Известия вузов. Математика
2013, №6, с. 3–12

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.А. АБАШКИН

ОБ ОДНОЙ ВЕСОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Аннотация. Для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца исследована краевая задача, вид граничных условий которой зависит от значения параметров уравнения. Методом разделения переменных с использованием разложения в ряд Фурье–Бесселя, а также с помощью преобразования Ханкеля доказано существование решения данной краевой задачи и найдены формулы, выражающие это решение. Доказана единственность решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, ряд Фурье–Бесселя, преобразование Ханкеля, функции Бесселя.

УДК: 517.956

1. Постановка задачи

Для уравнения

$$H^{\lambda}_{\mu,p}u = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{y}u_y + \lambda^2 u = 0, \quad p > 0, \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

исследуем краевую задачу в полуполосе $D = \{(x, y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < \infty\}$.

Задача. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию

$$H^{\lambda}_{\mu,p}u(x, y) \equiv 0, \quad u(a, y) = q_2(y), \quad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, 1), \tag{2}$$

и одной из следующих совокупностей условий:

1) при $\mu, p \geq 1/2$

$$u(x, y) \in C((0, a] \times (0, \infty)) \cap C^2(D), \tag{3}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p-1}u(x, y) = \varphi(x), \quad x \in (0, a], \quad p > 1/2, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+} \frac{u(x, y)}{\ln y} = \varphi(x), \quad x \in (0, a], \quad p = 1/2, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{2\mu-1}u(x, y) = q_1(y), \quad y \in (0, \infty), \quad \mu > 1/2, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{u(x, y)}{\ln x} = q_1(y), \quad y \in (0, \infty), \quad \mu = 1/2, \tag{7}$$

Поступила 28.03.2012

2) при $\mu \geq 1/2$, $p < 1/2$

$$u(x,y) \in C((0,a] \times [0,\infty)) \cap C^2(D), \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,a], \tag{9}$$

$$\lim_{x \to 0+} x^{2\mu-1} u(x,y) = q_1(y), \quad y \in [0,\infty), \quad \mu > 1/2, \tag{10}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{u(x,y)}{\ln x} = q_1(y), \quad y \in [0,\infty), \quad \mu = 1/2, \tag{11}$$

3) при $\mu < 1/2$, $p \geq 1/2$

$$u(x,y) \in C([0,a] \times (0,\infty)) \cap C^2(D), \tag{12}$$

$$\lim_{y \to 0+} y^{2p-1} u(x,y) = \varphi(x), \quad x \in [0,a], \quad p > 1/2, \tag{13}$$

$$\lim_{y \to 0+} \frac{u(x,y)}{\ln y} = \varphi(x), \quad x \in [0,a], \quad p = 1/2, \tag{14}$$

$$u(0,y) = q_1(y), \quad y \in (0,\infty), \tag{15}$$

4) при $\mu < 1/2$, $p < 1/2$

$$u(x,y) \in C([0,a] \times (0,\infty)) \cap C^2(D), \tag{16}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,a], \tag{17}$$

$$u(0,y) = q_1(y), \quad y \in (0,\infty), \tag{18}$$

где $\varphi(x)$, $q_1(y)$, $q_2(y)$ — известные функции достаточной степени гладкости, причем

$$q_1(0) = \varphi(0) \quad \text{при} \quad \mu, p < 1/2, \quad \lim_{y \to \infty} q_1(y) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 1/2,$$

$$\varphi(a) = q_2(0) \quad \text{при} \quad p < 1/2.$$

Отметим, что некоторые краевые задачи для уравнения (1) были рассмотрены в [1], краевая задача в первом квадранте для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x} u_x + \frac{2p}{y} u_y - \lambda^2 u = 0$ — в публикации [2], нелокальная краевая задача в полуполосе для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y - \lambda^2 u = 0$ — в статьях [3], [4]. Однозначная разрешимость задачи, подобной задаче (2), (16)–(18), но при $\lambda, \mu = 0$ в уравнении (1), была доказана в [5], а для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y - \lambda^2 y^m u = 0$, $m > 0$, — в [6].

