

УДК 532.546

## ЗАДАЧА $\mathbb{R}$ -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СОФОКУСНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

Ю.В. Обносов

### Аннотация

В статье получено замкнутое аналитическое решение задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения для софокусного эллиптического кольца. Решение найдено в классе кусочно-голоморфных функций, принимающих заданное конечное значение на бесконечности.

**Ключевые слова:** гетерогенная среда, задача  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения, голоморфные функции.

Изучение плоских гетерогенных сред сводится к задаче построения плоскопараллельного стационарного поля  $\mathbf{v}(x, y) = (v_x, v_y)$ , являющегося потенциальным и соленоидальным в каждой изотропной фазе рассматриваемой среды. На границе контакта  $\mathcal{L}$  разнородных фаз предполагаются равными нормальные (касательные) составляющие предельных значений вектора  $\mathbf{v}$  ( $\rho\mathbf{v}$ ). Коэффициент  $\rho$ , характеризующий физические свойства среды, в каждом изотропном компоненте среды принимает постоянное значение.

В монографии [1, с. 53] показано, что при перечисленных выше условиях функция  $v(z) = v_x(x, y) - i v_y(x, y)$  кусочно-голоморфна в каждом однородном компоненте, а на границе  $\mathcal{L}$  удовлетворяет краевому условию однородной задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения. Явное аналитическое решение последней задачи удается получить лишь для довольно узкого класса гетерогенных структур, например для двухфазных сред, когда  $\mathcal{L}$  – кривая второго порядка [2–5], в частности эллипс [6–9].

Настоящая статья является непосредственным продолжением работ [10, 11], где были исследованы трехкомпонентные круговые области. Здесь будет рассмотрена трехфазная среда, граница раздела разнородных компонентов которой состоит из двух софокусных эллипсов.

### 1. Постановка задачи

Пусть для определенности координатные оси плоскости  $z$  совпадают с осями симметрии эллипсов  $\mathcal{L}_j = \{z = x + iy : x^2/a_j^2 + y^2/b_j^2 = 1\}$ ,  $j = 1, 2$ , где  $a_j, b_j$  – заданные положительные параметры. Не уменьшая общности, можно считать, что  $a_j \geq b_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ , и  $a_1 > a_2$ ,  $b_1 > b_2$ . Фокусы эллипсов  $\mathcal{L}_j$  совпадают и находятся в точках  $\pm c$ , то есть

$$c = \sqrt{a_j^2 - b_j^2}, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

На рис. 1 внутренняя по отношению к  $\mathcal{L}_2$  область обозначена через  $S_3$ , область между  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  – через  $S_2$  (эллиптическое кольцо), а внешняя по отношению

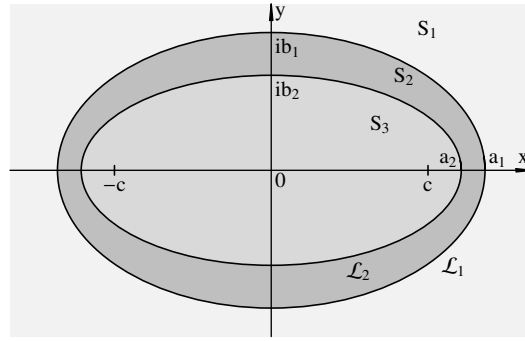


Рис. 1. Эллиптическое софокусное кольцо

к  $\mathcal{L}_1$  – через  $S_1$ . Требуется построить кусочно-голоморфную функцию  $v(z) = v_p(z) \in \mathcal{H}(S_p) \cap C(\overline{S_p})$ ,  $z \in S_p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , по краевым условиям

$$\begin{aligned} v_2(z) &= A_1 v_1(t) - B_1 [t'(s)]^{-2} \overline{v_1(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_1, \\ v_3(z) &= A_2 v_2(t) - B_2 [t'(s)]^{-2} \overline{v_2(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t'(s)$  – производная функции точки контура  $\mathcal{L}_j$  по натуральному параметру, заданные вещественные коэффициенты  $A_j, B_j$ , определяются по формулам:

$$A_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_2}, \quad B_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2}, \quad A_2 = \frac{\rho_3 + \rho_2}{2\rho_3}, \quad B_2 = \frac{\rho_3 - \rho_2}{2\rho_3}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho_j$  ( $k_j = 1/\rho_j$ ) – сопротивление (проводимость) компонента  $S_j$ . Дополнительно задается значение  $v_1$  на бесконечности:

