Известия вузов. Математика
2019, № 10, с. 38–45

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. КАЛИНИЧЕНКО, М.А. ПЛИЕВ

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА В ГИЛЬБЕРТОВЫХ A-МОДУЛЯХ

Аннотация. Установлено, что для произвольных элементов x и y гильбертова A-модуля M над локальной C^*-алгеброй A обобщенное равенство треугольника $|x+y| = |x| + |y|$ выполняется тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle = |x||y|$.

Ключевые слова: локальная C^*-алгебра, гильбертов A-модуль, локальное гильбертово пространство, модульно компактный оператор, $*$-гомоморфизм, равенство треугольника.

УДК: 517.98: 519.46

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-38-45

Введение

Многие классические неравенства анализа, справедливые для чисел и функций, допускают обобщение для некоммутативных матриц и операторов. В последние годы операторные аналоги различных классических формул были установлены в ряде работ [1]–[3]. Стоит отметить, что прямой перенос известных формул для некоммутативных переменных часто бывает невозможен. Так обстоит дело с хорошо известным неравенством треугольника для модуля $|x+y| \le |x| + |y|$, справедливым как в числовых полях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, так и в классических функциональных пространствах непрерывных и измеримых функций $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$ $(0 \le p \le \infty)$. Данное неравенство в общем случае нарушается уже в простейшей некоммутативной алгебре $M_2(\mathbb{C})$ квадратных 2×2 комплексных матриц. В качестве матриц x и y, для которых неравенство не выполняется, следует взять

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подробности можно найти в [4]. Напомним, что $|x| = (x^*x)^{1/2}$ для любой матрицы $x \in M_n(\mathbb{C})$. Тем не менее неравенство треугольника для любой пары $x, y \in M_n(\mathbb{C})$ справедливо в следующей форме:

$$|x+y| \le u|x|u^* + v|y|v^*,$$

где u, v — некоторые унитарные матрицы, зависящие от x и y ([5]). Равенство треугольника в виде $|x+y| = |x| + |y|$ для элементов операторных алгебр и модулей изучалось в работах [6], [7].

Поступила в редакцию 29.08.2018, после доработки 29.08.2018. Принята к публикации 19.12.2018.

Благодарности. М.А. Плиев поддержан грантом Российского фонда фундаментальных исследований 17-51-12064.

В настоящей статье продолжим данную линию исследований и найдем критерий выполнения равенства треугольника для произвольных элементов x, y гильбертова A-модуля $\mathcal{M}$ над локальной C^*-алгеброй A.

1. Предварительные сведения

Цель этого раздела — зафиксировать терминологию и используемые в тексте обозначения. Стандартный источник по теории C^*-алгебр — монография [8]. Все необходимые сведения о локальных C^*-алгебрах и гильбертовых A-модулях над ними можно найти в [9], [10]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел.

Всюду ниже будем полагать, что внутренние произведения сопряженно линейны по первой переменной и линейны по второй переменной. Пространство линейных, непрерывных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство K, обозначается через $L(H, K)$ и $L(H) := L(H, H)$.

Пусть A — инволютивная алгебра и $p : A \to \mathbb{R}_+$ — полунорма на A, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $p(xy) \leq p(x)p(y)$ для любых $x, y \in A$,

2) $p(x) = p(x^*)$ для любого $x \in A$.

Если, кроме того, для любого $x \in A$ справедливо равенство $p(x^*x) = p(x)^2$, то p называется *C^*-полунормой.* Инволютивная топологическая алгебра, полная относительно отделимой топологии, задаваемой разделяющим, направленным семейством C^*-полунорм $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, называется *локальной C^*-алгеброй.* Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Каждая C^*-алгебра является локальной C^*-алгеброй.

Пример 2. Каждая замкнутая $*$-подалгебра локальной C^*-алгебры также является локальной C^*-алгеброй.

Пример 3. Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и пусть $C(Q)$ — алгебра непрерывных комплекснозначных функций, заданных на Q. Для каждого компактного множества $K \subset Q$ введем полунорму

$$p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|, \quad f \in C(Q).$$

Тогда p_K будет C^*-полунормой и топологическая алгебра $C(Q)$ с топологией, задаваемой разделяющим, направленным семейством полунорм, является локальной C^*-алгеброй.