2. Существование решения задачи

Теорема 1. *Пусть $a < r_1/\lambda$, где r_1 — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_{\mu-1/2}(z)$, тогда, если функции $x^{\mu_1}\varphi(x)$ и $y^{p_1}q_i(y)$, $i = 1,2$, где $\mu_1 = \mu - 1/2$, $p_1 = p - 1/2$, непрерывны, первая из них имеет ограниченную вариацию на интервале $(0,a)$, а вторые — на любом интервале $(0,R)$, и выполняются условия*

$$\int_0^{+\infty} |y^p q_i(y)| dy < \infty,$$

то решение задачи (2)–(18) существует.

Доказательство. Решение задачи с условиями (2)–(7) будем искать в виде

$$u(x,y) = V_1(x,y) + V_2(x,y),$$

где $V_1(x,y)$ и $V_2(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$H^{\lambda}_{\mu,p}V_1(x,y)\equiv 0,\quad V_1(a,y)=q_2(y),\quad \lim_{y\to\infty}V_1(x,y)=0,\quad x\in(0,1), \tag{19}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{2p-1}V_1(x,y)=0,\quad x\in(0,a],\quad p>1/2, \tag{20}$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{V_1(x,y)}{\ln y}=0,\quad x\in(0,a],\quad p=1/2, \tag{21}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^{2\mu-1}V_1(x,y)=q_1(y),\quad y\in(0,\infty),\quad \mu>1/2, \tag{22}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{V_1(x,y)}{\ln x}=q_1(y),\quad y\in(0,\infty),\quad \mu=1/2, \tag{23}$$

$$H^{\lambda}_{\mu,p}V_2(x,y)\equiv 0,\quad V_2(a,y)=0,\quad \lim_{y\to\infty}V_2(x,y)=0,\quad x\in(0,1), \tag{24}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{2p-1}V_2(x,y)=\varphi(x),\quad x\in(0,a],\quad p>1/2, \tag{25}$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{V_2(x,y)}{\ln y}=\varphi(x),\quad x\in(0,a],\quad p=1/2, \tag{26}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^{2\mu-1}V_2(x,y)=0,\quad y\in(0,\infty),\quad \mu>1/2, \tag{27}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{V_2(x,y)}{\ln x}=0,\quad y\in(0,\infty),\quad \mu=1/2. \tag{28}$$

Функцию $V_1(x,y)$ будем искать в виде

$$V_1(x,y)=\int_0^{\lambda}x^{-\mu_1}[b_1(\gamma)Y_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)+b_2(\gamma)J_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)]y^{-p_1}J_{p_1}(\gamma y)d\gamma+$$
$$+\int_{\lambda}^{+\infty}x^{-\mu_1}[b_1(\gamma)K_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)+b_2(\gamma)I_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)]y^{-p_1}J_{p_1}(\gamma y)d\gamma, \tag{29}$$

где $\xi(\gamma)=\sqrt{|\gamma^2-\lambda^2|}$, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода ([7], с. 132),

$$J_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\big(z/2\big)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)},\quad \nu\neq 0,-1,-2,\dots,\quad J_{-n}(z)=\lim_{\nu\to -n}J_\nu(z),\quad n\in N, \tag{30}$$

$Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода ([7], с. 134),

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)},\quad \nu\notin Z,\quad Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(z),\quad n\in Z, \tag{31}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя ([7], с. 139),

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(z/2\big)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$
$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi},\quad \nu\notin Z,\quad K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z),\quad n\in Z,$$

$b_1(\gamma)$, $b_2(\gamma)$ — функции, подлежащие определению.

Вид (29) получается, если искать решение уравнения (1) с разделенными переменными, удовлетворяющее условию (20) и третьему равенству условия (19), с последующим интегрированием этого решения по константе разделения.