$$v_1(\infty) = V_0 = V_x - iV_y. \quad (4)$$

Изучение начнем в предположении, что коэффициенты  $A_j, B_j$  – произвольные отличные от нуля ограниченные вещественные константы, удовлетворяющие условию эллиптичности задачи (2):  $|A_j| > |B_j| > 0$ ,  $j = 1, 2$ . При таких ограничениях из рассмотрения временно исключаются случаи вырождения трехфазной среды в двухфазную ( $\rho_2 \neq \rho_1$ ,  $\rho_2 \neq \rho_3$ ) и случаи обращения сопротивлений ее фаз в нуль и бесконечность.

## 2. Решение невырожденной задачи о софокусном эллиптическом кольце

Для поставленной задачи справедлива теорема единственности, доказанная в [12]. С помощью теоремы единственности несложно показать, что любое решение задачи (2), (4) можно представить в виде суммы

$$v(z) = V_x v_R(z) - V_y v_I(z), \quad (5)$$

где  $v_R, v_I$  – те частные решения краевой задачи (2), для которых выполняются условия:

$$v_R(\infty) = 1, \quad v_I(\infty) = i; \quad (6)$$

$$\overline{v_R(\bar{z})} \equiv \overline{v_R(-\bar{z})} \equiv v_R(z), \quad \overline{v_I(\bar{z})} \equiv \overline{v_I(-\bar{z})} \equiv -v_I(z). \quad (7)$$

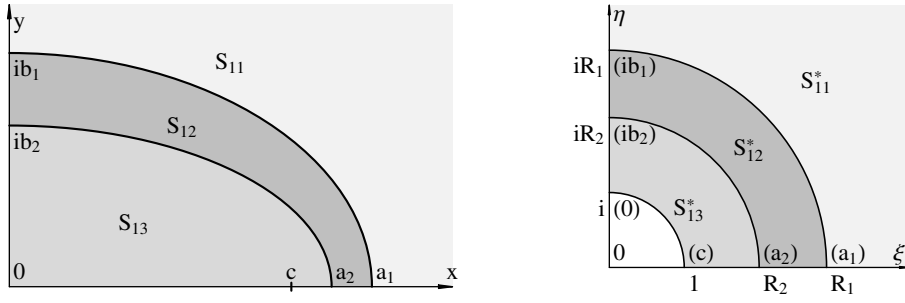


Рис. 2. Первый квадрант плоскости  $z$  (слева) и его образ (справа) в плоскости  $\zeta$  при отображении с помощью функции (8)

Построим решение  $v_R(z)$  задачи (2), удовлетворяющее соответствующим условиям (6), (7).

Будем считать, что  $a_k \neq b_k$  ( $c \neq 0$ ). Ограничиваясь первым квадрантом плоскости  $z = x + iy$ , рассмотрим его конформное отображение на плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  с помощью той ветви функции

$$\zeta(z) = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2 - c^2}), \quad (8)$$

обратной к

$$z(\zeta) = \frac{c}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad (9)$$

которая зафиксирована условием  $\zeta(\infty) = \infty$ . Функция (8) отобразит лежащие в первом квадранте четверти  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$  областей  $S_1, S_2, S_3$  (см. рис. 2) на области  $S_{13}^* = \{\zeta : 1 < |\zeta| < R_2, 0 < \arg \zeta < \pi/2\}$ ,  $S_{12}^* = \{\zeta : R_2 < |\zeta| < R_1, 0 < \arg \zeta < \pi/2\}$ ,  $S_{11}^* = \{\zeta : |\zeta| > R_1, 0 < \arg \zeta < \pi/2\}$  соответственно. При этом

$$R_j = \zeta(a_j) = \frac{a_j + b_j}{c} = \frac{c}{a_j - b_j} = \sqrt{\frac{a_j + b_j}{a_j - b_j}}, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

где  $R_1 > R_2 > 1$ . Образы остальных точек, отмеченных в плоскости  $z$ , обозначены на правом рис. 2 соответствующими символами в круглых скобках.