Пример 4. Пусть Λ — частично упорядоченное, направленное вверх индексное множество, $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство гильбертовых пространств таких, что $H_\lambda \subset H_\mu$ и

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda = \langle\cdot,\cdot\rangle_\mu|_{H_\lambda}, \quad \lambda \leq \mu,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ — скалярное произведение в пространстве H_λ, $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим локально выпуклое пространство

$$\mathcal{H} := \lim_{\to} H_\lambda = \bigcup_\lambda H_\lambda.$$

Это пространство с топологией индуктивного предела называется *локальным гильбертовым пространством.* Линейный оператор $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется *непрерывным*, если имеет место представление

$$T = \lim_{\to} T_\lambda, \quad T_\lambda \in L(H_\lambda),$$

где $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство операторов $T_\lambda \in L(H_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Векторное пространство всех линейных непрерывных операторов на $\mathcal{H}$ обозначается через $L(\mathcal{H})$. Отметим, что

$L(\mathcal{H})$ является также и алгеброй, и с каждым семейством $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ можно связать семейство $(T_\lambda)^*_{\lambda\in\Lambda}$, где $T^*_\lambda \in L(H_\lambda)$. Тогда отображение

$$* : L(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H}), \quad T \mapsto T^* = \lim_{\to} T^*_\lambda$$

будет инволюцией, заданной на $L(\mathcal{H})$. Если $\|\cdot\|_\lambda$ — операторная норма, заданная на $L(H_\lambda)$, то функция

$$p_\lambda(T) := \|T_\lambda\|_\lambda, \quad T \in L(\mathcal{H}),$$

будет C^*-полунормой на $L(\mathcal{H})$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ и $L(\mathcal{H})$ — это локальная C^*-алгебра относительно топологии, задаваемой разделяющим семейством полунорм $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Пусть A — локальная C^*-алгебра относительно топологии, задаваемой разделяющим семейством полунорм $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. *Предгильбертовым A-модулем* называется комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, являющееся также правым A-модулем, снабженное A-значным внутренним произведением, т. е. отображением $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}\times\mathcal{M} \to A$ со свойствами

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \langle x, y\rangle\alpha + \langle x, z\rangle\beta \ \text{ для любых } \ x, y, z \in \mathcal{M}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$
$$\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a \ \text{ для любых } \ x, y \in \mathcal{M}; \quad a \in A;$$
$$\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle \text{ для любых } x, y \in \mathcal{M};$$
$$\langle x, x\rangle \geq 0 \ \text{ для любого } \ x \in \mathcal{M};$$
$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ для любого } \ x \in \mathcal{M}.$$

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ — *гильбертов* A-модуль, если $\mathcal{M}$ является полным топологическим векторным пространством относительно топологии, задаваемой разделяющим, направленным семейством полунорм

$$\overline{p}_\lambda(x) := \sqrt{p_\lambda(\langle x, x\rangle)}, \quad x \in \mathcal{M}, \ \lambda \in \Lambda.$$

Заметим, что локальная C^*-алгебра A является частным случаем гильбертова A-модуля. Здесь $\mathcal{M} = A$, а внутреннее произведение имеет вид

$$\langle x, y\rangle := x^* y, \quad x, y \in A.$$

Пусть A — локальная C^*-алгебра и $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы A-модули над A. Для элемента $x \in \mathcal{M}$ положим $|x| := \langle x, x\rangle^{1/2}$. В случае, когда A совпадает с $\mathcal{M}$, получаем традиционное определение модуля $|x| = (x^*x)^{1/2}$. Линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *A-линейным*, если для любых $x \in \mathcal{M}$, $a \in A$ справедливо равенство $T(xa) = T(x)a$. Множество всех непрерывных A-линейных операторов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ обозначается $L_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ или просто $L(\mathcal{M},\mathcal{N})$, если ясно, о какой алгебре A идет речь. Говорят, что линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *допускает сопряженный*, если существует линейный оператор $S : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ такой, что $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ для любых элементов $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{N}$. При этом S называется *сопряженным* оператором к T и обозначается T^*. Векторное пространство всех линейных операторов $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, допускающих сопряженный, обозначается через $\mathcal{L}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Известно ([10], теорема 2.2.6), что каждый линейный оператор, допускающий сопряжение, является A-линейным и $\mathcal{L}_A(\mathcal{M}) := \mathcal{L}_A(\mathcal{M},\mathcal{M})$ является локальной C^*-алгеброй. Для $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ положим

