Известия вузов. Математика
2013, №6, с. 25–36

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.В. МАЛЫГИНА, К.М. ЧУДИНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ. I

Аннотация. Рассматривается класс скалярных линейных дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями и постоянными коэффициентами. Коэффициенты и максимально допустимые значения запаздываний полагаются параметрами, определяющими семейство уравнений исследуемого класса. Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости решений всех уравнений семейства. Установлено, что такие условия полностью определяются свойствами решения начальной задачи для принадлежащего семейству автономного уравнения. Получено несколько вариантов искомых условий в виде оценок решений автономных уравнений на конечном промежутке.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, переменное запаздывание, несколько запаздываний, устойчивость, функция Коши.

УДК: 517.929

Данная статья является первой частью исследования устойчивости решений скалярных дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. Поиск эффективных признаков устойчивости определил необходимость исследования также других асимптотических свойств решений, в частности, знакоопределенности и ограниченности. Поскольку количество работ, посвященных этим вопросам, в последние годы быстро растет, нам представляется, что при изложении результатов необходимо стремиться к возможно большей ясности определения их места в общей картине знаний о предмете. Это стремление во многом определяет как набор результатов, включенных в данную статью, так и структуру изложения.

Основным содержанием статьи является доказательство ряда утверждений, которые обосновывают применяемый нами метод получения эффективных признаков устойчивости. Первый раздел представляет собой краткий обзор основных работ, в которых получены эффективные признаки устойчивости решений уравнений, относящихся к исследуемому классу. Второй раздел посвящен постановке задачи. Вводится понятие *устойчивости семейства уравнений*, которое помогает прояснить понимание *точности* области устойчивости, а тем самым и значение полученных результатов. В третьем разделе приводятся основные результаты статьи: доказываются утверждения, связывающие свойства решений неавтономных уравнений из определенного семейства со свойствами решения соответствующего семейству автономного уравнения; получены эффективно проверяемые критерии устойчивости всех уравнений семейства.

Поступила 27.03.2012

1. История вопроса

Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных уравнений с запаздывающим аргументом, выраженные в терминах исходных параметров, даже в скалярном случае удается получить только для избранных классов уравнений: для автономных уравнений ([1], гл. 10), для некоторых уравнений с периодическими коэффициентами [2], [3], а также некоторых уравнений с запаздыванием специального вида [4], близких по свойствам к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Поэтому для уравнений с произвольным переменным запаздыванием ищут *достаточные* условия (*признаки*) устойчивости. Такие признаки бывают разной силы. Предпочтение, естественно, следует отдать тем, для которых удается показать существенность всех условий и неулучшаемость границ областей устойчивости в пространстве параметров уравнения. Историю таких признаков следует вести, видимо, от результатов А.Д. Мышкиса об уравнениях с одним переменным запаздыванием.

Теорема ([5]). *Пусть $0 \le r(t) \le \omega$, $t \ge 0$. Тогда если $0 < b\omega < 3/2$, то решения уравнения $\dot{x}(t) = -bx(t-r(t))$ асимптотически устойчивы; если $0 \le b\omega \le 3/2$, то решения устойчивы по Ляпунову.*

В работе [5] приведены также примеры, показывающие *точность* постоянной 3/2 в следующем смысле: если $b\omega = 3/2$, то можно построить запаздывание, при котором решение уравнения не является асимптотически устойчивым, а если $b\omega = 3/2+\varepsilon$, где ε сколь угодно мало, то существует запаздывание, при котором решение уравнения неограниченно растет.

В 60 – 90-х гг. прошлого века приведенная теорема обобщалась в работах [6]–[8], но обобщения так или иначе сводились к уравнению с одним запаздыванием.

Принципиально новый шаг был сделан в статье [9], где рассматривалось уравнение с двумя слагаемыми $\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t-r(t))$ в предположении ограниченности запаздывания: $0 \le r(t) \le \omega$. Для этого уравнения был дан признак асимптотической устойчивости в терминах первого минимума решения вспомогательного уравнения и была приведена область устойчивости, построенная численными методами. Существенно, что она была получена для коэффициентов a и b любого знака. При $a = 0$ область асимптотической устойчивости совпадает с интервалом $0 < b\omega < 3/2$, найденным А.Д. Мышкисом.

В [10] результат [9] был обобщен на уравнения

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_kx(t-r_k(t)), \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_k \ge 0$, $0 \le r_k(t) \le \omega$, $k = \overline{1,n}$. В той же работе было найдено аналитическое описание области устойчивости, которую оказалось возможным представить как множество D на плоскости в координатах $\{a_0\omega, b\omega\}$, где $b = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Внутренность множества D — область асимптотической (совпадающей с экспоненциальной) устойчивости; на границе множества D (за исключением особой точки $M(1,1)$) решение уравнения равномерно устойчиво. Область D является точной: если точка не принадлежит ее внутренности, то существует уравнение из рассматриваемого класса, решение которого не стремится к нулю; отступление от границы вне области D на любую сколь угодно малую величину приводит к появлению неограниченных решений. Если параметры уравнения попадают в точку M, то решение также может быть неограниченным.

При всех достоинствах последнего результата он имеет очевидный недостаток: предполагается, что все запаздывания имеют общую границу ω. Ясно, что если для некоторых запаздываний границу уменьшить, то область D перестанет быть точной областью устойчивости (в указанном выше смысле). Эффективный метод получения точных областей устойчивости в случаях, когда разные запаздывания имеют разные границы: $0 \le r_k(t) \le \omega_k$, $k = \overline{1,n}$, описывается и обосновывается в данной статье.