Найдем зависимость производной функции точки  $t$  контура  $\mathcal{L}_j$  по натуральному параметру  $s$ , отсчитываемому, например, от точки  $a_j$ , в виде функции от  $t$ . Для этого запишем уравнение соответствующего эллипса в параметрической форме

$$t = a_j \cos \varphi + i b_j \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

тогда

$$\frac{dt}{ds} = \frac{-a_j \sin \varphi + i b_j \cos \varphi}{\sqrt{a_j^2 \sin^2 \varphi + b_j^2 \cos^2 \varphi}}.$$

С учетом (1) легко получить, что

$$e^{i\varphi} = \frac{t + \sqrt{t^2 - c^2}}{a_j + b_j}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{t - \sqrt{t^2 - c^2}}{a_j - b_j},$$

$$\cos \varphi = \frac{a_j t - b_j \sqrt{t^2 - c^2}}{c^2}, \quad \sin \varphi = \frac{a_j \sqrt{t^2 - c^2} - b_j t}{i c^2}.$$

На основании последних представлений искомая производная может быть записана в виде

$$t'(s) = c \left( a_j^2 + b_j^2 - 2a_j b_j t (t^2 - c^2)^{-1/2} \right)^{-1/2}.$$

Здесь под внутренним радикалом в правой части следует понимать значение на  $\mathcal{L}_j$  той ветви функции  $(z^2 - c^2)^{1/2}$ , фиксированной в области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-c, c]$ , которая принимает положительные значения при  $z = x > c$ . Под внешним радикалом понимается ветвь, фиксированная в плоскости  $\mathbb{C}$  с разрезами по лучам  $(-\infty, -(a_j^2 + b_j^2)/c]$ ,  $[(a_j^2 + b_j^2)/c, \infty)$  и отрезку  $[-c, c]$ , обращающаяся в мнимую единицу при  $t = a_j$ . С помощью последнего соотношения, (8), (10) для  $t \in \mathcal{L}_j$  получим:

$$[t'(s)]^{-2} = \frac{R_j^{-2}\tau^2 - R_j^2}{\tau^2 - 1} = -\frac{\overline{\tau - 1/\tau}}{\tau - 1/\tau}, \quad |\tau| = R_j. \quad (11)$$

Введем новую кусочно-голоморфную функцию

$$V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta)v_R[z(\zeta)] = V_p(\zeta), \quad \zeta \in S_{1p}^*, \quad p = 1, 2, 3. \quad (12)$$

На основании (2), (6)–(12) придем к краевой задаче

$$V_2(\tau) = A_1 V_1(\tau) + B_1 \overline{V_1(\tau)}, \quad |\tau| = R_1, \quad 0 \leq \arg \tau \leq \pi/2; \quad (13)$$

$$V_3(\tau) = A_2 V_2(\tau) + B_2 \overline{V_2(\tau)}, \quad |\tau| = R_2, \quad 0 \leq \arg \tau \leq \pi/2;$$

$$\operatorname{Re} V_3(\tau) = 0, \quad |\tau| = 1, \quad 0 \leq \arg \tau \leq \pi/2; \quad (14)$$

$$\operatorname{Im} V(\xi) = 0, \quad \xi > 1; \quad \operatorname{Re} V(i\eta) = 0, \quad \eta > 1. \quad (15)$$

Функцию (12) в силу (15) с помощью принципа симметрии Римана–Шварца можно продолжить на полную внешность единичного круга. Легко видеть, что продолженная функция  $V(\zeta)$  будет удовлетворять краевым условиям (13), (14) для  $0 \leq \arg \tau \leq 2\pi$ . Решение последней задачи не только должно быть голоморфным в соответствующих областях  $S_3^* = \{\zeta : 1 < |\zeta| < R_2\}$ ,  $S_2^* = \{\zeta : R_2 < |\zeta| < R_1\}$ ,  $S_1^* = \{\zeta : |\zeta| > R_1\}$  и непрерывным в их замыкании (в  $\overline{S_1^*}$  всюду, за исключением бесконечно удаленной точки), но и удовлетворять по построению условиям

$$\overline{V(\overline{\zeta})} \equiv -V(-\zeta) \equiv V(\zeta), \quad (16)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [V_1(\zeta)/\zeta] = 1. \quad (17)$$