$$\theta_{x,y}(z) := x\langle y, z\rangle, \quad z \in \mathcal{M}.$$

Ясно, что для любых $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ отображение $\theta_{x,y}$ является A-линейным оператором из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Известно ([10], с. 38), что $\theta^*_{x,y} = \theta_{y,x}$ и для любых $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ справедливо включение $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Линейное подпространство в $\mathcal{L}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$, порожденное элементами $\theta_{x,y}$, $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$, обозначается $\Theta_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ или просто $\Theta(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Замыкание $\Theta_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ в

$\mathcal{L}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ или просто через $\mathcal{K}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Элементы $\mathcal{K}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ называются *модульно компактными* операторами из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Известно ([10], замечание 2.3.3), что $\mathcal{K}(\mathcal{M}) := \mathcal{K}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ является локальной C^*-алгеброй и двусторонним $*$-идеалом в $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Теория гильбертовых A-модулей тесно связана с многими разделами современной математики ([10]). Операторы, действующие в A-модулях, изучались в работах [11]–[14].

2. Основной результат

Установим основной результат статьи — критерий равенства $|x+y| = |x| + |y|$, где x и y — элементы гильбертова A-модуля над локальной C^*-алгеброй.

Предварительно потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Пусть H и K — гильбертовы пространства. Напомним, что линейный непрерывный оператор $T : H \to K$ называется *частичной изометрией*, если он изометричен на замкнутом подпространстве $\ker(T)^\perp$, где $\ker(T) := \{v \in H : Tv = 0\}$ и $\ker(T)^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства $\ker(T)$. Отметим также, что операторы T^*T и TT^* являются ортогональными проекторами на пространства $\ker(T)^\perp$ и $\mathrm{Im}(T) := \{Tv : v \in H\}$ соответственно.

Лемма 2.1 ([6], теорема 2.3)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $T, S \in L(H)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

a) $|T+S| = |T| + |S|$;

b) *существует частичная изометрия $U \in L(H)$ такая, что $T = U|T|$ и $S = U|S|$.*

Отметим также, что вышеприведенные представления: $T = U|T|$ и $S = U|S|$ для операторов T и S соответственно, называются *полярными* разложениями операторов T и S. При этом имеют место равенства ([8], теорема 2.3.4)

$$U^*U|T| = |T|;\ U^*U|S| = |S|.$$

Пусть Λ — направленное вверх множество, $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство гильбертовых пространств и $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ — локальное гильбертово пространство. Оператор $T \in L(\mathcal{H})$ называется *частичной изометрией*, если для любого $\lambda \in \Lambda$ частичными изометриями являются операторы $T_\lambda : H_\lambda \to H_\lambda$. Ниже покажем, что результаты леммы 2.1 остаются справедливыми и для непрерывных операторов в локальных гильбертовых пространствах.

Лемма 2.2. *Пусть Λ — направленное вверх множество, $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство гильбертовых пространств и $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ — локальное гильбертово пространство, $T, S \in L(\mathcal{H})$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

a) $|T+S| = |T| + |S|$;

b) *существует частичная изометрия $U \in L(\mathcal{H})$ такая, что $T = U|T|$ и $S = U|S|$.*

Доказательство. a)$\Rightarrow$b). Возьмем произвольный оператор $R \in L(\mathcal{H})$. По определению

$$|R| = (R^*R)^{1/2};\quad |R|_\lambda = (R_\lambda^* R_\lambda)^{1/2} = |R_\lambda| \in L(H_\lambda),\quad \lambda \in \Lambda.$$

Пусть для операторов $T, S \in L(\mathcal{H})$ выполняется равенство треугольника. Тогда

$$|(T+S)_\lambda| = |T+S|_\lambda = |T|_\lambda + |S|_\lambda = |T_\lambda| + |S_\lambda|.$$

