}$.

Назовем точку x *регулярной* для уравнения Риккати, если в окрестности точки x для этого уравнения $T(x) \neq 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только уравнения в окрестности регулярных точек.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия группы преобразований* (15) *на множестве уравнений Риккати образована инвариантом I и инвариантным дифференцированием* $\dfrac{1}{\sqrt{|T|}}\dfrac{d}{dx}$.

Назовем уравнение Риккати *регулярным* в точке $x \in \mathbb{R}$, если $T(x) \neq 0$ и $I(x)$, либо $\nabla I(x)$ имеют ненулевую производную в точке x.

Теорема 4. *Два регулярных уравнения Риккати $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ локально эквивалентны относительно группы преобразований* (19) *тогда и только тогда, когда у них совпадают пары инвариантов* $(I, \nabla I)$.

Рассмотрим теперь случай $T \equiv 0$. Это — так называемый сингулярный случай. К нему не применимы результаты, полученные в предыдущей теореме, ибо I содержит деление на T. Поэтому этот случай требует отдельного рассмотрения.

Уравнение (10) тогда приобретает вид

$$y' \pm (Py + Q)^2 = 0.$$

Замена $y \mapsto \frac{1}{y}$ позволяет убрать знак «$\pm$». Действительно, пусть

$$y' - (Py + Q)^2 = 0.$$

Сделаем эту подстановку и преобразуем результат:

$$-\frac{y'}{y^2}-\left(\frac{P}{y}+Q\right)^2=0,$$

$$-\frac{y'}{y^2}-\left(\frac{P^2+2PQy+Q^2y^2}{y^2}\right)=0.$$

Получаем

$$y'+(P+Qy)^2=0.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать, что уравнение Риккати имеет вид

$$y'=(Py+Q)^2. \tag{17}$$

Оператор группы (15) примет вид:

$$X=f(x)\frac{\partial}{\partial x}+(ay^2+by+c)\frac{\partial}{\partial y}+y'(2ay+b-f')\frac{\partial}{\partial y'}+\pi\frac{\partial}{\partial P}+\kappa\frac{\partial}{\partial Q}.$$

Коэффициенты π, κ найдём следующим образом:

$$X\left(y'-P^2y^2-2yPQ-Q^2\right)\mid_{\,y'=(Py+Q)^2}=0.$$

Подставив X, вычислим:

$$(ay^2+by+c)(-2P^2y-2PQ)+(2ay+b-f')(P^2y^2+2yPQ+Q^2)+\\+\pi(-2Py^2-2yQ)+\kappa(-2yP-2Q)=0.$$

Раскрываем скобки:

$$-2aP^2y^3-2bP^2y^2-2cP^2y-2PQay^2-2PQby-2PQc+2a^2P^2y^3+\\+bP^2y^2-f'P^2y^2+4aPQy^2+2bPQy-2PQf'y+2aQ^2y+\\+bQ^2-f'Q^2-2\pi Py^2-2\pi Qy-2\kappa Py-2\kappa Q=0.$$

Коэффициент при y^2 равен $-bP^2+2PQa-f'P^2-2\pi P=0$. Отсюда находим

$$\pi=-\frac{bP}{2}+Qa-\frac{f'P}{2}.$$

Свободный член равен $-2PQc+bQ^2-f'Q^2-2\kappa Q=0$. Получим

$$\kappa=-\frac{f'Q}{2}+\frac{bQ}{2}-Pc.$$

Коэффициент при y равен $-2cP^2 - 2PQf' + 2aQ^2 - 2\pi Q - 2\kappa P$. Проверим, что это он тоже обращается в нуль. Подставим в это выражение π и κ:

$$- 2cP^2 - 2PQf' + 2aQ^2 - 2Q(-\frac{bP}{2} + Qa - \frac{f'P}{2}) - \\ - 2P(-\frac{f'Q}{2} + \frac{bQ}{2} - Pc) = 0.$$

Раскроем скобки:

$$- 2cP^2 - 2PQf' + 2aQ^2 + bQP - 2aQ^2 + \\ + f'PQ + f'PQ - bQP + 2P^2c \equiv 0.$$

Проделав вычисления, аналогичные предыдущим двум случаям, мы находим, что первый инвариант имеет порядок 3. Он равен

$$I = \frac{M_1}{(Q'P - P'Q)^3},$$

где

$$M_1 = Q'''(4Q'P^2 - 4P'P) + P'''(4P'Q^2 - 4Q'QP) \\ - 7Q''^2P^2 + Q''(14P''QP + 20P'Q'P - 20P'^2Q) - \\ - 7P''^2Q^2 + P''(-20Q'^2P + 20P'Q'Q).$$

При этом $Q'P - P'Q$ и M_1 являются относительными инвариантами с весами $-2f'$ и $-6f'$ соответственно.

Коэффициент F инвариантного дифференцирования опять должен быть относительным инвариантом с весом f'. Поэтому инвариантным дифференцированием будет

$$\nabla_{\sin} = \frac{1}{\sqrt{|Q'P - P'Q|}} \frac{d}{dx}.$$

Теорема 5. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия группы проективных преобразований* (15) *на множестве уравнений Риккати вида* (17) *образована инвариантом* K *и инвариантным дифференцированием* $\nabla_{\sin}$.

