

УДК 532.5

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НАСЛЕДСТВЕННОЙ СИЛЫ И СИЛЫ
ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС, ДЕЙСТВУЮЩИХ
НА СФЕРИЧЕСКУЮ МИКРОЧАСТИЦУ
ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ, В СЛУЧАЕ
КОНЕЧНЫХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА**

А.Н. Нуриев¹, О.Н. Зайцева¹, А.И. Юнусова²

¹*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

²*Казанский национальный исследовательский технологический университет,
г. Казань, 420015, Россия*

Аннотация

В работе проведено исследование составляющих гидродинамической силы (квази-стационарной, наследственной сил и силы присоединенных масс) в нескольких случаях поступательного движения сферы при относительно малых числах Рейнольдса ($5 < Re < 300$). Рассмотрены стационарное движение, линейно ускоренное движение, равномерное движение сферы после скачкообразного ускорения. Расчет сил, действующих на сферу, проведен с помощью численного решения задачи обтекания. Движение жидкости при этом описывается полной нестационарной системой уравнений Навье – Стокса. Рассматриваются методы выделения различных составляющих гидродинамической силы, а также возможность описания их с помощью упрощенных моделей. Для наследственной силы представлены оценки вклада этой составляющей в суммарное сопротивление для случая скачкообразного изменения скорости движения. Показано, что характер затухания этой составляющей ключевым образом отличается для случаев однонаправленного и реверсивного движения. Для определения силы присоединенных масс предложен универсальный подход, позволяющий выделять эту составляющую для случая больших ускорений. Проведенный на его основе анализ линейно ускоренного движения подтверждает гипотезу о линейном характере силы присоединенных масс, действующей на сферу.

Ключевые слова: вязкая жидкость, поступательное движение сферы, квазистационарная сила, наследственная сила, сила присоединенных масс, численное моделирование

Введение

Современный интерес к проблеме определения гидродинамических сил, действующих на сферу, при движении в вязкой жидкости связан в первую очередь с изучением движения микрочастиц (а также капель и пузырьков) в жидкостиносителе. Исследования в этом направлении стали активно развиваться в последние десятилетия в связи с появлением многочисленных оптических методов измерения поля скорости жидкости, таких как LDV (laser Doppler velocimetry), PIV (particle image velocimetry), PTV (particle tracking velocimetry), и HPIV (holographic particle image velocimetry), в которых необходимо решать вопрос о согласованности движения частиц-маркеров с движением носителя (см., например, [1–5]). Микро-частицы, обладающие ненулевой массой и размером, могут менять свою скорость и направления движения в жидкости за счет нестационарного гидродинамического

сопротивления (при пассивном движении в потоке это может происходить в областях с большими градиентами скорости). Сопротивление можно использовать и для активного управления движением микротел. В работах [6–10] рассматривались различные механизмы использования составляющих гидродинамических сил для пропульсивного движения сферических тел в потоке. Во всех этих задачах для построения моделей движения необходимо исчерпывающее представление о гидродинамических силах, действующих на сферическое тело со стороны жидкости.

Современные модели гидродинамических сил (см., например, [4]), описывающие воздействие вязкой жидкости на сферу при нестационарном поступательном движении, основываются на выделении трех основных эффектов: квазистационарного сопротивления (F_{st}), сил присоединенных масс (F_a) и сил наследственного сопротивления (F_h):

$$F = F_{st} + F_a + F_h. \quad (1)$$

Квазистационарное сопротивление – это сила, действующая на сферу при установившемся стационарном движении. В трехкомпонентных аппроксимационных зависимостях обычно используется ее значение, вычисленное по мгновенной скорости движения (мгновенному числу Рейнольдса). Вторая составляющая трехкомпонентной аппроксимации – сила присоединенных масс F_a – является откликом на ускорение сферы в жидкости.

Третья составляющая нестационарной силы – наследственное сопротивление F_h – была описана впервые Бассе [11] для предельного случая малых чисел Рейнольдса как ограниченный по времени эффект, связанный с диффундированием завихренности, образованной в результате нестационарного движения, от сферы. При конечных числах Рейнольдса она, по всей видимости (см., например, [4]), включает более общие механизмы взаимодействия сферы с вихревым следом.