Согласно лемме 2.1 для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется частичная изометрия $U_\lambda \in L(H_\lambda)$ такая, что $T_\lambda = U_\lambda|T_\lambda|$ и $S_\lambda = U_\lambda|S_\lambda|$. Положим

$$U := \lim_{\to} U_\lambda,\ U_\lambda \in L(H_\lambda).$$

Получаем, что оператор $U \in L(\mathcal{H})$ является искомой частичной изометрией.

b) $\Rightarrow$ a). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$T_\lambda = U_\lambda |T|_\lambda = U_\lambda |T_\lambda|, \quad S_\lambda = U_\lambda |S|_\lambda = U_\lambda |S_\lambda|.$$

Снова применяя лемму 2.1, имеем

$$|T+S|_\lambda = |T_\lambda + S_\lambda| = |T_\lambda| + |S_\lambda| = |T|_\lambda + |S|_\lambda,\ \lambda \in \Lambda.$$

Таким образом, получили $|T+S| = |T| + |S|$. □

Заметим также, что в условиях леммы 2.2 для частичной изометрии $U : L(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H})$ имеет место полезный факт

$$U_\lambda^* U_\lambda |T_\lambda| = |T_\lambda|,\ U_\lambda^* U_\lambda |S_\lambda| = |S_\lambda|,\ \lambda \in \Lambda \Rightarrow U^* U |T| = |T|, \quad U^* U |S| = |S|.$$

Для локальных C^*-алгебр справедлив аналог хорошо известной для C^*-алгебр ГНС-конструкции. Напомним, что линейное отображение $\varphi : A \to B$ локальных C^*-алгебр A и B называется *$*$-гомоморфизмом*, если для любых $a, b \in A$ выполняются равенства

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),\ \varphi(a^*) = \varphi(a)^*.$$

Представлением локальной C^*-алгебры A называется пара $(\mathcal{H}, \varphi)$, где $\mathcal{H}$ — локальное гильбертово пространство и $\varphi : A \to L(\mathcal{H})$ — непрерывный $*$-гомоморфизм. Представление называется *точным*, если φ инъективен. Полезно также отметить следующее свойство произвольного $*$-гомоморфизма $\varphi : A \to B$

$$|\varphi(a)| = \varphi(|a|), \quad a \in A.$$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$|\varphi(a)|^2 = \varphi(a)^* \varphi(a) = \varphi(a^* a) = \varphi(|a|^2) = (\varphi(|a|))^2.$$

Отсюда, используя единственность квадратного корня положительного элемента локальной C^*-алгебры ([9], предложение 10.13), выводим требуемое.

Лемма 2.3 ([15], теорема 5.1)**.** *Каждая локальная C^*-алгебра допускает точное представление.*

Сейчас готовы доказать необходимые и достаточные условия равенства треугольника для элементов локальной C^*-алгебры.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — локальная C^*-алгебра и $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $|a+b| = |a| + |b|$,

(2) $a^* b = |a||b|$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $|a+b| = |a| + |b|$. Согласно лемме 2.3 найдется локальное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и инъективный непрерывный $*$-гомоморфизм $\varphi : A \to L(\mathcal{H})$. Тогда $\varphi(a), \varphi(b) \in L(\mathcal{H})$ и имеют место равенства

$$|\varphi(a) + \varphi(b)| = |\varphi(a+b)| = \varphi(|a+b|) = \varphi(|a| + |b|) = \varphi(|a|) + \varphi(|b|).$$

Применяя лемму 2.2, найдем частичную изометрию $U \in L(\mathcal{H})$ такую, что

$$\varphi(a) = U|\varphi(a)|, \quad \varphi(b) = U|\varphi(b)|, \quad U^* U |\varphi(a)| = |\varphi(a)|, \quad U^* U |\varphi(b)| = |\varphi(b)|.$$

Далее имеем

$$\varphi(a^* b) = \varphi(a)^* \varphi(b) = (U|\varphi(a)|)^* U |\varphi(b)| = |\varphi(a)| U^* U |\varphi(b)| = |\varphi(a)||\varphi(b)| = \varphi(|a|)\varphi(|b|) = \varphi(|a||b|).$$