Назовем уравнение Риккати вида (17) *регулярным* в точке $x \in \mathbb{R}$, если $Q'P - P'Q \neq 0$ в этой точке и $K(x)$, либо $\nabla_{\sin}K(x)$ имеют ненулевую производную в точке x.

Теорема 6. *Два регулярных уравнения Риккати $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ вида* (17) *локально эквивалентны относительно группы преобразований* (19) *тогда и только тогда, когда у них совпадают пары инвариантов* $(I, \nabla I)$.

Пример. Рассмотрим два уравнения:

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} + \frac{4}{x^2}$$

и

$$z' = -z^2\left(\frac{4t^2+t+1}{2t^2}\right) - z\left(\frac{-8t^2+2}{2t^2}\right) - \frac{4t^2-t+1}{2t^2}.$$

Инвариант I у них один и тот же и равен $I = \frac{4}{225}$, а инвариант $\nabla(I)$ для обоих уравнений равен 0.

Преобразование

$$z = \frac{y-1}{y+1}, \quad t = \frac{1}{x}$$

переводит первое из этих уравнений во второе.

Осталось рассмотреть случай, когда $Q'P - P'Q \equiv 0$. Из того, что

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$$

следует, что ему соответствуют уравнения, для которых $P/Q = \mathrm{const}$, то есть, уравнения вида

$$y' = P(x)(y+c)^2,$$

(так как для уравнения Риккати $P(x) \not\equiv 0$. Ясно, что это — уравнения с разделяющимися переменными. Они решаются стандартным образом и нет необходимости изучать вопрос их эквивалентности.

5 Действие группы линейных преобразований на множестве уравнений Абеля

Дальнейшим обобщением уравнений Риккати являются уравнения Абеля первого порядка. Такое уравнение имеет вид

$$y' = a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x). \tag{18}$$

Уравнения Абеля являются предметом исследования ряда работ, в частности, [8, 9, 12, 13].

Группа проективных преобразований уже не сохраняет класс уравнений Абеля. Поэтому мы будем рассматривать группу линейных преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad y \mapsto g(x)y + h(x). \tag{19}$$

Покажем, что группа преобразований (19) переводит уравнение (18) в другое уравнение такого же вида. Пусть имеется уравнение.

$$\overline{y'} = a\overline{y}^3 + b\overline{y}^2 + c\overline{y} + d.$$

Сделаем подстановку

$$\overline{x} = f(x), \qquad \overline{y} = g(x)y + h(x).$$

Тогда

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{g'(x)dx\ y + g(x)dy + h'(x)dx}{f'(x)dx}.$$

Получим:

$$\frac{g'(x)}{f'(x)}y + \frac{g(x)dy}{f'(x)dx} + \frac{h'(x)}{f'(x)} = a(x)(g(x)y + h(x))^3 + \\ + b(x)(g(x)y + h(x))^2 + c(x)(g(x)y + h(x)) + d(x).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим уравнение

$$y' = \tilde{a}(x)y^3 + \tilde{b}(x)y^2 + \tilde{c}(x)y + \tilde{d}(x),$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}(x) &= a(x)g^2(x)f'(x),\\
\tilde{b}(x) &= 3a(x)g(x)f'(x)h(x) + b(x)g(x)f'(x),\\
\tilde{c}(x) &= 3a(x)f'(x)h^2(x) + 2b(x)f'(x)h(x) + c(x)f'(x) - \tfrac{g'(x)}{g(x)},\\
\tilde{d}(x) &= \tfrac{1}{g(x)}\Big(a(x)h^3(x)f'(x) + b(x)h^2(x)f'(x) + c(x)h(x)f'(x) +\\
&\qquad + d(x)f'(x) - h'(x)\Big).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Следовательно, группа линейных преобразований действует на множестве уравнений Абеля. В настоящей главе мы будем решать задачу эквивалентности двух уравнений Абеля относительно этой группы.

Оператор группы преобразований (19) имеет вид:

$$
X = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta(x)y + \zeta(x))\frac{\partial}{\partial y}, \tag{21}
$$

где ξ, η, ζ — произвольные функции от x.