2. Основные определения и постановка задачи

2.1. **Решение уравнения.** Вопрос, как дать определение решения для уравнений с запаздывающим аргументом, не является тривиальным. Более того, удачное его разрешение, как показала история, может дать принципиально новые возможности исследования. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно определить, каким классам принадлежат связываемые уравнением функции и в каком смысле понимаются производная и равенство; при этом должны быть заданы значения неизвестной функции при значениях аргумента, меньших начального.

По-видимому, в силу исторической традиции, идущей из теории ОДУ, в первых исследованиях уравнений с запаздывающим аргументом было принято определять решение в классе непрерывно дифференцируемых функций ([11], § 1; [12]). При таком подходе *решением* уравнения (1) называется функция $x\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая при всех $t \ge 0$ равенству (1) (производная в нуле является правосторонней), где при всех $\xi \le 0$ полагается $x(\xi) = \varphi(\xi)$, φ — некоторая непрерывная функция. Известно ([11], с. 19), что для любых непрерывных функций $r_k : [s,+\infty) \to [0,\omega_k]$, $\varphi : [s - \max_k \omega_k, s] \to \mathbb{R}$ и $f : [s,+\infty) \to \mathbb{R}$ начальная задача

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)) + f(t), \quad t \ge s;\\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi < s, \end{aligned} \tag{2}$$

однозначно разрешима в классе непрерывно дифференцируемых на $[s,+\infty)$ функций.

Со временем исследователи уравнений с запаздывающим аргументом стали определять решения в классе абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих равенству почти всюду. В таком случае для корректности определения решения начальную функцию достаточно считать локально суммируемой, вследствие чего условие $x(s) = \varphi(s)$ становится необязательным. В связи с этим в научной школе профессора Н.В. Азбелева задачу (2) принято рассматривать как частный случай *задачи Коши*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)) + g(t), \quad t \ge s;\\ &x(\xi) = 0, \quad \xi < s; \quad x(s) = x_0, \end{aligned} \tag{3}$$

однозначно разрешимой на любом отрезке $[s, s_1]$ ([13], [14]; [15], § 1.2) для любой локально суммируемой g, измеримых неотрицательных r_k и $x_0 \in \mathbb{R}$. Чтобы представить задачу (2) в виде (3), достаточно положить $g(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_k(t) \varphi(t - r_k(t))$, где χ_k — характеристические функции множеств $\{t : t - r_k(t) < s\}$, и $x_0 = \varphi(s)$.

Каждая из постановок (2) и (3) начальной задачи имеет свои преимущества. В данной работе используются обе постановки.

2.2. **Устойчивость.** Частным случаем уравнения (1) является уравнение $\dot{x}(t) = a_0 x(t)$, поэтому определения устойчивости уравнения (1) являются обобщениями определений для ОДУ. При традиционном подходе начальная функция φ полагается непрерывной, а устойчивость уравнения (1) рассматривается как непрерывная зависимость решения задачи (2) от функции φ по нормам соответствующих пространств. Решение задачи (2) при $\varphi(\xi) \equiv 0$, $f(t) \equiv 0$ называется *тривиальным решением* уравнения (1). В силу линейности задачи устойчивость тривиального решения характеризует все решения уравнения (1), поэтому можно говорить об устойчивости самого уравнения.

Следующее определение с учетом линейности уравнения (1) соответствует традиционному подходу ([12], с. 130). Через $x_{s,\varphi}$ обозначается решение задачи (2) с начальной точкой s и начальной функцией φ при условии $f(t) \equiv 0$.

Определение 1. Тривиальное решение уравнения (1) называется

- *устойчивым* (по Ляпунову), если для любой начальной точки $s \geq 0$ существует такое число $N_s > 0$, что для любой начальной функции φ и любого $t \geq s$
$$|x_{s,\varphi}(t)| \leq N_s \sup_{\xi \leq s} |\varphi(\xi)|;$$
- *асимптотически устойчивым*, если для любых начальной точки $s \geq 0$ и начальной функции φ имеем $|x_{s,\varphi}(t)| \to 0$ при $t \to \infty$;
- *равномерно устойчивым*, если существует такое число $N > 0$, что для любой начальной точки $s \geq 0$, любой начальной функции φ и любого $t \geq s$
$$|x_{s,\varphi}(t)| \leq N \sup_{\xi \leq s} |\varphi(\xi)|;$$
- *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda > 0$, что для любой начальной точки $s \geq 0$, любой начальной функции φ и любого $t \geq s + \lambda$ имеем $|x_{s,\varphi}(t)| \leq \varepsilon \sup_{\xi \leq s} |\varphi(\xi)|$;
- *экспоненциально устойчивым*, если найдутся такие положительные числа N и γ, что для любой начальной точки $s \geq 0$ и любой начальной функции φ
$$|x_{s,\varphi}(t)| \leq N \sup_{\xi \leq s} |\varphi(\xi)| \exp(-\gamma(t-s)).$$

Представление задачи (2) в виде (3) позволяет рассматривать устойчивость как зависимость решения только от его значения в начальной точке. Пусть x_s есть решение задачи (3) при $x_s(s) = 1$ и $g(t) \equiv 0$. Функцию двух переменных C, определенную на множестве $\Delta = \{(t,s) : t \geq s \geq 0\}$ семейством равенств $C(t,s) = x_s(t)$, назовем *функцией Коши* уравнения (1). Решение задачи (3) определяется явной формулой ([13], [14]; [15], с. 31)
$$x(t) = C(t,s)x(s) + \int_s^t C(t,\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad t \geq s, \tag{4}$$
которая показывает, что все асимптотические свойства уравнения (1) выражаются как свойства его функции Коши. В частности, устойчивость определяется оценками сверху модуля ее значений.