В силу инъективности непрерывного $*$-гомоморфизма выводим, что $a^* b = |a||b|$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $a^*b = |a||b|$. Тогда $b^*a = (a^*b)^* = |b||a|$ и справедливы следующие равенства:

$$|a+b|^2 = (a+b)^*(a+b) = a^*a + a^*b + b^*a + b^*b = |a|^2 + |a|b| + |b||a| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2.$$

Отсюда в силу единственности квадратного корня положительного элемента локальной C^*-алгебры ([15], предложение 2.1) выводим $|a+b| = |a| + |b|$. □

Ключевым инструментом для доказательства основного результата является следующая конструкция. Пусть A — локальная C^*-алгебра и $\mathcal{M}$ — гильбертов A-модуль. Прямая сумма $A \oplus \mathcal{M}$ также является гильбертовым A-модулем, где действие A на $A \oplus \mathcal{M}$ и A-значное внутреннее произведение на $A \oplus \mathcal{M}$ задаются формулами

$$(a,x)b = (ab, xb), \quad \big\langle (a,x),(b,y) \big\rangle = a^*b + \langle x,y\rangle \in A, \quad a,b \in A, \quad x,y \in \mathcal{M}.$$

Пусть $a \in A$, $x, y \in \mathcal{M}$ и $T \in \mathcal{K}_A(\mathcal{M})$. Рассмотрим отображение $L_{a,x,y,T} : A \oplus \mathcal{M} \to A \oplus \mathcal{M}$, заданное правилом

$$L_{a,x,y,T}(b,z) = (ab + \langle x,z\rangle, yb + Tz).$$

Данные отображения допускают следующее описание.

Лемма 2.5 ([16]). *Пусть $a \in A$, $x, y \in \mathcal{M}$ и $T \in \mathcal{K}_A(\mathcal{M})$. Тогда $L_{a,x,y,T} \in \mathcal{L}(A \oplus \mathcal{M})$ и $L^*_{a,x,y,T} = L_{a^*,y,x,T^*}$. Более того, локальная C^*-алгебра, порожденная элементами*

$$\{L_{a,x,y,T} : a \in A, \quad x,y \in \mathcal{M}, \quad T \in \mathcal{K}_A(\mathcal{M})\},$$

совпадает с $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$.

Операторы $L_{a,x,y,T}$ удобно представлять в матричном виде

$$L_{a,x,y,T} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & T \end{pmatrix}, \quad L^*_{a,x,y,T} = \begin{pmatrix} a^* & y \\ x & T^* \end{pmatrix}.$$

Основным результатом статьи является

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов A-модуль, $x, y \in \mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $|x+y| = |x| + |y|$,

(2) $\langle x,y\rangle = |x||y|$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Имеют место равенства

$$\langle x,y\rangle = |x||y| \Rightarrow \langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle^* = (|x||y|)^* = |y||x|,$$

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = |x|^2 + |x||y| + |y||x| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2.$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Отображение $a \mapsto G_a$, где

$$G_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

является инъективным $*$-гомоморфизмом локальных C^*-алгебр A и $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$. В силу равенства $|x+y| = |x| + |y|$ выводим $G_{|x+y|} = G_{|x|} + G_{|y|}$. Далее можем написать

$$\begin{pmatrix} |x+y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Отметим, что $G_{|x|}$ является положительным элементом алгебры $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$ для любого $x \in \mathcal{M}$. Кроме того, для любых $a \in A$, $x \in \mathcal{M}$ имеем

$$G^2_{|x|}(a) = |x|(|x|a) = \langle x,x\rangle a = \langle x, xa\rangle = l_x(r_x(a)) = r_x^* r_x(a),$$

где через $r(x)$ и $l(x)$ обозначаются матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Операторы $r(x)$ и $l(x)$ действуют на элементы модуля $A \oplus \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xb \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, z \rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \ b \in A, \, x, z \in \mathcal{M}.$$

Ясно, что $l_x^* = r(x)$ для любого $x \in \mathcal{M}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Заметим, что условие (1) можно переписать в форме

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x+y & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Так как матрицы $r(|x+y|)$, $r(|x|)$ и $r(|y|)$ являются элементами локальной C^*-алгебры $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$, то к ним применима лемма 2.4. Отсюда выводим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right| \, \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство эквивалентно тождеству матричных операторов

$$\begin{pmatrix} \langle x, y \rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x||y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $G_{\langle x,y \rangle} = G_{|x||y|}$. Принимая во внимание инъективность отображения $a \mapsto G_a$, окончательно получаем $\langle x, y \rangle = |x||y|$. □

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания.