Из теоремы Лорана и соотношений (14)–(17) следует, что для кусочно-голоморфной нечетной функции  $V(\zeta) = V_p(\zeta)$ ,  $\zeta \in S_p^*$  ( $p = 1, 2, 3$ ), справедливы разложения

$$V_1(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^{1-2n} = \zeta + V_{01}(\zeta), \quad |\zeta| > R_1, \quad (18)$$

$$V_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \zeta^{2n-1} + \beta_{-n} \zeta^{1-2n}) = V_2^+(\zeta) + V_2^-(\zeta), \quad R_2 < |\zeta| < R_1, \quad (19)$$

$$V_3(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (\zeta^{2n-1} - \zeta^{1-2n}) = V_3^+(\zeta) + V_3^-(\zeta), \quad 1 < |\zeta| < R_2, \quad (20)$$

где  $\alpha_n$ ,  $\beta_{\pm n}$ ,  $\gamma_n$  – вещественные коэффициенты, пока неопределенные. Функции  $V_3^+(V_2^+)$ ,  $V_3^-(V_2^-)$  голоморфны соответственно внутри круга радиуса  $R_2(R_1)$  и вне

единичного круга (вне круга радиуса  $R_2$ ). Кроме того, функции  $V_3^+, V_3^-$  связаны друг с другом тождеством

$$V_3^+(\zeta) \equiv -V_3^-(1/\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n \zeta^{2n-1}. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} V_3^+(\zeta) - A_2 V_2^+(\zeta) - B_2 \overline{V_2^-(R_2^2/\bar{\zeta})}, & |\zeta| \leq R_2, \\ A_2 V_2^-(\zeta) - V_3^-(\zeta) + B_2 \overline{V_2^+(R_2^2/\bar{\zeta})}, & |\zeta| \geq R_2, \end{cases} \quad (22)$$

С помощью второго условия (13) устанавливается равенство предельных значений функции (22):  $\Phi^+(\tau) = \Phi^-(\tau)$  для  $\tau \in \mathcal{L}_2^* = \{\tau : |\tau| = R_2\}$ , то есть функция  $\Phi(\zeta)$  голоморфна в расширенной плоскости  $\mathbb{C}$  и исчезает в нуле и на бесконечности.

Аналогично, функция

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} V_2^+(\zeta) - B_1 \overline{V_1^-(R_1^2/\bar{\zeta})}, & |\zeta| \leq R_1, \\ A_1 V_1(\zeta) - V_2^-(\zeta), & |\zeta| \geq R_1, \end{cases} \quad (23)$$

не претерпевает скачка при переходе через линию  $\mathcal{L}_1^* = \{\tau : |\tau| = R_1\}$  ввиду первого соотношения (13), ее голоморфность нарушается лишь в точках  $\zeta = \infty$  и  $\zeta = 0$ , где у  $\Psi(\zeta)$  простые полюса. В силу (18)–(20), (22), (23) и обобщенной теоремы Лиувилля

$$\Phi(\zeta) \equiv 0; \quad \Psi(\zeta) = A_1 \zeta - B_1 R_1^2 / \zeta. \quad (24)$$

Из (22)–(24) в силу вещественности коэффициентов в представлениях (18)–(20) следует, что

$$\begin{cases} V_3^+(\zeta) - A_2 V_2^+(\zeta) - B_2 \overline{V_2^-(R_2^2/\bar{\zeta})} = 0, & |\zeta| \leq R_2, \\ A_2 V_2^-(\zeta) - V_3^-(\zeta) + B_2 \overline{V_2^+(R_2^2/\bar{\zeta})} = 0, & |\zeta| \geq R_2, \\ V_2^+(\zeta) - B_1 \overline{V_1^-(R_1^2/\bar{\zeta})} = A_1 \zeta, & |\zeta| \leq R_1, \\ A_1 V_1(\zeta) - V_2^-(\zeta) = -B_1 R_1^2 / \zeta, & |\zeta| \geq R_1. \end{cases} \quad (25)$$

Исключим  $V_3^\pm(\zeta)$  из первых двух уравнений системы (25). Для этого заменим во втором из них  $\zeta$  на  $1/\zeta$  и с учетом (21) получим

$$V_2^+(\zeta) + \Delta_2 V_2^+(R_2^2/\zeta) + V_2^-(1/\zeta) + \Delta_2 V_2^-(R_2^2/\zeta) = 0, \quad |\zeta| \leq 1/R_2. \quad (26)$$

Аналогично, из третьего и четвертого уравнений системы (25) исключим  $V_{01}(\zeta)$ , заменив предварительно в последнем из этих двух уравнений  $\zeta$  на  $R_1^2/\zeta$ , получим

$$V_2^+(\zeta) - \Delta_1 V_2^-(R_1^2/\zeta) = A_1(1 - \Delta_1^2)\zeta, \quad |\zeta| \leq R_1. \quad (27)$$