Определение 2. Уравнение (1) называется

- *устойчивым*, если для любого $s \geq 0$ найдется такое число $N_s > 0$, что для любого $t \geq s$ имеем $|C(t,s)| \leq N_s$;
- *асимптотически устойчивым*, если для любого $s \geq 0$
$$|C(t,s)| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty;$$

- *равномерно устойчивым*, если найдется такое число $N > 0$, что для любой пары $(t, s) \in \Delta$ имеем $|C(t, s)| \leq N$;
- *экспоненциально устойчивым*, если найдутся такие числа $N > 0$ и $\gamma > 0$, что для любой пары $(t, s) \in \Delta$
$$|C(t, s)| \leq Ne^{-\gamma(t-s)}.$$

В силу (4) определения 2 и 1 согласованы. Равномерная асимптотическая устойчивость уравнения (1) совпадает с экспоненциальной ([12], с. 197; [8]).

2.3. **Постановка задачи.** Целью работы является получение *точных признаков устойчивости*, т. е. достаточных условий устойчивости, являющихся в своем роде неулучшаемыми. Понятие *точность* не имеет единой трактовки, и исследователи порой поддаются соблазну подчинить его значение своим результатам: явно или неявно определить точность так, чтобы установленные условия оказались точными. Считаем необходимым сделать мотивы нашего понимания точности по возможности наиболее ясными. Поэтому определяем, какие условия устойчивости являются точными (в рамках постановки задачи).

Мы исследуем условия устойчивости уравнения (1), выраженные через коэффициенты a_k и максимальные допустимые значения запаздываний ω_k, т. е. признаки устойчивости *всех* уравнений вида (1) с заданным набором параметров a_k и ω_k при всевозможных измеримых функциях r_k, удовлетворяющих условиям $r_k(t) \in [0, \omega_k]$, $t \geq 0$.

Используемую терминологию удобно расширить следующим образом.

Обозначим $p = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \omega_1, \ldots, \omega_n\} \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

Если набор параметров p и функции r_k фиксированы, то будем говорить о соответствующем *уравнении* (1); если же речь идет о *семействе* уравнений (1), то имеется в виду множество уравнений с фиксированным набором p и всевозможными соответствующими функциями r_k.

Определение 3. Назовем семейство уравнений вида (1) с данным набором параметров p *устойчивым*, если все уравнения с этими параметрами устойчивы.

Теперь смысл понятия *точность признака устойчивости* проясняется следующим образом: достаточные условия устойчивости уравнения (1) являются точными, если и только если они являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости соответствующего семейства (1). Таким образом, роль термина *семейство* состоит в том, чтобы устранить произвол в толковании термина *точность*. Значение последнего определяется тем, на какие семейства разбивается исследуемый класс уравнений.

Итак, ставится задача получения *необходимых и достаточных условий равномерной и экспоненциальной устойчивости семейства уравнений* (1) *при условиях* $a_k, \omega_k > 0$, $r_k : [0, +\infty) \to [0, \omega_k]$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 \in \mathbb{R}$. В процессе исследования постановка задачи уточняется.

3. Основные результаты

Положим $b = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Теорема 1. *Если* $a_0 - b > 0$, *то семейство* (1) *не является устойчивым, а если* $a_0 - b \geq 0$, *то семейство* (1) *не является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Положив $r_k(t) \equiv 0$, $k = \overline{1, n}$, получим ОДУ, решение которого неограничено в случае строгого неравенства и не имеет нулевого предела в случае нестрогого неравенства. □

Поставим в соответствие семейству (1) решение y следующей задачи вида (2):

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = a_0 y(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(t-\omega_k), \quad t \geq 0; \\ &y(\xi) = 1, \quad \xi \leq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1 показывает, что при исследовании устойчивости можно положить $a_0 - b \leq 0$.

Имеем $\lim\limits_{t\to+0} \dot{y}(t) = a_0 - b$. Если $a_0 - b < 0$, то на некотором непустом промежутке $(0, t_0)$ функция y убывает. Определим величину $l = l(p)$ следующим образом. Если функция y убывает на полуоси $(0, +\infty)$, положим $l = \infty$. В противном случае значение l равно максимальной длине начинающегося в нуле отрезка убывания функции y. Именно, положим

$$l = \inf\{t \geq 0 : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \varepsilon) \ (y(t+\delta) \geq y(t))\}.$$

Далее полагаем $a_0 - b < 0$ *и* $l < \infty$. Случай $l = \infty$ будет исследован отдельно.

3.1. **Метод test-функций.** Пусть задан набор p параметров семейства (1). Положим $\omega = \max\limits_k \omega_k$. Для каждого $s \in \mathbb{R}$ определим функцию $y_s : [s-\omega, +\infty) \to \mathbb{R}$ равенством $y_s(t) = y(t-s)$. Функции множества $\{y_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ назовем *test-функциями* семейства (1). Из данных определений вытекают следующие свойства test-функций:

(a) если $t \in [s-\omega, s]$, то $y_s(t) = 1$;
(b) для любых чисел $t \in \mathbb{R}$ и $x \in [y(l), 1)$ найдется единственное число $s \in [t-l, t)$ такое, что $y_s(t) = x$;
(c) если $t \in [s_1, s_1 + l] \cap [s_2, s_2 + l]$, то условия $s_1 < s_2$ и $y_{s_1}(t) < y_{s_2}(t)$ равносильны;
(d) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что $y_s(s+l+\delta) \geq y_s(s+l)$.