Найдем его действие на множестве уравнений Абеля. Продолжение оператора X на пространство переменных (x, y, y') имеет вид:

$$
X^{(1)} = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta(x)y + \zeta(x))\frac{\partial}{\partial y} + (\eta'(x)y + \zeta'(x) + \dot{y}(\eta(x) - \xi'(x)))\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.
$$

Пусть действие группы (19) на множестве коэффициентов (a, b, c, d) уравнения (18) имеет вид

$$
\begin{aligned}
Z = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} &+ (\eta(x)y + \zeta(x))\frac{\partial}{\partial y} +\\
&(\eta'(x)y + \zeta'(x) + \dot{y}(\eta(x) - \xi'(x)))\frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial b} + \gamma\frac{\partial}{\partial c} + \delta\frac{\partial}{\partial d},
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где коэффициенты α, β, γ, δ подлежат определению. Чтобы найти их, запишем уравнение

$$
ZF\,\Big|_{F=0} = 0,
$$

где

$$
F = \dot{y} - (ay^3 + by^2 + cy + d).
$$

Получим

$$
\begin{aligned}
(\eta y + \zeta)(-3ay^2 - 2by - c) - \alpha y^3 - \beta y^2 - \gamma y - \delta + (\eta' y + \zeta')+&\\
(\eta - \xi')(ay^3 + by^2 + cy + d) = 0.&
\end{aligned}
$$

Раскрыв скобки и собрав коэффициенты при различных степенях y, получим следующие равенства

$$\begin{aligned}
\alpha &= -2a\eta - \xi' a,\\
\beta &= -b\eta - 3a\zeta - \xi' b,\\
\gamma &= -2b\zeta + \eta' - \xi' c,\\
\delta &= -c\zeta + \zeta' + d\eta - d\xi'.
\end{aligned}$$

Таким образом, действие группы (19) на множестве уравнений (18) имеет оператор

$$Z = \xi\frac{\partial}{\partial x} - a(2\eta + \xi')\frac{\partial}{\partial a} - (b\eta + 3a\zeta + b\xi')\frac{\partial}{\partial b} + \\ (\eta' - \xi' c - 2b\zeta)\frac{\partial}{\partial c} + (\zeta' + \eta d - \zeta c - d\xi')\frac{\partial}{\partial d}. \quad (23)$$

Выясним, имеет ли действие группы (19) на множестве уравнений (18) инварианты порядка не выше 1. Для этого найдем первое продолжение оператора Z. Оно имеет вид

$$Z^{(1)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} - a(2\eta + \xi')\frac{\partial}{\partial a} - (b\eta + 3a\zeta + b\xi')\frac{\partial}{\partial b} + (\eta' - \xi' c - 2b\zeta)\frac{\partial}{\partial c} + \\ + (\zeta' + \eta d - \zeta c - d\xi')\frac{\partial}{\partial d} + (-2a\eta' - a\xi'' - 2a'\eta - 2\xi' a')\frac{\partial}{\partial a'} + \\ (-b\eta' - 3a\zeta' - b\xi'' - 3\zeta a' - b'\eta - 2\xi' b')\frac{\partial}{\partial b'} + \\ (\eta'' - \zeta'' c - 2b\zeta' - 2\zeta b' - \zeta' c' - \xi' c')\frac{\partial}{\partial c'} + \\ (\zeta'' + \eta d - \zeta' c - d\xi'' - \zeta c' + d'\eta - 2\xi' d')\frac{\partial}{\partial d'}. \quad (24)$$

Инварианты удовлетворяют уравнению

$$Z^{(1)}G = 0.$$

Подставив функцию $G(x, a, b, c, d, a', b', c', d')$ в это уравнение, получим

$$\xi G_x - a(2\eta + \xi')G_a + (-b\eta - 3a\zeta - b\xi')G_b + (\eta' - \xi' c - 2b\zeta)G_c + \\ (\zeta' + \eta d - \zeta c - d\xi')G_d + (-2a\eta' - a\xi'' - 2a'\eta - 2\xi' a')G_{a'} + \\ (-b\eta' - 3a\zeta' - b\xi'' - 3\zeta a' - b'\eta - 2\xi' b')G_{b'} + \\ (\eta'' - \zeta'' c - 2b\zeta' - 2\zeta b' - \zeta' c' - \xi' c')G_{c'} + \\ (\zeta'' + \eta d - \zeta' c - d\xi'' - \zeta c' + d'\eta - 2\xi' d')G_{d'} = 0. \quad (25)$$

Здесь символы G_a и т.п. обозначают частную производную функции по соответствующему аргументу. Поскольку функции ξ, η, ζ произвольны, то равенство (25) будет выполнено для всех операторов (23), тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta''$ в (25) обращаются в нуль.

Собрав эти коэффициенты при $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta''$, придем к системе из 9 уравнений в частных производных

$$
\begin{gathered}
-G_b b - G_{c'}c' - G_d d - aG_a - 2G_{b'}b' - 2G_{a'}a' - 2G_{d'}d' = 0,\\
-G_{b'}b - G_{d'}d - G_{a'}a = 0,\\
G_{d'}d - G_{b'}b + G_c - 2G_{a'}a = 0,\\
G_{c'} = 0,\\
-3G_{b'}a - G_c c - 2G_{c'}b + G_d - G_{c'}c' - G_{d'}c = 0,\\
-G_{c'}c + G_{d'} = 0,\\
G_x = 0,\\
G_{d'}d' - G_{b'}b' + G_d d - 2G_{a'}a' - G_b b + G_y y - 2aG_a = 0,\\
-G_{d'}c' - 3G_{b'}a' - 2G_{c'}b' - 2G_c b - G_d c - 3G_b a + G_y = 0.
\end{gathered}
$$

Решая эту систему из 9 уравнений при помощи Maple, находим $G = \mathrm{const}$.