Подставив ряды (18)–(20) в левые части соотношений (26), (27) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях  $\zeta$ , придем к системам уравнений:

$$\begin{cases} R_1^2 \beta_1 - \Delta_1 \beta_{-1} = R_1^2 A_1 (1 - \Delta_1^2), \\ (1 + \Delta_2 R_2^2) \beta_1 + (1 + \Delta_2 R_2^{-2}) \beta_{-1} = 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \beta_n - \Delta_1 R_1^{2-4n} \beta_{-n} = 0, \\ (1 + \Delta_2 R_2^{4n-2}) \beta_n + (1 + \Delta_2 R_2^{2-4n}) \beta_{-n} = 0, \end{cases} \quad n \geq 2. \quad (29)$$

Решение системы (28) единственно и определяется по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{A_1(1 - \Delta_1^2)(1 + \Delta_2 R_2^{-2})}{1 + \Delta_2 R_2^{-2} + \Delta_1 R_1^{-2}(1 + \Delta_2 R_2^2)}, \\ \beta_{-1} &= \frac{-A_1(1 - \Delta_1^2)(1 + \Delta_2 R_2^2)}{1 + \Delta_2 R_2^{-2} + \Delta_1 R_1^{-2}(1 + \Delta_2 R_2^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Однородные системы (29) имеют лишь тривиальные решения  $\beta_n = \beta_{-n} = 0$ ,  $n \geq 2$ , так как дискриминанты  $D_n$  этих систем отличны от нуля. Действительно,

$$D_n = 1 + \Delta_1 R_1^{2-4n} + \Delta_2 R_2^{2-4n} + \Delta_1 \Delta_2 R_1^{2-4n} R_2^{4n-2}.$$

Положим  $R_1^{2-4n} = x$ ,  $R_2^{2-4n} = y$ . Стандартным образом доказывается, что абсолютный минимум функции  $1 + \Delta_1 x + \Delta_2 y + \Delta_1 \Delta_2 x/y$  достигается при  $x = -\Delta_2^2/\Delta_1$ ,  $y = -\Delta_2$ , то есть для дискриминантов систем (29) справедлива оценка  $D_n \geq 1 - \Delta_2^2 > 0$ .

Таким образом, функция (19) полностью определена, а функции (18), (20) легко находятся с помощью соответствующих соотношений (25):

$$V(\zeta) = \begin{cases} \zeta + (A_1^{-1} \beta_{-1} - \Delta_1 R_1^2)/\zeta, & \zeta \in S_1^*, \\ \beta_1 \zeta + \beta_{-1}/\zeta, & \zeta \in S_2^*, \\ (A_2 \beta_1 + B_2 R_2^{-2} \beta_{-1})(\zeta - 1/\zeta), & \zeta \in S_3^*. \end{cases} \quad (31)$$

Возвращаясь теперь в плоскость комплексного переменного  $z$ , на основании (31), (12), (8) получим

$$v_R(z) = \begin{cases} 1 - 0.5(1 + A_1^{-1} \beta_{-1} - \Delta_1 R_1^2)(1 - z/\sqrt{z^2 - c^2}), & z \in S_1, \\ \beta_1 - 0.5(\beta_1 + \beta_{-1})(1 - z/\sqrt{z^2 - c^2}), & z \in S_2, \\ A_2 \beta_1 + B_2 R_2^{-2} \beta_{-1}, & z \in S_3. \end{cases} \quad (32)$$

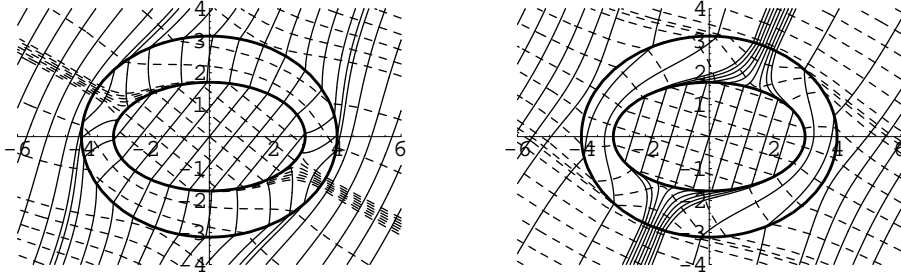
Напомним, что под радикалом  $\sqrt{z^2 - c^2}$  понимается та его ветвь, фиксированная в плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  с разрезом по отрезку  $[-c, c]$ , которая положительна при  $z = x > c$ .