Следующий результат описывает связь test-функций с семейством (1) и закладывает фундамент применяемого нами метода исследования устойчивости.

Лемма 1. *Пусть x — решение задачи Коши (3), где $g(t) \equiv 0$, $\tau \in [0, +\infty)$, $s \in [\tau - l, \tau)$ и $\alpha < 0$. Если $x(\tau) = \alpha y_s(\tau)$ и для любого $t \in [\tau - \omega, \tau]$ справедливо неравенство $x(t) \geq \alpha y_s(t)$, то найдется такое $\lambda > 0$, что для любого $t \in [\tau, \tau + \lambda]$ справедливо неравенство*

$$x(t) \leq \alpha y_s(t).$$

Доказательство. В силу линейности задач (3) и (5) без ограничения общности можно положить $\alpha = -1$. Обозначим $\theta = \frac{1}{2} \min_k \omega_k$, $\eta = -y_s$. Так как функция η стационарна на отрезке $[s-\omega, s]$ и возрастает на интервале (s, τ), то $x(\tau) = \eta(\tau) > \eta(\tau - \theta)$. Значит, в силу непрерывности функции x найдется такое число $\delta \in (0, \theta)$, что для всех $t \in [\tau, \tau+\delta]$ получим $x(t) \geq \eta(\tau-\theta)$. Покажем, что для всех $t \in [\tau, \tau+\delta]$ и всех $k = \overline{1, n}$ будет $x(t - r_k(t)) \geq \eta(t-\omega_k)$. Действительно, если для данных t и k имеем $t - r_k(t) > \tau$, то $x(t - r_k(t)) \geq \eta(\tau - \theta) \geq \eta(t - 2\theta) \geq \eta(t - \omega_k)$; если же $t - r_k(t) \leq \tau$, то $x(t - r_k(t)) \geq \eta(t - r_k(t)) \geq \eta(t - \omega_k)$.

В силу установленного неравенства и уравнений (1) и (5) при $t \in [\tau, \tau + \delta]$ запишем

$$\dot{x}(t) - \dot{\eta}(t) = a_0(x(t) - \eta(t)) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x(t - r_k(t)) - \eta(t - \omega_k)) \leq a_0(x(t) - \eta(t)).$$

Для функции $z = x - \eta$ на отрезке $[\tau, \tau + \delta]$ получим

$$\dot{z}(t) \leq a_0 z(t), \quad t \in [\tau, \tau + \delta]; \quad z(\tau) = 0.$$

В случае $a_0 \geq 0$ имеем $z(t) \leq z(\tau) e^{a_0(t-\tau)} = 0$.

Положим $a_0 < 0$. Допустим, что найдется число $t_1 \in [\tau, \tau + \delta]$ такое, что $z(t_1) > 0$. Тогда найдется $t_0 = \sup\{t \in [\tau, t_1] : z(t) \leq 0\}$, причем в силу непрерывности z имеем $z(t_0) = 0$ и

$z(t) > 0$ для всех $t \in (t_0, t_1)$. Но тогда $z(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot z(t)\,dt \le a_0 \int\limits_{t_0}^{t_1} z(t)\,dt < 0$, что противоречит предположению.

Таким образом, $z \le 0$ при $[\tau, \tau+\delta]$, а значит, можно положить $\lambda = \delta$. □

Лемма 2. *Для решения y задачи* (5) *справедливо неравенство $y(l) < 0$.*

Доказательство. В силу автономности задачи (5) очевидно, что функция y непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$. Значит, $\dot y(l) = 0$. Кроме того, функция y стационарна на промежутке $[-\omega, 0)$ и убывает на $(0, l)$, следовательно, $y(l - \omega_k) > y(l)$.

Допустим, что $y(l) \ge 0$. Тогда, поскольку $a_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, и $b > a_0$, из (5) получаем противоречие

$$0 = \dot y(l) = a_0 y(l) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(l - \omega_k) < a_0 y(l) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(l) = y(l)(a_0 - b) \le 0. \qquad \square$$

Обозначим $h = -y(l)$.

Теорема 2. *Пусть x — решение задачи Коши* (3), *где $g(t) \equiv 0$. Если найдутся такие $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, что $l + \omega \le t_1 < t_2$ и $|x(t_1)| < |x(t_2)|$, то найдется такое $t_0 \in [t_1 - l - \omega, t_1)$, что $x(t_0) = -\frac{1}{h}x(t_1)$.*

Доказательство. 1. В силу непрерывности функции x можно считать, что либо $0 < x(t_1) < x(t_2)$, либо $0 > x(t_1) > x(t_2)$. Второй случай сводится к первому сменой знака начального значения x_0. Пусть $\tau = \sup\{t \in [t_1, t_2] : x(t) \le x(t_1)\}$. Имеем $\tau \in [t_1, t_2)$, $x(\tau) = x(t_1)$ и $x(t) > x(\tau)$ для любого $t \in (\tau, t_2)$.