Подставим (29) в условие (22), предполагая интеграл в равенстве (29) равномерно сходящимся, с учетом асимптотик функций Бесселя первого и второго родов ([7], с. 173)

$$J_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad Y_\nu(z) \approx -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi z^\nu}, \quad \nu > 0, \quad z \to 0, \tag{32}$$

а также модифицированных функций Бесселя ([7], с. 173)

$$K_\nu(z) \approx \frac{\Gamma(|\nu|)}{2^{1-|\nu|} z^{|\nu|}}, \quad \nu \neq 0, \quad I_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad z \to 0, \tag{33}$$

при $\mu > 1/2$ получим

$$\lim_{x\to 0+} x^{2\mu-1} V_1(x,y) = y^{-p_1}\Big[-\int_0^\lambda b_1(\gamma) \frac{2^{\mu_1}\Gamma(\mu_1)}{\pi \xi^{\mu_1}(\gamma)} J_{p_1}(\gamma y) d\gamma + \\ + \int_\lambda^{+\infty} b_1(\gamma) \frac{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}{\xi^{\mu_1}(\gamma)} J_{p_1}(\gamma y) d\gamma \Big] = q_1(y).$$

При условии

$$\lim_{\gamma\to\lambda-} [b_1(\gamma) Y_{\mu_1}(\xi(\gamma)x) + b_2(\gamma) J_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)] = \lim_{\gamma\to\lambda+} [b_1(\gamma) K_{\mu_1}(\xi(\gamma)x) + b_2(\gamma) I_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)] \tag{34}$$

для последнего равенства справедлива формула обращения для преобразования Ханкеля ([7], с. 166). После ее применения имеем

$$-b_1(\gamma)\frac{2^{\mu_1}\Gamma(\mu_1)}{\pi \xi^{\mu_1}(\gamma)} = \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_1(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau, \quad \gamma < \lambda,$$
$$b_1(\gamma)\frac{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}{\xi^{\mu_1}(\gamma)\gamma} = \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_1(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau, \quad \gamma > \lambda,$$

откуда

$$b_1(\gamma) = -\frac{\pi \xi^{\mu_1}(\gamma)}{2^{\mu_1}\Gamma(\mu_1)} \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_1(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau, \quad \gamma < \lambda, \tag{35}$$

$$b_1(\gamma) = \frac{\xi^{\mu_1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)} \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_1(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau, \quad \gamma > \lambda. \tag{36}$$

Таким же образом при помощи асимптотик

$$Y_0(z) \approx -\frac{2}{\pi} \ln\frac{2}{z}, \quad K_0(z) \approx \ln\frac{2}{x} \tag{37}$$

при $\mu = 1/2$ получим

$$b_1(\gamma) = \frac{\pi\gamma}{2} \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_1(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau, \quad \gamma < \lambda, \tag{38}$$

$$b_1(\gamma) = -\gamma \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_1(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau, \quad \gamma > \lambda. \tag{39}$$

Аналогично, используя второе равенство условия (19), находим

$$b_2(\gamma) = \left[a^{\mu_1}\gamma \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_2(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau - b_1(\gamma) Y_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)\right] \left[J_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)\right]^{-1}, \quad \gamma < \lambda, \tag{40}$$

$$b_2(\gamma) = \left[a^{\mu_1}\gamma \int_0^{+\infty} \tau^{p_1+1} q_2(\tau) J_{p_1}(\gamma\tau) d\tau - b_1(\gamma) K_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)\right] \left[I_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)\right]^{-1}, \quad \gamma > \lambda. \tag{41}$$

Отметим, что найденные функции $b_1(\gamma)$ и $b_2(\gamma)$ удовлетворяют условию (34).

Чтобы интеграл (29) являлся решением уравнения (1), достаточно равномерной сходимости интегралов от частных производных 1-го и 2-го порядков подинтегральной функции второго интеграла в формуле (29) на множествах $[\varepsilon_1, a-\delta]\times[\varepsilon_2,\infty)$, где ε_1, ε_2, δ — произвольно малые положительные постоянные.

Найдем интеграл от производной по x данной подинтегральной функции, используя формулу дифференцирования для модифицированной функции Бесселя ([7], с. 141)

$$(z^{-\nu}K_\nu(z))' = -z^{-\nu}K_{\nu+1}(z), \tag{42}$$

и разобьем его следующим образом: $I = x^{-\mu_1}y^{-p_1}(-I_1 + I_2 - I_3)$, где

$$I_1 = \int_\lambda^{+\infty} \frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)} K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)J_{p_1}(\gamma y)\int_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\,d\gamma,$$

$$I_2 = \int_\lambda^{+\infty} a^{\mu_1}\gamma\xi(\gamma)\int_0^{+\infty}\eta^{p_1+1}q_2(\eta)J_{p_1}(\gamma\eta)d\eta\frac{I_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)}{I_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)}J_{p_1}(\gamma y)d\gamma,$$

$$I_3 = \int_\lambda^{+\infty} \frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)} K_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)\frac{I_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)}{I_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)}J_{p_1}(\gamma y)\int_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\,d\gamma.$$