Чтобы найти решение  $v_I(z)$  задачи (2), удовлетворяющее соответствующим условиям (6), (7), положим

$$V(\zeta) = -i(\zeta - 1/\zeta)v_I[z(\zeta)] = V_p(\zeta), \quad \zeta \in S_{1p}^*, \quad p = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Относительно функции (33) придем к той же самой задаче (13)–(17) с той лишь разницей, что в условиях (13) знак плюс перед  $B_{1,2}$  изменится на минус. Соответственно, искомое решение  $v_I(z)$  получим, домножив на  $i$  правые части формул (32) и изменив в них и в (30) знаки перед  $B_{1,2}$  и  $\Delta_{1,2}$  на противоположные, то есть

$$v_I(z) = \begin{cases} i[1 - 0.5(1 + A_1^{-1} \tilde{\beta}_{-1} + \Delta_1 R_1^2)](1 - z/\sqrt{z^2 - c^2}), & z \in S_1, \\ i[\tilde{\beta}_1 - 0.5(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_{-1})](1 - z/\sqrt{z^2 - c^2}), & z \in S_2, \\ i(A_2 \tilde{\beta}_1 - B_2 R_2^{-2} \tilde{\beta}_{-1}), & z \in S_3, \end{cases} \quad (34)$$


 Рис. 3. Слева  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 5$ ,  $\rho_3 = 0.2$ , справа  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 0.2$ ,  $\rho_3 = 5$ 

где

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= \frac{A_1(1 - \Delta_1^2)(1 - \Delta_2 R_2^{-2})}{1 - \Delta_2 R_2^{-2} - \Delta_1 R_1^{-2}(1 - \Delta_2 R_2^2)}, \\ \tilde{\beta}_{-1} &= \frac{-A_1(1 - \Delta_1^2)(1 - \Delta_2 R_2^2)}{1 - \Delta_2 R_2^{-2} - \Delta_1 R_1^{-2}(1 - \Delta_2 R_2^2)}.\end{aligned}\quad (35)$$

Заметим, что решение (34) легко можно было получить на основании решения (32), так как из очевидных физических соображений должно быть

$$v_I(z; a, b) \equiv i v_R(i z; b, a).$$

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Задача (2), (4) с вещественными коэффициентами  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $j = 1, 2$ , безусловно разрешима, если  $|A_j| > |B_j|$ ,  $j = 1, 2$ . Ее единственное решение имеет вид*

$$v(z) = \begin{cases} V_0 - \left[ \frac{V_0 - \Delta_1 R_1^2 \bar{V}_0}{2} + \frac{\beta_{-1} V_x - i \tilde{\beta}_{-1} V_y}{2A_1} \right] \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right), & z \in S_1, \\ \beta_1 V_x - i \tilde{\beta}_1 V_y - \left[ \frac{\beta_1 + \beta_{-1}}{2} V_x - i \frac{\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_{-1}}{2} V_y \right] \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right), & z \in S_2, \\ A_2(\beta_1 V_x - i \tilde{\beta}_1 V_y) + B_2 R_2^{-2}(\beta_{-1} V_x + i \tilde{\beta}_{-1} V_y), & z \in S_3, \end{cases}\quad (36)$$

где под радикалом понимается ветвь, фиксированная в  $z$ -плоскости с разрезом по отрезку  $(-c, c)$  и принимающая положительные значения при  $z = x > c$ , коэффициенты  $\beta_1$ ,  $\beta_{-1}$ ,  $\tilde{\beta}_1$ ,  $\tilde{\beta}_{-1}$  в общем случае определяются соотношениями (30), (35); если же имеют место представления (3), то

$$\begin{aligned}\beta_{\pm 1} &= \frac{\pm(1 - \Delta_1)(1 + \Delta_2 R_2^{\mp 2})}{1 + \Delta_2 R_2^{-2} + \Delta_1 R_1^{-2}(1 + \Delta_2 R_2^2)}, \\ \tilde{\beta}_{\pm 1} &= \frac{\pm(1 - \Delta_1)(1 - \Delta_2 R_2^{\mp 2})}{1 - \Delta_2 R_2^{-2} - \Delta_1 R_1^{-2}(1 - \Delta_2 R_2^2)}.\end{aligned}\quad (37)$$

**Пример.** Пусть  $a_1 = 4$ ,  $b_1 = 3.14484$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_2 = 1.7$ . На рис. 3 приведены два варианта расчета поля по формулам (36), (37) в случае  $V_0 = 1 - 2i$ .