Вывод: инвариантов порядка не выше 1-го нет. Попытаемся найти инварианты 2-го порядка.

Находим второе продолжение оператора Z:

$$
\begin{gathered}
Z^{(2)} = Z^{(1)} + (-2a\eta'' - a\xi''' - 4a'\eta' - 3\xi''a' - 2a''\eta - 3\xi'a'')\frac{\partial}{\partial a''} +\\
(-b\eta'' - 3a\zeta'' - b\xi''' - 6\zeta'a' - 2b'\eta' - 3\xi''b' - 3\zeta a'' - b''\eta - 3\xi'b'')\frac{\partial}{\partial b''} +\\
(\eta''' - \xi'''c - 2b\zeta'' - 4\zeta'b' - 3\xi''c' - 2\zeta b'' - 3\xi'c'')\frac{\partial}{\partial c''} +\\
(\zeta''' + \eta''d - \zeta''c - d\xi''' - 2\zeta'c' + 2d'\eta' - 3\xi''d' - \zeta c'' + d''\eta - 3\xi'd'')\frac{\partial}{\partial d''}.
\end{gathered}
$$

Подставим функцию $G(x, a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'')$ в уравнение

$$Z^{(2)}G = 0.$$

Получим уравнение

$$\xi G_x - a(2\eta+\xi')G_a - (b\eta+3a\zeta+b\xi')G_b + (\eta'-\xi'c-2b\zeta)G_c+$$
$$(\zeta'+\eta d-\zeta c-d\xi')G_d + (-2a\eta'-a\xi''-2a'\eta-2\xi'a')G_{a'}+$$
$$(-b\eta'-3a\zeta'-b\xi''-3\zeta a'-b'\eta-2\xi'b')G_{b'}+$$
$$(\eta''-\zeta''c-2b\zeta'-2\zeta b'-\zeta'c'-\xi'c')G_{c'}+$$
$$(\zeta''+\eta d-\zeta'c-d\xi''-\zeta c'+d'\eta-2\xi'd')G_{d'}+$$
$$(-2a\eta''-a\xi'''-4a'\eta'-3\xi''a'-2a''\eta-3\xi'a'')G_{a''}+$$
$$(-b\eta''-3a\zeta''-b\xi'''-6\zeta'a'-2b'\eta'-3\xi''b'-3\zeta a''-b''\eta-3\xi'b'')G_{b''}+$$
$$(\eta'''-\xi'''c-2b\zeta''-4\zeta'b'-3\xi''c'-2\zeta b''-3\xi'c'')G_{c''}+$$
$$(\zeta'''+\eta''d-\zeta''c-d\xi'''-2\zeta'c'+2d'\eta'-3\xi''d'-\zeta c''+d''\eta-3\xi'd'')G_{d''}=0.$$

Соберем коэффициенты при ξ, ξ', ξ'', ξ''', η, η', η'', η''', ζ, ζ', ζ'', ζ''' и приравняем их к нулю. Получим систему из 12 уравнений в частных производных.

$$\begin{gathered}
(A_1)\quad -2G_{b'}b'-2G_{d'}d'-2G_{c'}c'-2G_{a'}a'-aG_a-G_bb-G_dd- \\
G_cc-3Gc''c''-3G_{b''}b''-3G_{a''}a''-3G_{d''}d''=0, \\
(A_2)\quad -3G_{d''}d'-3G_{c''}c'-3G_{a''}a'-G_{b'}b-G_{d'}d-G_{a'}a-3G_{b''}b'-G_{c'}c=0, \\
(A_3)\quad -G_{d''}d-G_{c''}c-G_{b''}b-G_{a''}a=0, \\
(A_4)\quad 2G_{d''}d'+G_{d'}d+G_c-G_{b'}b-2G_{a'}a-4G_{a''}a'-2G_{b''}b'=0, \\
(A_5)\quad -G_{b''}b+G_{d''}d-2G_{a''}a+G_{c'}=0, \\
(A_6)\quad G_{c''}=0, \\
(A_7)\quad -3G_{b'}a-G_{d'}c-2G_{d''}c'+G_d-2G_{c'}b-6G_{b''}a'-4G_{c''}b'=0, \\
(A_8)\quad -3G_{b''}a-2G_{c''}b-G_{d''}c+G_{d'}=0, \\
(A_9)\quad G_{d''}=0, \\
(A_{10})\quad G_x=0, \\
(A_{11})\quad -2G_{a''}a''+G_{d''}d''-G_{b'}b'-G_{b''}b''+G_{d'}d'-2G_{a'}a'- \\
G_bb-2aG_a+G_dd=0, \\
(A_{12})\quad -G_{d'}c'-3G_{b'}a'-3G_{b''}a''-3G_ba-2G_{c''}b''-2G_{c'}b'- \\
G_{d''}c''-2G_cb-G_dc=0.
\end{gathered} \tag{26}$$

Эта система содержит 13 переменных x, a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'',

d''. Поэтому мы ожидаем найти один независимый инвариант 2-го порядка. Однако, решить эту систему «в лоб» не удается.