2. Для каждого $s \in \mathbb{R}$ определим функцию $\eta_s : [s - \omega, +\infty) \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\eta_s = -\frac{x(\tau)}{h} y_s$, где y_s — test-функция. Согласно этому определению и лемме 2 имеем $\eta_{\tau - l}(\tau) = x(\tau) > 0$. В силу свойства (d) test-функций для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что $\eta_{\tau-l}(\tau + \delta) \le \eta_{\tau-l}(\tau)$. Отсюда с учетом п. 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $\tau_1 \in (\tau, \tau + \varepsilon)$, что $\eta_{\tau-l}(\tau_1) < x(\tau_1)$.

3. Допустим, что посылки теоремы верны, а заключение неверно. Тогда в силу непрерывности функции x имеем $x(t) > -\frac{x(\tau)}{h}$ для всех $t \in [\tau - l - \omega, \tau]$. В силу свойства (b) test-функций для каждого такого $t \in [\tau - l, \tau]$, что $x(t) \le x(\tau)$, найдется единственное число $s(t) \in [t - l, t]$ такое, что $\eta_{s(t)}(t) = x(t)$; для остальных $t \in [\tau - l, \tau]$ положим $s(t) = \tau - l$. Обозначим $\sigma = \sup\{s(t) : t \in [\tau - l, \tau]\}$. Учитывая, что $s(\tau) = \tau - l$, имеем $\sigma \in [\tau - l, \tau]$. Для всех $t \in [\sigma - \omega, \sigma]$ в силу сделанного допущения и свойства (a) test-функций имеем $\eta_\sigma(t) = -\frac{x(\tau)}{h} < x(t)$. Допустим, что $t \in [\sigma, \tau]$ и $\eta_\sigma(t) > x(t)$. Тогда $\eta_\sigma(t) > \eta_{s(t)}(t)$, а значит, в силу свойства (c) test-функций $s(t) > \sigma$, что противоречит определению точки σ. Таким образом, для всех $t \in [\sigma - \omega, \tau]$ имеем $\eta_\sigma(t) \le x(t)$.

4. В случае $\sigma = \tau - l$ согласно п. 3 в точке τ выполняются условия леммы 1 (при $s = \tau - l$, $\alpha = -\frac{x(\tau)}{h} < 0$). Следовательно, найдется такое число $\lambda > 0$, что $\eta_{\tau-l}(t) \ge x(t)$ для любого $t \in [\tau, \tau + \lambda]$, а это противоречит п. 2.

5. Рассмотрим случай $\sigma > \tau - l$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $s_\varepsilon \in [\sigma - \varepsilon, \sigma]$ такое, что $\eta_{s_\varepsilon}(t) = x(t)$ для некоторого $t \in [\tau - l, \tau]$. В силу равномерной непрерывности test-функций на компакте $[\sigma, \tau]$ имеем $\sup\limits_{t \in [\sigma, \tau]} |\eta_\sigma(t) - \eta_{s_\varepsilon}(t)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, множество $T = \{t \in [\sigma, \tau] : \eta_\sigma(t) = x(t)\}$ не пустое. Обозначим $\tau_0 = \sup T$. Здесь $\tau_0 < \tau$, поскольку в силу свойства (c) test-функций $\eta_\sigma(\tau) < \eta_{\tau-l}(\tau) = x(\tau)$. Для всех $t \in (\tau_0, \tau)$ имеем $\eta_\sigma(t) < x(t)$. С другой стороны, согласно п. 3 и лемме 1 найдется такое число $\lambda > 0$, что $\eta_\sigma(t) \le x(t)$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_0 + \lambda]$. Противоречие. □

Следствиями доказанной теоремы являются два критерия устойчивости семейства (1).

Теорема 3. *Для экспоненциальной устойчивости семейства* (1) *необходимо и достаточно выполнения неравенства* $h < 1$.

Теорема 4. *Для равномерной устойчивости семейства* (1) *необходимо и достаточно выполнения неравенства* $h \le 1$.

Доказательство теорем 3 *и* 4. *Необходимость.* Рассмотрим функцию Коши $C(t,s)$ уравнения (1), в котором функции r_k, $k = \overline{1,n}$, определены следующим образом. Для $m = 0,1,2,\dots$ положим

$$r_k(t) = \begin{cases} t - ml, & t \in [ml, ml + \omega_k); \\ \omega_k, & t \in [ml + \omega_k, (m+1)l), \end{cases}$$

если $\omega_k < l$; $r_k(t) = t - ml$ для всех $t \in [ml, (m+1)l)$, если $\omega_k \ge l$.

Для $t \in [ml, (m+1)l]$ имеем $C(t+s,s) = (-h)^m y_{ml}(t)$, в частности, $C(ml+s,s) = (-h)^m$. Таким образом, если $h \ge 1$, то $C(\cdot,s)$ не стремится к нулю; если $h > 1$, то функция Коши неограничена.