### 3. Пределные случаи

**Замечание 1.** В предельной ситуации, когда  $\rho_3 \rightarrow \rho_2$  (или  $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ ), формулы (36), (37) приводят к известному решению задачи об одном эллиптическом включении

$$v(z) = \begin{cases} V_0 + \frac{\Delta(R^4 - 1)}{2} \left[ \frac{V_x}{R^2 + \Delta} + i \frac{V_y}{R^2 - \Delta} \right] \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right), & z \in S_1, \\ A(1 - \Delta^2)R^2 \left[ \frac{V_x}{R^2 + \Delta} - i \frac{V_y}{R^2 - \Delta} \right], & z \in S_2, \end{cases}$$

где  $S_1$  – внешняя среда, а  $S_2$  – эллиптическое включение,  $\Delta = \Delta_1$ ,  $R = R_1$ .

**Замечание 2.** При  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  и, следовательно,  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \tilde{\beta}_1 = -\beta_{-1} = -\tilde{\beta}_{-1} = 1$ , из формул (36), (37), как этого и следовало ожидать, вытекает, что  $v_1(z) = v_2(z) = v_3(z) \equiv V_0$ .

**Замечание 3.** Рассмотрим предельный случай, когда  $a_1, a_2 \rightarrow \infty$  при фиксированных  $b_1, b_2$ , и, следовательно, наша структура вырождается в слоистую структуру, а именно:  $S_1 = \{z : |\operatorname{Im} z| > b_1\}$ ,  $S_2 = \{z : b_1 < |\operatorname{Im} z| < b_2\}$ ,  $S_3 = \{z : |\operatorname{Im} z| < b_2\}$ . В силу (11), (30), (35) в пределе получим  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $\beta_1 = -\beta_{-1} = A_1(1 - \Delta_1)$ ,  $\tilde{\beta}_1 = -\tilde{\beta}_{-1} = A_1(1 + \Delta_1)$ , и решение (36) приводится к виду

$$\begin{aligned} v_1(z) &\equiv V_0, & v_2(z) &\equiv (A_1 - B_1)V_x - i(A_1 + B_1)V_y, \\ v_3(z) &\equiv (A_1 - B_1)(A_2 - B_2)V_x - i(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)V_y. \end{aligned}$$

Отсюда в том частном случае, когда справедливо представление (3), приходим к хорошо известному результату [13] для слоистой среды с заданной в  $S_1$  скоростью на бесконечности:

$$v(z) = \begin{cases} V_x - iV_y, & z \in S_1, \\ \theta_1 V_x - iV_y, & z \in S_2, \\ \theta_2 \theta_1 V_x - iV_y, & z \in S_3, \end{cases}$$

где  $\theta_2 = \rho_2/\rho_3$ ,  $\theta_1 = \rho_1/\rho_2$ .

**Замечание 4.** Если  $a_k \rightarrow b_k = r_k$ ,  $k = 1, 2$ , то есть софокусное эллиптическое кольцо вырождается в концентрическое круговое, из (1), (11) следует, что  $c \rightarrow 0$ ,  $R_k \rightarrow \infty$ ,  $R_2/R_1 = (a_2 + b_2)/(a_1 + b_1) \rightarrow r_2/r_1$ , а значит, формулы (36) теряют смысл. Однако, положив  $b_k = r_k$  и используя правило Лопиталья, несложно показать, что

$$\lim_{a_k \rightarrow r_k} \left[ R_k^2 \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right) \right] = \frac{2r_k}{z} \lim_{a_k \rightarrow r_k} \left[ \frac{\sqrt{z^2 + r_k^2 - a_k^2} - z}{a_k - r_k} \right] = -\frac{2r_k^2}{z^2}.$$

Введя обозначения

$$\Delta_1 \Delta_2 = \delta, \quad r_1 = R, \quad r_2 = r, \quad (r/R)^2 = g, \quad (38)$$