Попытаемся найти относительные инварианты действия группы линейных преобразований, т.е. такие функции

$$G(x, a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''),$$

что

$$X^{(2)}G = \mu G.$$

Заметим, что в формуле (23) коэффициент при $\frac{\partial}{\partial a}$ равен $-a(2\eta + \xi')$. Следовательно, $Z(a) = -a(2\eta + \xi')$. Это говорит о том, что функция

$$J_1 = a$$

является относительным инвариантом с весом

$$\mu_1 = -2\eta - \xi'.$$

Выражениям η и ξ' соответствуют уравнения A_1 и A_{11}.

Попробуем вместо исходной системы 12 уравнений (26) решать другую систему, в которой уравнения A_1 и A_{11} заменим на уравнения вида

$$\begin{aligned}(B_1) \qquad & -2G_{b'}b' - 2G_{d'}d' - 2G_{c'}c' - 2G_{a'}a' - aG_a - G_b b - G_d d - \\ & - G_c c - 3Gc''c'' - 3G_{b''}b'' - 3G_{a''}a'' - 3G_{d''}d'' = -kG, \\ (B_{11}) \qquad & -2G_{a''}a'' + G_{d''}d'' - G_{b'}b' - G_{b''}b'' + G_{d'}d' - 2G_{a'}a' - \\ & - G_b b - 2aG_a + G_d d = -lG, \quad (27)\end{aligned}$$

где k, l — некоторые натуральные числа.

Будем перебирать различные значения k и l. Поскольку, как правило, относительные инварианты являются многочленами от своих аргументов, будем пользоваться командой PolynomialSolutions. При $k = l = 3$ находим относительный инвариант

$$J_2 = 27da^2 - 9ba' + 2b^3 + 9ab' - 9abc$$

с весом

$$\mu_2 = -3\eta - 3\xi'.$$

Заметим, что функции $-2\eta - \xi'$ и $-3\eta - 3\xi'$ линейно независимы. Поэтому нам нужен еще хотя бы один относительный инвариант. Продолжая перебирать пары (k, l), находим при $k = l = 5$ еще один относительный инвариант:

$$J_3 = (9a^2bc' + 15acb^3 + 27a'ab' + 9aba'' - 45acba' + \\ 36ca^2b' + 27a^2da' - 15ab^2b' - 27a^2bc^2 - 27a^2db^2 + \\ 81a^3dc - 27a^3d' + 15b^3a' - 9a^2b'' - 27ba'^2 - 2b^5)$$

с весом

$$\mu_3 = -5\xi' - 5\eta.$$

Заметим, что функции μ_2 и μ_3 удовлетворяют соотношению

$$3\mu_3 - 5\mu_2 = 0.$$

Это означает, что функция

$$I = \frac{J_3^3}{J_2^5}$$

есть абсолютный инвариант действия группы линейных преобразований.

Определение. *Оператором полной производной* по переменной x мы будем называть следующий дифференциальный оператор

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + a'\frac{\partial}{\partial a} + b'\frac{\partial}{\partial b} + c'\frac{\partial}{\partial c} + d'\frac{\partial}{\partial d} + a''\frac{\partial}{\partial a'} + b''\frac{\partial}{\partial b'} + c''\frac{\partial}{\partial c'} + d''\frac{\partial}{\partial d'} + \dots \\ \dots + a^{(k)}\frac{\partial}{\partial a^{(k-1)}} + b^{(k)}\frac{\partial}{\partial b^{(k-1)}} + c^{(k)}\frac{\partial}{\partial c^{(k-1)}} + d^{(k)}\frac{\partial}{\partial d^{(k-1)}} + \dots$$

Определение. *Инвариантным дифференцированием* будем называть оператор

$$\nabla = A\frac{d}{dx},$$

инвариантный по отношению к действию группы линейных преобразований то есть, удовлетворяющий равенству

$$[\nabla, Z] = 0.$$

для любого оператора Z.

В рассматриваемом случае уравнение (9) примет вид

$$Z(A) - \xi' A = 0.$$

Это означает, что функция A есть относительный инвариант с весом $\mu(A) = \xi'$. Будем искать A в виде

$$A = J_1^k J_2^l.$$

Тогда

$$\mu(A) = k\mu(J_1) + l\mu(J_2).$$

Отсюда следует тождество

$$\xi' = k(-2\eta - \xi') + l(-3\eta - 3\xi').$$

Оно равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -k - 3l = 1, \\ -2k - 3l = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$k = 1, \quad l = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, оператор

$$\nabla = \frac{J_1}{J_2^{-2/3}} \frac{d}{dx} \tag{28}$$

есть инвариантное дифференцирование.

Назовем точку x *регулярной* для уравнения Абеля (18), если в окрестности точки x для этого уравнения $J_1(x) J_2(x) \neq 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только уравнения в окрестности регулярных точек.