Достаточность. 1. Пусть $h \le 1$. Рассмотрим произвольное решение x уравнения (1). Докажем, что существует такое число $L > 0$, что для любого $\tau_0 \ge l + \omega$ если

$$\sup_{t\in[\tau_0-l-\omega,\tau_0]} |x(t)| = S < \infty, \tag{6}$$

то $\inf\limits_{t\in[\tau_0,\tau_0+L]} |x(t)| < Sh$. Пусть для данного τ_0 неравенство (6) имеет место. Если существуют такие точки $t_1, t_2 \ge \tau_0$, что $t_1 < t_2$ и $Sh < |x(t_1)| < |x(t_2)|$, то по теореме 2 имеем $\sup\limits_{t\in[\tau_0-l-\omega,\tau_0]} |x(t)| \ge \frac{|x(t_1)|}{h} > S$, что противоречит неравенству (6). Значит, если $\tau_1 > \tau_0$ и $|x(t)| \ge Sh$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$, то функция $|x(\cdot)|$ не возрастает на интервале (τ_0,τ_1). Положим $\tau_1 = \tau_0 + \omega + \delta$, где $\delta > 0$. Допустим, что для всех $t \in [\tau_0,\tau_1]$ имеем $x(t) \ge Sh$ (случай $x(t) \le -Sh$ аналогичен). Тогда для почти всех $t \in [\tau_0 + \omega, \tau_1]$ получим

$$\dot x(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)) \le \left(a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) x(t) \le (a_0 - b)Sh,$$

откуда $x(\tau_1) \le S + \delta(a_0 - b)Sh = Sh(1 - (\delta(b - a_0) - \frac{1-h}{h}))$. Следовательно, величина δ не может превосходить значения $\frac{1-h}{h(b-a_0)}$. Таким образом, для произвольного τ_0 достаточно положить $L > \omega + \frac{1-h}{h(b-a_0)}$.

2. Обозначим $M = \sup\limits_{t\in[0,l+\omega]} |x(t)|$, $T = L + l + \omega$, $d(t) = Mh^n$ для всех $t \in [nT,(n+1)T)$, $n = 0,1,2,\dots$. Докажем, что

$$|x(t)| \le d(t), \quad t \ge 0. \tag{7}$$

Допустим, что это не так. Обозначим $\tau = \inf\{t \ge 0 : |x(t)| > d(t)\}$. Покажем, что $\tau \ne nT$, $n = 1,2,\dots$. Действительно, пусть $\tau = n_0 T$, тогда $|x(\tau)| \ge Mh^{n_0+1}$. Поскольку в силу п. 1 $\inf\limits_{t\in[\tau-L,\tau]} |x(t)| < Mh^{n_0+1}$, найдутся такие точки $t_1, t_2 \in [\tau - L, \tau]$, что $t_1 < t_2$ и $Mh^{n_0+1} < |x(t_1)| < |x(t_2)|$. Значит, по теореме 2 найдется такая точка $t_0 \in [\tau - T, \tau]$, что $|x(t_0)| > Mh^n$, а это противоречит определению точки τ. Таким образом, $\tau \in (nT,(n+1)T)$ для некоторого n. Тогда найдутся такие $t_1, t_2 \in (nT,(n+1)T)$, что $t_1 < t_2$ и $Mh^n < |x(t_1)| < |x(t_2)|$. Получим опять, что найдется такое $t_0 > (n-1)T$, что $|x(t_0)| > Mh^{n-1}$. Из этого по теореме 2 следует противоречие определению точки τ.

3. В теореме 2 и в пп. 1, 2 в качестве функции x можно рассматривать функцию $C(\cdot, s)$ для любой начальной точки s. В силу свойств функции Коши ([14]; [15], с. 98) ее значения $C(t,s)$ при $t \in [s, s+T]$ ограничены равномерно по s. Поэтому если переопределить $M = \sup\limits_{t\in[s,s+l+\omega]} |C(t,s)|$, то (7) переходит в неравенство $\sup\limits_{t-s\in[nT,(n+1)T]} |C(t,s)| \le Mh^n$, из которого теорема следует очевидным образом. □

Замечание 1. Теорема 3 сохраняет силу, если положить $\omega_k = \varlimsup\limits_{t\to+\infty} r_k(t)$, расширяя тем самым семейство (1), определяемое набором параметров p. Действительно, необходимость условия $h < 1$ для экспоненциальной устойчивости расширенного семейства, очевидно, сохраняется. Достаточность следует из непрерывной зависимости l и $y(l)$ от набора ω_k [16].

Замечание 2. В отличие от теоремы 3 в теореме 4 нельзя положить $\omega_k = \varlimsup\limits_{t\to+\infty} r_k(t)$. Действительно, уравнение $\dot{x}(t) = -x(t - r(t))$ при условии $\sup\limits_{t\ge 0} r(t) \le \frac{3}{2}$ равномерно устойчиво. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$r(t) = \begin{cases} t - \frac{5}{2}n, & t \in \left[\frac{5}{2}n, \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}\right); \\ \frac{3}{2} - \frac{2}{n+2}\left(t - \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}\right), & t \in \left[\frac{5}{2}n + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}(n+1)\right]. \end{cases}$$

Значения $x(t)$ любого решения уравнения на промежутках $\left[\frac{5}{2}n, \frac{5}{2}(n+1)\right]$ выражаются в явном виде через $x(0)$:

$$x\left(\frac{5}{2}n\right) = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x\left(\frac{5}{2}(n-1)\right) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = (-1)^n \left(1 + \frac{n}{2}\right) x(0).$$

Таким образом, решения уравнения неограниченно растут, при этом $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} r_k(t) = \frac{3}{2}$.

3.2. **Оценка значений l и h в случае $a_0 \le 0$.** Теоремами 3 и 4 задача устойчивости семейства неавтономных уравнений (1) в случае $l < \infty$ сводится к оценке величины $h = -y(l)$, которая определяется решением автономной задачи (5) и представляется в явном аналитическом виде. Так как l может быть сколь угодно большим, то, вообще говоря, для оценки значения $y(l)$ требуется неограниченный объем вычислений. Дополнительные сведения о параметрах исследуемых семейств могут позволить оценить сверху величину l в устойчивом случае $y(l) \ge -1$.