Литература

[1] Bakherad M., Moslehian M.S. *Reversees and variations of Heinz inequality*, Linear and Multilinear Algebra **63** (10), 1972–1980 (2015).

[2] Dadkhah A., Moslehian M.S. *Gruss type inequalities for positive linear maps in C^*-algebras*, Linear and Multilinear Algebra **65** (7), 1386–1401 (2017).

[3] Li X., Wu W. *Operator's Jensen inequality on C^*-algebras*, Acta Math. Sinica **30** (1), 35–50 (2014).

[4] Hart R. *The triangle inequality in C^*-algebras*, Filomat **20**, 51–53 (2006).

[5] Thompson R.C. *Convex and concave functions of singular values of matrix sums*, Pacific J. Math. **82**, 279–280 (1979).

[6] Ando T., Hayashi A. *A characterization of the operator-valued triangle equality*, J. Operator Theory **58** (2), 463–468 (2007).

[7] Arambasic L., Rajic R. *On the C^*-valued triangle equality and inequality in Hilbert C^*-modules*, Acta Math. Hungar **119** (4), 373–380 (2008).

[8] Мерфи Д. *C^*-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).

[9] Fragoulopoulou M. *Topological algebras with involution* (Elsevier, 2005).

[10] Joiţa M. *Hilbert modules over locally C^*-algebras* (Univ. Bucharest Press, 2006).

[11] Малиев И.Н., Плиев М.А. *О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^*-алгебрами*, Изв. вузов. Матем., № 12, 51–58 (2012).
[12] Плиев М.А., Цопанов И.Д. *О представлении типа Стайнспринга для n-наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^*-модулях*, Изв. вузов. Матем., № 11, 42–49 (2014).
[13] Masaev H. M., Pliev M. A., Elsaev Y. V. *Radon–Nikodym type theorem for a covariant completely positive maps on Hilbert C^*-modules*, Int. J. Math. Anal. **9** (5), 1723–1731 (2015).
[14] Moslehian M. S., Kusraev A., Pliev M. *Matrix KSGNS construction and a Radon–Nikodym type theorem*, Indag. Math. **28** (5), 938–952 (2017).
[15] Inoue A. *Locally C^*-algebras*, Mem. Faculty Sci. Kyushu Univ. Ser. A **25**, 197–235 (1971).
[16] Joiţa M. *On the linking algebra of Hilbert modules and Morita equivalence of locally C^*-algebras*, Survey Math. and Appl.**1**, 23–32 (2006).

Алла Викторовна Калиниченко

Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), ул. Николаева, д. 44, г. Владикавказ, 362021, Россия,

e-mail: kalinichenkoalla@mail.ru

Марат Амурханович Плиев

Южный Математический институт ВНЦ РАН, ул. Маркуса, д. 22, г. Владикавказ, 362027, Россия,

e-mail: plimarat@yandex.ru

A. V. Kalinichenko and M.A. Pliev

The triangle equality in Hilbert A-modules

Abstract. We show that for any two elements x, y of Hilbert A-module M over local C^*-algebra A the generalized triangle equality $|x+y| = |x| + |y|$ holds if and only if $\langle x, y\rangle = |x||y|$.

Keywords: local C^*-algebra, Hilbert A-module, local Hilbert space, module compact operator, $*$-homomorphism, triangle equality.

Alla Viktorovna Kalinichenko

North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), 44 Nikolaeva str., Vladikavkaz, 362021 Russia,

e-mail: kalinichenkoalla@mail.ru

Marat Amurhanovich Pliev

Southern Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, 22 Markusa str., Vladikavkaz, 362027 Russia,

e-mail: plimarat@yandex.ru