Функция $K_\nu(z)$ положительна и убывает при $z>0$, поэтому при $x>\varepsilon_1$ верно неравенство $K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)\varepsilon_1) > K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)$. Пусть $M = \sup\limits_{z>0}|J_{p_1}(z)|$, тогда

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)J_{p_1}(\gamma y)\int_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\,d\gamma\right| \le$$
$$\le \int_0^{+\infty} M\left|\frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}\int_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\right|K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)\varepsilon_1)d\gamma.$$

Интеграл, стоящий справа, сходится в силу асимптотики

$$K_\nu(z)\approx e^{-z}/\sqrt{z}, \quad z\to\infty, \tag{43}$$

и стремления к нулю функции $\left|\int\limits_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\right|$ при $\gamma\to\infty$. По признаку Вейерштрасса интеграл I_1 сходится равномерно. Интеграл I_2 сходится равномерно, так как выражение под интегралом состоит из интегрируемой функции $\gamma J_{p_1}(\gamma y)\int\limits_0^{+\infty}\eta^{p_1+1}q_2(\eta)J_{p_1}(\gamma\eta)d\eta$ и множителя, имеющего экспоненциальный характер убывания на бесконечности при $x\in[0,\delta]$, что следует из асимптотики ([7], с. 173)

$$I_\nu(z)\approx e^{z}/\sqrt{2\pi z}, \quad z\to\infty. \tag{44}$$

Равномерная сходимость интеграла I_3 и интегралов от второй производной по x и первой и второй производных по y доказывается аналогично.

Функцию $V_2(x,y)$ будем искать методом разделения переменных

$$V_2(x,y) = V(x)W(y).$$

В результате приходим к уравнениям

$$V'' + \frac{2\mu}{x}V' + \gamma^2 V = 0, \tag{45}$$

$$W'' + \frac{2p}{y}W' - (\gamma^2-\lambda^2)W = 0, \tag{46}$$

где γ^2 — константа разделения.

Уравнение (45) заменой $V(x) = x^{-\mu_1}F(\gamma x)$ сводится к уравнению Бесселя ([7], с. 132), общее решение которого можно записать в виде ([7], с. 135)

$$F(z) = C_1 J_{\mu_1}(z) + C_2 Y_{\mu_1}(z).$$

Тогда общим решением уравнения (45) будет функция

$$V(x) = C_1 x^{-\mu_1} J_{\mu_1}(\gamma x) + C_2 x^{-\mu_1} Y_{\mu_1}(\gamma x).$$

В силу условия (27) и асимптотик функций Бесселя первого и второго родов (32) необходимо положить $C_2 = 0$.

Чтобы функция $V_2(x, y)$ удовлетворяла условию (24), необходимо $J_{\mu_1}(\gamma a) = 0$. Если обозначить через r_n все положительные корни уравнения $J_{\mu_1}(x) = 0$, пронумерованные в порядке возрастания, то $\gamma a = r_n$ для некоторого номера n, откуда получаем $\gamma = \frac{r_n}{a}$. Тогда $V(x)$ принимает вид

$$V_n(x) = A_n x^{-\mu_1} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right).$$

Общим решением уравнения (4) при $p = p_1$ будет функция

$$W_n(y) = C_3 y^{-p_1} K_{p_1}(\xi_n y) + C_4 y^{-p_1} I_{p_1}(\xi_n y),$$

где $\xi_n = \sqrt{(r_n/a)^2 - \lambda^2}$.