Теорема 5. *Если $a_0 \le 0$ и $h \ge \frac{1}{2}$, то $l \le \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$.*

Доказательство. Пусть y_0 есть решение задачи

$$\begin{aligned} &\dot{y}_0(t) = -\frac{2h+1}{2\omega} y_0(t-\omega), \quad t \ge 0; \\ &y_0(\xi) = 1, \quad \xi \le 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$y_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2h+1}{2\omega} t, & t \in [0, \omega]; \\ \frac{1}{2} - h - \frac{2h+1}{2\omega}(t-\omega) + \frac{(2h+1)^2}{8\omega^2}(t-\omega)^2, & t \in [\omega, 2\omega], \ldots . \end{cases}$$

Таким образом, если $h \ge \frac{1}{2}$, то функция y_0 достигает на отрезке $[0, 2\omega]$ первого минимума $y_0\left(\frac{2\omega}{2h+1} + \omega\right) = -h$. Поскольку при этом функция y_0 линейна на отрезке $[0, \omega]$ и $y_0(0) = 1$, то $y_0\left(\frac{2\omega}{2h+1}\right) = 0$.

Определим семейство функций $\{\eta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, $\eta_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, следующим образом:

$$\eta_s(t) = \begin{cases} 1, & t < s; \\ y_0(t-s), & t \in [s, s + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega]; \\ -h, & t > s + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega. \end{cases}$$

Существует $s_0 = \inf\{s : y(t) \le \eta_s(t),\ t \in [0,l]\} \in [0,l)$. Для краткости обозначим $\eta = \eta_{s_0}$. Имеем $y(0) = \eta(s_0) = 1$, $y(l) = \eta(s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega) = -h$, функции y и ω непрерывно дифференцируемы и убывают на интервалах $(0,l)$ и $(s_0, s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega)$ соответственно. При этом $l \le s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$, поскольку в противном случае имеем $y(s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega) > -h = \eta(s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega)$, что противоречит определению функции η.

Найдется такая точка $t_0 \in [0,l]$, что

$$y(t_0) = \eta(t_0). \tag{9}$$

Действительно, в силу определения точки s_0 и равномерной непрерывности на отрезке $[0,l]$ функции $\delta = \eta - y$ имеем $\inf\{\delta(t) : t \in [0,l]\} = 0$, а значит, функция δ достигает нуля.

Таким образом, если $t_0 = 0$, то $s_0 = 0$, следовательно, $l \le \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$. Покажем, что случай $t_0 > 0$ невозможен. Тем самым теорема будет доказана.

Заметим, что если $t_0 > 0$, то

$$\dot y(t_0) = \dot\eta(t_0). \tag{10}$$

Действительно, если $l = s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$, то $\dot y(t_0) = \dot\eta(t_0) = 0$, если же $l < s_0 + \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$ и $\dot y(t_0) \ne \dot\eta(t_0)$, то в любой окрестности точки t_0 найдется такая точка t_1, что $y(t_1) > \eta(t_1)$, это противоречит определению η.

Далее, из (5) при условии $a_0 \le 0$ следует

$$\forall t \in (0,l) : \ddot y(t) \ge 0. \tag{11}$$

В случае $t_0 \in (0, s_0 + \omega]$ имеем $\ddot\eta(t_0) = 0$, что с учетом (9)–(11) противоречит определению функции η. Значит, этот случай невозможен.

Рассмотрим оставшийся случай $t_0 > s_0 + \omega$.

Если $t_0 = l$, то $\eta(t_0) = y(l) = -h$, откуда $t_0 = \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$. Но тогда для каждого $k = \overline{1,n}$ имеем $y(l - \omega_k) \le y(l - \omega) < \eta(l - \omega) = 0$, откуда $\dot y(l) < 0$, что неверно. Следовательно, $t_0 < l \le \frac{2\omega}{2h+1} + \omega$ и $\eta(t_0 - \omega) > \eta(l - \omega) \ge 0$.

Сравним значения $y(l)$ и $\eta(l)$. Из уравнений (5) и (8) имеем

$$\eta(t_0) - \eta(l) = -\int_{t_0}^{l} \dot\eta(s)\,ds = \int_{t_0}^{l} \frac{2h+1}{2\omega}\eta(s-\omega)\,ds = \frac{2h+1}{2\omega}\int_{t_0-\omega}^{l-\omega} \eta(s)\,ds, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} y(t_0) - y(l) &= -\int_{t_0}^{l} \dot y(s)\,ds = -\int_{t_0}^{l}\left(a_0 y(s) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(s-\omega_k)\right) ds = \\ &= -a_0\int_{t_0}^{l} y(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{t_0-\omega_k}^{l-\omega_k} y(s)\,ds. \end{aligned} \tag{13}$$

С другой стороны, из равенства (10) имеем

$$\frac{2h+1}{2\omega}\eta(t_0 - \omega) = -a_0 y(t_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k y(t_0 - \omega_k). \tag{14}$$

Умножим обе части равенства (14) на $\frac{l-t_0}{2}\left[1+\frac{\eta(l-\omega)}{\eta(t_0-\omega)}\right]$. В левой части получим произведение $\frac{2h+1}{2\omega}$ на площадь трапеции с вершинами на декартовой плоскости в точках $(t_0-\omega,0)$, $(t_0-\omega,\eta(t_0-\omega))$, $(l-\omega,\eta(l-\omega))$ и $(l-\omega,0)$, а значит, величину (12). В правой же части получим значение, большее величины (13). Действительно, для каждого $k=\overline{1,n}$