Теорема 7. *Алгебра дифференциальных инвариантов порождается инвариантом I_1 и инвариантным дифференцированием ∇.*

Доказательство. Вместо инварианта I будем использовать инвариант $\tilde{I} = I^{1/3} = \frac{J_3}{J_2^{5/3}}$. Заметим, что он линеен по вторым производным:

$$\tilde{I} = a'' P + b'' Q + \dots,$$

где многоточие означает слагаемые не выше первого порядка, а

$$P = \frac{9ab}{J_2^{5/3}}, \quad Q = -\frac{9a^2}{J_2^{5/3}}.$$

Первый инвариант $\tilde{I}$ появляется на втором порядке производных. Дальше при переходе от k-го порядка к $(k+1)$-му добавляется четыре переменных $a^{(k+1)}$, $b^{(k+1)}$, $c^{(k+1)}$, $d^{(k+1)}$ и три дополнительных уравнения на инварианты — коэффициенты при $\xi^{(k+2)}$, $\eta^{(k+2)}$, $\zeta^{(k+2)}$ в уравнении $Z^{(k+1)} I = 0$.

Следовательно, для всех k при переходе от k-го порядка к $(k+1)$-му прибавляется по одному инварианту. Чтобы показать, что функции $\tilde{I}$, $\nabla\tilde{I}$, $\ldots$, $\nabla^{k-2}\tilde{I}$ образуют базис инвариантов порядка не выше k, достаточно показать, что этот набор функционально независим для всех $k \in \mathbb{N}$.

Найдем $\nabla\tilde{I}$. Учитываем, что $\nabla = \frac{J_1}{J_2^{-2/3}}dx$.

$$\nabla\tilde{I} = \nabla(a''P + b''Q + \ldots) = \nabla(a''P) + \nabla(b''Q) + \ldots =$$
$$= (\nabla a'')P + a''\nabla(P) + (\nabla b'')Q + b''\nabla(Q) + \ldots =$$
$$a'''\frac{9ab}{J_2^{5/3}}\frac{J_1}{J_2^{-2/3}} + a''\nabla P - b'''\frac{9a^2}{J_2^{5/3}}\frac{J_1}{J_2^{-2/3}} + b''\nabla(Q) + \ldots =$$
$$= a'''\frac{9abJ_1}{J_2} - b'''\frac{9a^2J_1}{J_2} + \ldots$$

(многоточие означает слагаемые более низких порядков, чем выписанные). Легко видеть, что

$$\nabla^2\tilde{I} = \nabla(\nabla\tilde{I}) = a^{IV}\frac{9abJ_1^2}{J_2^{1/3}} - b^{IV}\frac{9a^2J_1^2}{J_2^{1/3}} + \ldots$$

и т.д. Из этих соотношений легко видеть, что при каждом i инвариант $\nabla^i\tilde{I}$ зависит от переменных $a^{(i+2)}$, $b^{(i+2)}$, и не зависит от более старших переменных. Поэтому при каждом i инвариант $\nabla^i\tilde{I}$ функционально независим с $\tilde{I}$, $\nabla\tilde{I}$, $\ldots$, $\nabla^{i-1}\tilde{I}$, поскольку эти инварианты не содержат переменных $a^{(i+2)}$, $b^{(i+2)}$. По индукции по i от 1 до $k-2$ получаем требуемое утверждение. $\square$

Введем определение производной Трессе [11]. Пусть J — дифференциальный инвариант такой, что $dJ/dx \neq 0$ на некотором открытом интервале Δ. Тогда для любой функции F на Δ ее полная производная

$$\frac{dF}{dx} = \lambda\frac{dJ}{dx}.$$

Коэффициент λ называется *производной Трессе* функции F и обозначается $\lambda = dF/dJ$. Оператор

$$\frac{d}{dJ} : F \mapsto \frac{dF}{dJ}$$

есть инвариантное дифференцирование (см. [11]). Для любого другого инвариантного дифференцирования ∇ справедливо равенство $\nabla = K \cdot d/dJ$ для некоторого дифференциального инварианта K (любые два инвариантных дифференцирования отличаются инвариантным множителем). Подставив J в это равенство, найдем $K = \nabla J$. Таким образом,

$$\nabla = \nabla J \cdot \frac{d}{dJ} \tag{29}$$

для любых инварианта J и инвариантного дифференцирования ∇.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами (j_1, j_{11}). Для каждого уравнения Абеля $\mathcal{E}$ определим отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \Delta \to \mathbb{R}^2$$

формулами

$$j_1 = I^{\mathcal{E}}, \quad j_{11} = (\nabla I)^{\mathcal{E}},$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, а индекс $\mathcal{E}$ означает, что инварианты вычисляются от коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$. Ясно, что образ

$$\Sigma_{\mathcal{E}} = \mathrm{im}(\sigma_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{R}^2$$

зависит только от класса эквивалентности уравнения $\mathcal{E}$ относительно преобразований (19).