Чтобы выполнялось условие (24), в силу асимптотики функций $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ из (43), (44) необходимо положить $C_4 = 0$. В результате можем составить ряд

$$V_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{-\mu_1} y^{-p_1} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) K_{p_1}(\xi_n y). \tag{47}$$

Подставив ряд (47) в условие (25), с учетом асимптотик функции $K_\nu(z)$ из (33), (37) получим

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1}\xi_n^{p_1}} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \quad p > 1/2,$$

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \qquad p = 1/2.$$

При выполнении условий теоремы 1 можем разложить $x^{\mu_1}\varphi(x)$ в ряд Фурье–Бесселя ([7], с. 165)

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \tag{48}$$

где ([7], с. 164)

$$c_n = \frac{2}{a^2 J^2_{\mu_1+1}(r_n)} \int_0^a \varphi(x) x^{\mu_1+1} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx. \tag{49}$$

Тогда имеют место равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1}\xi_n^{p_1}} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \quad p > 1/2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \qquad p = 1/2.$$

Из этих равенств получим

$$B_n = c_n \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1)2^{p_1-1}}, \quad p > 1/2, \tag{50}$$

$$B_n = -c_n, \qquad p = 1/2, \tag{51}$$

где c_n из (49).

Потребуем, чтобы формальное решение в виде ряда (47), коэффициенты которого определяются по формулам (50), (51), было решением уравнения (1). Для этого необходимо доказать равномерную сходимость (на множествах $[\varepsilon_1, a-\delta] \times [\varepsilon_2, \infty)$, где ε_1, ε_2, δ — произвольно малые положительные постоянные) ряда (47) и ряда, получающегося почленным его дифференцированием по x и по y.

Принимая во внимание, что $K_{p_1}(x)$ убывает при $x > 0$, имеем

$$\left| c_n \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1)2^{p_1-1}} x^{-\mu_1} y^{-p_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) K_{p_1}(\xi_n y) \right| \le |c_n| \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1)2^{p_1-1}} \varepsilon_1^{-\mu_1} \varepsilon_2^{-p_1} M K_{p_1}(\xi_n \varepsilon_2) = A_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится вследствие экспоненциального убывания $K_{p_1}(\xi_n \varepsilon_2)$ при $n \to \infty$ и стремления к нулю коэффициентов c_n. Таким образом, равномерная сходимость ряда (47) доказана.

Доказательство сходимости рядов, получающихся почленным дифференцированием ряда (47) по x и по y, проводится аналогично.

Чтобы решение, выражаемое формулой (47), удовлетворяло условию (27), достаточно равномерной сходимости ряда, получающегося умножением (47) на $x^{2\mu_1}$. Этот факт также доказывается аналогичным способом.

Чтобы для ряда (47) выполнялось условие (25), достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \tag{52}$$

где $c_n(y) = B_n y^{p_1} K_{p_1}(\xi_n y)$. Ряд (52), в котором y рассматриваем как параметр, является разложением функции $x^{\mu_1} y^{2p_1} u(x, y)$ по ортогональной системе $\{J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)\}$ с весом. Ряд, получающийся из (52) предельным переходом при $y \to 0$, сходится равномерно, если выполняются условия теоремы.

Изучим поведение коэффициентов $c_n(y)$ при изменении y. Для этого найдем производную по y от коэффициентов $c_n(y)$, используя формулу дифференцирования для модифицированной функции Бесселя ([7], с. 141)

$$(B_n y^{p_1} K_{p_1}(\xi_n y))' = B_n \xi_n y^{p_1} K_{p_1-1}(\xi_n y).$$

Выражение, стоящее справа, не имеет положительных корней, так как их не имеет функция $K_\nu(z)$. Принимая во внимание, что $K_\nu(z)$ убывает экспоненциально при $z \to \infty$, можно сделать вывод, что коэффициенты как функции от y монотонно убывают на всей положительной полуоси, стремясь к нулю. Поэтому из равномерной сходимости ряда (47) при $y \to 0$ следует равномерная сходимость ряда (52) при всех остальных значениях y, а из этого факта вытекает сходимость ряда (47).

Таким образом, существование решения задачи (2)–(6) доказано.

Ввиду второго из принципов соответствия для оператора $H^{\lambda}_{\mu,p}$ ([1], с. 164),

$$H^{\lambda}_{\mu,p}(y^{1-2p}u(x,y)) = H^{\lambda}_{\mu,1-p}(u(x,y)), \quad H^{\lambda}_{\mu,p}(x^{1-2\mu}u(x,y)) = H^{\lambda}_{1-\mu,p}(u(x,y)), \tag{53}$$

существует биекция между решениями краевой задачи с условиями (2)–(6) и краевой задачи с условиями

$$H^{\lambda}_{1-\mu,p}u(x,y) \equiv 0, \quad u(a,y) = a^{2\mu-1}q_2(y), \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1), \tag{54}$$

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = x^{2\mu-1}\varphi(x), \quad x \in [0,a], \tag{55}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{2\mu-1}u(x,y) = q_1(y), \quad y \in (0,\infty). \tag{56}$$

После переименований условия (54)–(56)обретают вид (2), (12)–(15).