- если $y(t_0-\omega_k)=0$, то $y(t_0-\omega_k)\frac{l-t_0}{2}\left[1+\frac{\eta(l-\omega)}{\eta(t_0-\omega)}\right]=0>\int\limits_{t_0-\omega_k}^{l-\omega_k}y(s)\,ds$;
- если $y(t_0-\omega_k)>0$, то, учитывая $\ddot\eta(t)=0$ при $t\in[t_0-\omega,l-\omega]$, (11) и $y\left(\frac{2\omega}{2h+1}\right)<0$, при $t\in[t_0-\omega_k,l-\omega_k]$ имеем $\dot y(t)<\frac{y(t_0-\omega_k)}{\eta(t_0-\omega_k)}\dot\eta(t)$, значит, $y(l-\omega_k)<\frac{\eta(l-\omega_k)}{\eta(t_0-\omega_k)}y(t_0-\omega_k)=\frac{\eta(l-\omega)}{\eta(t_0-\omega)}y(t_0-\omega_k)$, откуда

$$y(t_0-\omega_k)\frac{l-t_0}{2}\left[1+\frac{\eta(l-\omega)}{\eta(t_0-\omega)}\right]>\frac{l-t_0}{2}\left[y(t_0-\omega_k)+y(l-\omega_k)\right]\ge\int_{t_0-\omega_k}^{l-\omega_k}y(s)\,ds; \tag{15}$$

- если $y(t_0-\omega_k)<0$, то, учитывая $y(l-\omega_k)<y(t_0-\omega_k)$ и (11), получаем цепочку неравенств (15).

Поскольку $y(t_0)<0$, аналогично последнему случаю $\frac{l-t_0}{2}y(t_0)\left[1+\frac{\eta(l-\omega)}{\eta(t_0-\omega)}\right]>\int\limits_{t_0}^{l}y(s)\,ds$.

Таким образом, $\eta(t_0)-\eta(l)>y(t_0)-y(l)$. Отсюда с учетом (9) получаем $y(l)>\eta(l)$, что противоречит определению функции η. Случай $t_0>s_0+\omega$ невозможен. □

Следствие. Пусть $a_0\le 0$. Тогда если $l\ge 5\omega/3$, то $y(l)\ge -1$; если $l>5\omega/3$, то $y(l)>-1$.

4. Заключение

Продолжение данной работы содержит критерии, позволяющие различать случаи $l<\infty$ и $l=\infty$, критерии устойчивости семейства (1) в случае $l=\infty$ и применение полученных результатов для аналитического описания точной области устойчивости семейства (1).

Благодарим нашего коллегу А.Ю. Куликова за идеи, использованные при формулировке и доказательстве леммы 1.

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения* (Мир, М., 1967).
[2] Зверкин А.М. *К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами*, ДАН СССР **128** (5), 882–885 (1959).
[3] Шиманов С.Н., Долгий Ю.Ф. *О существовании зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием*, в сб. “Устойчивость и нелинейные колебания” (Свердловск, 1989), с. 11–18.
[4] Башкиров А.И. *Устойчивость уравнений запаздывающего типа с периодическими параметрами*, Дифференц. уравнения **22** (11), 1994–1997 (1986).
[5] Мышкис А.Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом*, Матем. сб. **28** (70), № 3, 641–658 (1951).
[6] Yorke J.A. *Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations*, J. Different. Equat., № 7, 189–202 (1970).
[7] Yoneyama T. *On the* 3/2 *stability theorem for one dimensional delay-differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **125** (1), 161–173 (1987).
[8] Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения, **28** (10), 1716–1723 (1992).
[9] Amemiya T. *On the delay-independent stability of a delayed differential equation of* 1st *order*, J. Math. Anal. Appl., **142** (1), 13–25 (1989).
[10] Малыгина В.В. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием*, Изв. вузов. Матем., № 5, 72–85 (1993).

[11] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (Наука, М., 1972).
[12] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* (Мир, М., 1984).
[13] Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решения линейного функционально-дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **9** (6), 1026–1036 (1973).
[14] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с запаздыающим аргументом*, Изв. вузов. Матем., №6, 3–16 (1997).
[15] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с обыкновенными производными* (Изд-во Пермск. ун-та, Пермь, 2001).
[16] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения, **8** (9), 1542–1552 (1972).

В.В. Малыгина

доцент, кафедра вычислительной математики и механики,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,

e-mail: mavera@list.ru

К.М. Чудинов

доцент, кафедра вычислительной математики и механики,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,

e-mail: cyril@list.ru

V.V. Malygina and K.M. Chudinov

Stability of solutions to differential equations with several variable delays. I

Abstract. We consider a class of scalar linear differential equations with several variable delays and constant coefficients. A family of equations of the class is defined by coefficients and maximum admissible values of delays. We obtain conditions that are necessary and sufficient for the stability of solutions to all equations of the family. It is ascertained that the conditions are determined entirely by properties of the solution to the initial problem for an autonomous equation that belongs to the family. Some alternatives of required conditions are obtained in the form of estimates for solutions to autonomous equations in a finite interval.

Keywords: functional differential equation, varying delay, several delays, stability, the Cauchy function.

V.V. Malygina

Associate Professor, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,
State National Research Polytechnical University of Perm,
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,

e-mail: mavera@list.ru

K.M. Chudinov

Associate Professor, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,
State National Research Polytechnical University of Perm,
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,

e-mail: cyril@list.ru