Определение. Назовем уравнение Абеля $\mathcal{E}$ *регулярным* в точке $x \in \mathbb{R}$, если

i) точка x является регулярной для этого уравнения;

ii) кривая $\Sigma_{\mathcal{E}}$ — гладкая для некоторого интервала Δ, содержащего точку x;

iii) одна из функций j_1, j_{11} может быть выбрана в качестве параметра (координаты) вдоль кривой $\Sigma_{\mathcal{E}}$.

Последние два условия означают, что либо $I(x)$, либо $\nabla I(x)$ имеют ненулевую производную в точке x, что, по формуле (28) равносильно тому факту, что $\nabla I(x) \neq 0$ или $\nabla^2 I(x) \neq 0$ соответственно.

Теорема 8. *Два регулярных уравнения Абеля $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ локально эквивалентны относительно группы линейных преобразований* (19) *тогда и только тогда, когда*

$$\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\overline{\mathcal{E}}}. \tag{30}$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Предположим, что верно условие (30). Покажем, что $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ эквивалентны.

Без потери общности можно считать, что функция j_1 — координата на $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Пусть

$$J_{11}^{\mathcal{E}} = j_{11}^{\mathcal{E}}(j_1)$$

на $\Sigma_{\mathcal{E}}$ и

$$J_{11}^{\overline{\mathcal{E}}} = j_{11}^{\overline{\mathcal{E}}}(j_1)$$

на $\Sigma_{\overline{\mathcal{E}}}$. Условие (30) означает, что

$$J_{11}^{\mathcal{E}} = J_{11}^{\overline{\mathcal{E}}}. \tag{31}$$

Из формулы (29) следует, что инвариантное дифференцирование ∇ пропорционально производной Трессе d/dI с коэффициентом ∇I. Тогда из (31) и Теоремы 7 следует, что ограничения дифференциальных инвариантов всех порядков на $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ совпадают.

Равенство всех дифференциальных инвариантов влечет за собой тот факт, что уравнения лежат в одной орбите действия группы. Действительно, инвариант I порождает пространство инвариантов порядка не выше 2. По соображениям размерности, два неэквивалентных уравнения не могут иметь равные инварианты I, потому что орбита каждого уравнения имеет размерность 12 в 13-мерном пространстве переменных (x, a, b, c, d, a', b, c', d', a'', b'', c'', d''). Далее, при переходе от k-го порядка к $(k+1)$-му, размерность орбиты увеличивается на три, и количество инвариантов увеличивается на один. Поэтому, опять же по соображениям размерности, два неэквивалентных уравнения не могут иметь равные наборы инвариантов.

Отсюда следует, что уравнения $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ эквивалентны, то есть лежат в одной орбите действия группы. $\square$

Пример. Рассмотрим два уравнения

$$y' = y^3 + 1$$

и

$$y' = -y^3 - \frac{3y^2}{x^2} - y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{x^6}.$$

Инвариант I у них совпадает и равен $I = 0$.

Найдем преобразование вида (19), переводящее одно из этих уравнений в другое.

Подставив коэффициенты $\tilde{a}(x) = -1$, $\tilde{b}(x) = -\frac{3}{x^2}$, $\tilde{c}(x) = -(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4})$, $\tilde{d}(x) = -\frac{1}{x^6}$ в формулу (20), получим

$$g^2(x)f'(x) = -1, \qquad g(x)f'(x)h(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$3f'(x)h^2(x) - \frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4},$$
$$\frac{1}{g(x)}\left(h^2(x)f'(x) + f'(x) - h'(x)g(x)\right) = -\frac{1}{x^6}.$$
Из первого уравнения получаем $f' = -\frac{1}{g^2(x)}$. Подставив во второе уравнение, получим $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, а подставив в третье, найдем $g(x) = x$. Далее $f(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$. После этого четвертое уравнение выполняется тождественно.

Таким образом, мы нашли преобразование
$$x = \frac{1}{\overline{x}}, \qquad y = \overline{x} \cdot \overline{y} + \frac{1}{\overline{x}},$$
переводящее второе уравнение в первое.

Обратное преобразование
$$\overline{x} = \frac{1}{x}, \qquad \overline{y} = xy - x^2$$
переводит первое уравнение во второе.

Предложение 3. Любое уравнение вида (18) может быть приведено преобразованием (1) к форме
$$y' = y^3 + r(x). \tag{32}$$
Форму (32) будем называть канонической.

Доказательство. Воспользуемся формулами (20). Подставим в них
$$\tilde{a}(x) = 1, \quad \tilde{b}(x) = 0, \quad \tilde{c}(x) = 0.$$
Получим уравнения
$$a(x)g^2(x)f'(x) = 1,$$
$$3a(x)g(x)f'(x)h(x) + b(x)g(x)f'(x) = 0,$$
$$3a(x)f'(x)h^2(x) + 2b(x)f'(x)h(x) + c(x)f'(x) - \frac{g'(x)}{g(x)} = 0.$$
Из второго уравнения сразу следует, что
$$h(x) = -\frac{b(x)}{3a(x)}.$$
Подставим это в третьем уравнение. После преобразований получим:
$$f'(x)\Big(c(x) - \frac{b^2(x)}{3a(x)}\Big) = \frac{g'(x)}{g(x)}. \tag{33}$$