Первый из принципов (53) приводит во взаимно однозначное соответствие решения краевой задачи с условиями (2)–(6) и решения краевой задачи с условиями

$$H^{\lambda}_{\mu,1-p}u(x,y) \equiv 0, \quad u(a,y) = y^{2p-1}q_2(y), \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{57}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-2p}u(x,y) = \varphi(x), \quad x \in [0,a], \tag{58}$$

$$\lim_{x\to 0+} u(x,y) = y^{2p-1}q_1(y), \quad y \in (0,\infty). \tag{59}$$

После соответствующих переименований задача (57)–(59) превращается в задачу с условиями (2), (8)–(11).

Аналогичным образом последовательное применение обоих принципов (53) приводит во взаимное соответствие решения задач с условиями (2)–(6) и с условиями (2), (16)–(18).

Чтобы получить формулы, явно выражающие решение краевой задачи с условиями (2), (8)–(11), необходимо заменить в формулах (29), (35), (36), (38), (39), (40), (41), (47), (49), (50) p_1 на $-p_1$, $q_i(y)$ на $y^{2p-1}q_i(y)$, $i = 1,2$, и умножить правые части равенств в формулах (29) и (47) на y^{-2p_1}.

Аналогично для получения формул, выражающих решение задачи (2), (12)–(15), нужно в формулах (29), (36), (41), (47), (49), (50), (51) заменить μ_1 на $-\mu_1$, $q_2(y)$ на $a^{2\mu-1}q_2(y)$, $\varphi(x)$ на $x^{2\mu-1}\varphi(x)$ и умножить правые части формул (29) и (47) на $x^{-2\mu_1}$.

3. Единственность решения

Теорема 2. *При $\lambda < \frac{r_1}{a}$ решение задачи с условиями (2)–(18) единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (2)–(7). Представим его в виде

$$u(x,y) = A(x,y)B(x,y).$$

Тогда

$$A_{xx} + A_{yy} + \left(\frac{2\mu}{x} + \frac{2B_x}{B}\right)A_x + \left(\frac{2p}{y} + \frac{2B_y}{B}\right)A_y + \frac{H^{\lambda}_{\mu,p}(B)}{B}A = 0.$$

Следуя методу, изложенному в [5], найдем $B(x,y) = O(y^{1-2p})$, $p > 1/2$, $B(x,y) = O(\ln y)$, $p = 1/2$ при $y \to 0$, $B(x,y) = O(x^{1-2\mu})$, $\mu > 1/2$, $B(x,y) = O(\ln x)$, $\mu = 1/2$, при $x \to 0$, $B(x,y) \to \infty$ при $y \to \infty$, $B(x,y) > 0$ и $H^{\lambda}_{\mu,p}(B(x,y)) < 0$ в D. Для этого рассмотрим функцию

$$\overline{B}(x,y) = x^{-p_1}y^{-\mu_1}[K_{p_1}(\sqrt{\sigma^2-\lambda^2}y) + I_{p_1}(\sqrt{\sigma^2-\lambda^2}y)][cY_{\mu_1}(\sigma x) + J_{\mu_1}(\sigma x)],$$

где $\sigma > \lambda$.

Функция $\overline{B}(x,y)$ является решением уравнения (1). Подберем постоянные σ и c так, чтобы выполнялось условие

$$\overline{B}(x,y) \geq \varepsilon > 0. \tag{60}$$

Пусть $\delta = r_1/\lambda - a$, положим $\frac{r_1\lambda}{r_1-\lambda\delta} > \sigma > \lambda$. При таком выборе σ функция $J_{\mu_1}(\sigma x)$ при $x \in [0,a]$ имеет нуль только в точке $x = 0$.