для предельных значений параметров (30), (35) получим представления  $\beta_1 = \tilde{\beta}_1 = A_1(1 - \Delta_1^2)/(1 + \delta g)$ ,

$$\lim_{a_k \rightarrow r_k} R_2^{-2} \beta_{-1} = - \lim_{a_k \rightarrow r_k} R_2^{-2} \tilde{\beta}_{-1} = -A_1(1 - \Delta_1^2) \Delta_2 / (1 + \delta g).$$



С учетом полученных равенств и обозначений (38) формулы (36) в пределе дают:

$$v(z) = \begin{cases} V_0 - \overline{V_0} \frac{\Delta_1 + g\Delta_2}{1 + \delta g} \frac{R^2}{z^2}, & |z| > R, \\ \frac{A_1(1 - \Delta_1^2)}{1 + \delta g} \left( V_0 - \Delta_2 \overline{V_0} \frac{r^2}{z^2} \right), & r < |z| < R, \\ \frac{A_1 A_2 (1 - \Delta_1^2)(1 - \Delta_2^2)}{1 + \delta g} V_0, & |z| < r. \end{cases} \quad (39)$$

В частном случае, когда для коэффициентов  $A_{1,2}$ ,  $B_{1,2}$  имеет место представление (3), решение (39) приводится к виду

$$v(z) = \begin{cases} V_0 - \overline{V_0} \frac{\Delta_1 + g\Delta_2}{1 + \delta g} \frac{R^2}{z^2}, & |z| > R, \\ \frac{(1 - \Delta_1)}{1 + \delta g} \left( V_0 - \Delta_2 \overline{V_0} \frac{r^2}{z^2} \right), & r < |z| < R, \\ \frac{(1 - \Delta_1)(1 - \Delta_2)}{1 + \delta g} V_0, & |z| < r. \end{cases} \quad (40)$$

Предельным переходом в соотношениях (40) при  $\rho_3 \rightarrow \rho_2$  и, следовательно,  $A_{32} \rightarrow 1$ ,  $\Delta_{32} \rightarrow 0$  получим решение об одном круговом включении радиуса  $R$ :

$$v_1(z) = V_0 - \overline{V_0} \Delta_1 \frac{R^2}{z^2}, \quad v_2(z) = (1 - \Delta_1) V_0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-97008-р\_поволжье\_a).

### Summary

*Yu. V. Obnosov.*  $\mathbb{R}$ -linear Conjugation Problem for a Confocal Elliptical Annulus.

Analytical closed-form solution is presented for  $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem for a confocal elliptical annulus. Solution is found in the class of piece-wise holomorphic functions with fixed finite value at infinity.

**Key words:** heterogeneous media,  $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem, holomorphic functions.

### Литература

1. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. – Киев: Наук. думка, 1987. – 254 с.
2. *Голубева О.В., Шпилевой А.Я.* О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 2. – С. 174–179.
3. *Обносов Ю.В.* Решение задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения в случае гиперболической линии разделения разнородных фаз // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 53–62.
4. *Obnosov Yu.V.* A generalized Milne-Thomson theorem for the case of parabolic inclusion // Appl. Math. Model. – 2009. – No 33. – P. 1970–1981.
5. *Obnosov Yu.V., Nikonenkova T.V.* Solution of an  $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface // Lithuanian Math. J. – 2008. – V. 48, No 3. – P. 322–331.

6. *Пилатовский В.П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. – М.: Недра, 1966. – 315 с.
7. *Gheorghijă St.I.* Metode matematice in hidrogasodinamica subterană. – București: Acad. RSR, 1966. (In Romanian.)
8. *Ungureanu E.* Sur le mouvement des fluides dans les milieux poreux non homogènes // С. г. Acad. sci. – 1969. – V. A268, No 3. – P. 181–183.
9. *Obdam A.N.V., Veiling E.J.M.* Elliptical inhomogeneities in groundwater flow – an analytical description // J. Hydrology. – 1987. – V. 95. – P. 87–96.
10. *Обносков Ю.В.* Решение задачи о распределении фильтрационных полей в бесконечном пористом массиве с двумя круговыми включениями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 109–123.
11. *Мальцева А.М., Обносков Ю.В., Рогозин С.В.* Обобщение теоремы Милн-Томсона на случай концентрического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 35–50.
12. *Михайлов Л.Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его приложение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Изд-во АН Тадж. ССР, 1963. – 183 с.
13. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

Поступила в редакцию  
24.11.08

---

**Обносков Юрий Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: [yobnosov@ksu.ru](mailto:yobnosov@ksu.ru)