Выразим из первого уравнения $f'(x) = \frac{1}{a(x)g^2(x)}$ и подставим в (19). Получим

$$\frac{1}{a(x)g^2(x)}\Big(c(x) - \frac{b^2(x)}{3a(x)}\Big) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Из этого следует, что

$$g(x)g'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} - \frac{b^2(x)}{3a^2(x)},$$

или

$$(g^2(x))' = \frac{2c(x)}{a(x)} - \frac{2b^2(x)}{3a^2(x)}.$$

Отсюда

$$g(x) = \Big(\int \frac{2c(x)}{a(x)} - \frac{2b^2(x)}{3a^2(x)}dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Зная $g(x)$, находим $f(x)$

$$f(x) = \int \frac{g'(x)}{g(x)} \frac{1}{c(x) - \frac{b^2(x)}{3a(x)}}dx.$$

□

Каноническая форма оказывается определенной неоднозначно. Найдем преобразования, которое преобразуют одну каноническую форму в другую.

Одновременно подставляем

$$\tilde{a} = a = 1, \quad \tilde{b} = b = 0, \quad \tilde{c} = c = 0.$$

в соотношения (20). Получим

$$\begin{cases} g^2(x)f'(x) = 1, \\ g(x)f'(x)h(x) = 0, \\ 3f'(x)h^2(x) - \frac{g'(x)}{g(x)} = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$f(x) = k^{-2}x, \quad g(x) = k, \quad h(x) = 0, \quad k = \text{const}.$$

Подставив это в формулы (19), получим преобразования

$$\bar{x} = k^{-2}x, \quad \bar{y} = ky,$$

переводящие одну каноническую форму уравнения Абеля в другую.

6 Заключение

Дипломная работа посвящена исследованию вопроса эквивалентности некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно заданных групп преобразований переменных (x, y).

В дипломной работе решены следующие задачи:

1. Показано, что группы проективных и обобщенных проективных преобразований зависимой переменной y действуют на множестве уравнений Риккати. Полностью описаны алгебры дифференциальных инвариантов этих действий (указаны базисные инварианты и инвариантные дифференцирования). Сформулированы и доказаны теоремы о локальной эквивалентности таких уравнений относительно этих групп преобразований. Кроме того, в случае действия группы обобщенных проективных преобразований выделен сингулярный случай, когда правая часть уравнения Риккати есть точный квадрат, и для него также найдена алгебра дифференциальных инвариантов и доказана теорема эквивалентности.

2. Показано, что группы линейных преобразований зависимой переменной y действует на множестве уравнений Абеля. Найдена алгебра дифференциальных инвариантов этих действий (она порождена одним инвариантом и одним инвариантным дифференцированием). Сформулирована и доказана теоремы о локальной эквивалентности таких уравнений. Показано, что любое уравнение Абеля может быть линейным преобразованием приведено к каноническому виду.

3. Приведены примеры уравнений, иллюстрирующие полученные результаты.

Список литературы

[1] А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др. /Под ред. А.М.Виноградова и И.С. Красильщика/ *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* – М.: Факториал. – 1997. – 464 с.

[2] Н.Х. Ибрагимов. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983.

[3] Н.Х. Ибрагимов. *Азбука группового анализа.* – М.: Знание. – 1989. – 48 с.

[4] Н.Х. Ибрагимов. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Знание. – 1991. – 48 с.

[5] Н.Х. Ибрагимов. *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – 421 с.

[6] П. Олвер. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* – М.: Мир. – 2006. – 639 с.

[7] В.В. Шурыгин. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (уч.-метод. пособие). – Казань: Изд-во КПФУ. – 2010. – 55 с.

[8] J. F. Carñena, J. de Lucas, M. F. Rañada, *A geometric approach to integrability of Abel differential equations*, // Int. J. Theor. Phys., Vol. 50, 2114–2124, 2011.

[9] E.S. Cheb-Terrab and A.D. Roche, *Abel ODEs: Equivalence and Integrable Classes*, `arXiv:math-ph/0001037`, 2000.

[10] B. Kruglikov, *Point classification of 2nd order ODEs: Tresse classification revisited and beyond*, Differential Equations — Geometry, Symmetries and Integrability, Abel Symposia, Vol. 5, 2009, 199–221.

[11] V. Lychagin, *Feedback Equivalence of 1-dimensional Control Systems of the 1-st Order*, “Geometry, topology and there applications”, Proceedings of the Institute of mathematics of NAS of Ukraine, 2009, 6(2), pp. 288–302.

[12] D. E. Panayotounakos, T. I. Zarmpoutis, *Construction of Exact Parametric or Closed Form Solutions of Some Unsolvable Classes of Nonlinear ODEs (Abel's Nonlinear ODEs of the First Kind and Relative Degenerate Equations)* // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2011 (2011), Article ID 387429, 13 pages.

[13] O. Wone, *Geometry of the Abel Equation of the first Kind*, `arXiv:1401.2375v1 [math.DG]`, 2014.

Содержание