Далее, пусть e_1 — наименьший положительный нуль функции $Y_{\mu_1}(z)$. Тогда, если $a \leq e_1/\sigma$, то возьмем $c = -1$, в противнрм случае c — любое число из интервала $(-A,0)$,

$$A = -\min_{\frac{e_1}{\sigma}<x<a} J_{\mu_1}(x) / \max_{\frac{e_1}{\sigma}<x<a} Y_{\mu_1}(x).$$

Докажем, что при таком выборе постоянных функция $\overline{B}(x,y)$ удовлетворяет условию (60). Действительно, в силу того, что функции $K_{p_1}(z)$ и $I_{p_1}(z)$ положительны и не имеют нулей при $z > 0$ ([7], с. 163), а также учитывая асимптотики (33), (43) и (44), получаем оценку $\min\limits_{y>0}(y^{-p_1}[K_{p_1}(\sqrt{\sigma^2-\lambda^2}y) + I_{p_1}(\sqrt{\sigma^2-\lambda^2}y)]) > 0$. При $a \leq e_1/\sigma$ функции $-Y_{\mu_1}(\sigma x)$ и $J_{\mu_1}(\sigma x)$ положительны и не имеют нулей при $0 < x \leq a$, а при $a > e_1/\sigma$ функции $J_{\mu_1}(\sigma x)$ и $cY_{\mu_1}(\sigma x)$ на полуинтервале $(0,a]$ либо обе положительны, либо $J_{\mu_1}(\sigma x)$ положительна и $J_{\mu_1}(\sigma x) > |cY_{\mu_1}(\sigma x)|$. Поэтому вследствие асимптотик (32) справедлива оценка $\min\limits_{0<x\leq a} x^{-\mu_1}[cY_{\mu_1}(\sigma x) + J_{\mu_1}(\sigma x)] > 0$, откуда следует справедливость формулы (60), причем $\varepsilon = \min\limits_{(x,y)\in D} \overline{B}(x,y)$. В этом случае за искомую функцию можно взять $B(x,y) = \overline{B}(x,y) - \varepsilon/2$. Тогда $A(x,y) = O(1)$ при $x \to 0$ и $y \to 0$, $\lim\limits_{y\to\infty} A(x,y) = 0$. Поэтому к функции $A(x,y)$ применим принцип максимума для эллиптических уравнений. Из единственности функции $A(x,y)$ следует единственность функции $u(x,y)$.

Единственность решения задачи с условиями (2), (8)–(18) следует из принципов соответствия (53).

Литература

[1] Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. *Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами* (Изд-во СГЭУ, Самара, 2008).

[2] Лернер М.Е., Репин О.А. *О задаче Дирихле для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте*, Вестн. Самарск. технического ун-та **6**, 5–8 (1998).

[3] Лернер М.Е., Репин О.А. *Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца*, Дифференц. уравнения **37**, 1562–1564 (2001).

[4] Моисеев Е.И. *О разрешимости одной нелокальной краевой задачи*, Дифференц. уравнения **37**, 1565–1567 (2001).

[5] Шимкович Е.В. *О весовых краевых задачах для вырождающегося уравнения эллиптического типа в полуполосе*, Литовск. матем. сб. **30**, 185–196 (1990).

[6] Рузиев М.Х. *Задача Дирихле в вертикальной полуполосе для вырождающегося эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом и со спектральным параметром*, Материалы конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", Новосибирск, 268–269 (2007).

[7] Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения* (Лань, СПб., 2010).

А.А. Абашкин

аспирант, кафедра высшей математики,
Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Молодогвардейская, д. 194, г. Самара, 443001, Россия,

e-mail: samcocaa@rambler.ru

A.A. Abashkin

On a weighted boundary value problem in an infinite half-strip for a biaxisymmetric Helmholtz equation

Abstract. We study a boundary value problem for a generalized biaxisymmetric Helmholtz equation. Boundary conditions in this problem depend on equation parameters. By the variable separation method, using the Fourier–Bessel series expansion and the Hankel transform, we prove the unique solvability of the problem and establish explicit formulas for the solution.

Keywords: Helmholz equation, Fourier–Bessel series, Hankel transformation, Bessel functions.

A.A. Abashkin

Postgraduate, Chair of Higher Mathematics,
Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194 Molodogvardeiskaya str., Samara, 443001 Russia,

e-mail: samcocaa@rambler.ru