Основываясь на методах численного моделирования, в рамках настоящей работы мы проведем исследование гидродинамических сил, действующих на сферу, для трех случаев движения: стационарного движения, равномерного движения после скачкообразного ускорения и линейно ускоренного движения. Используя методы выделения различных составляющих силы, предложенные в работах [2, 12, 13], мы проведем покомпонентную оценку составляющих сопротивления для каждого моделируемого случая. Отдельное внимание уделим случаям реверсивного движения, когда скорость до и после ускорения изменяет свой знак (этот случай имеет прямое отношение к задачам активного управления).

1. Постановка задачи

Рассмотрим поступательное движение сферы радиуса R в жидкости со скоростью $\tilde{u}_M(t)$. Определение силы, действующей на сферу со стороны жидкости, будем осуществлять путем прямого численного моделирования ее обтекания.

Решение задачи обтекания будем производить в подвижной декартовой системе координат, связанной со сферой. Направление осей зададим таким образом, чтобы положительное направление вектора скорости $(\tilde{u}_M(t), 0, 0)$ совпадало с положительным направлением оси Ox . Нормируя пространственные координаты на радиус сферы R , скорость на характерное значение скорости движения сферы u_{max} , время на Ru_{max}^{-1} , запишем систему уравнений движения жидкости в следующем виде:

$$\begin{cases} \partial U / \partial t + U \cdot \nabla U = -\nabla p + (2/Re) \nabla^2 U, \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $U = (u, v, w)$ – безразмерная скорость, p – фиктивное давление, равное сумме истинного давления (\tilde{p}) и инерционной составляющей ($x\dot{u}_M$)

$$p = \tilde{p} + x\dot{u}_M, \quad (3)$$

$Re = 2Ru_{\max}/\nu$ – число Рейнольдса, $u_M(t) = \tilde{u}_M(t)/u_{\max}$ – скорость подвижной системы координат, ν – кинематическая вязкость жидкости.

На границе сферы в подвижной системе координат задаются условия прилипания

$$u = v = w = 0.$$

На бесконечности скорость изменяется по закону

$$u = -u_M, \quad v = w = 0.$$

Силы, действующие на сферу со стороны вязкой жидкости, будем определять по формуле

$$F = -\frac{2}{\pi} \left(\int_s pn \, ds - \int_s \bar{\sigma} \cdot n \, ds \right), \quad (4)$$

где $\bar{\sigma}$ – тензор вязких напряжений, S – поверхность сферы, n – внутренняя единичная нормаль к поверхности сферы. Заметим, что величина F при таком определении является безразмерной (размерный коэффициент для перехода к исходным переменным равен $u_{\max}^2 \pi R^2 \rho / 2$, где ρ – плотность жидкости). Отметим также, что вычисленная в подвижной системе координат сила определена по фиктивному давлению и поэтому содержит вклад от инерционной составляющей (см. уравнение (3)). Он может быть вычислен следующим образом:

$$F_{fk} = -\frac{2}{\pi} \int_s x\dot{u}_M n \, ds = \frac{8}{3} \dot{u}_M. \quad (5)$$

Эта составляющая известна также как сила Фруда–Крылова.

2. Численное решение гидродинамической задачи

Движение жидкости вокруг сферы моделируется в осесимметричной постановке. Для дискретизации расчетной области используются структурированные блочные сетки с линейным сгущением узлов около сферы (см. рис. 1). Основные параметры используемых расчетных сеток m_{ij} представлены в табл. 1, где N – количество ячеек сетки, V_{\min} – объем минимальной ячейки, расположенной около сферы, N_{sp} – число ячеек на границе сферы вдоль рассматриваемого сечения, L_x , L_y – расстояния от центра сферы до внешних границ расчетной области по осям Ox , Oy соответственно. Сетки с разным индексом i построены в расчетных областях разного размера, при этом имеют полностью идентичную структуру в окрестности сферы при одинаковых значениях индекса j . Наборы сеток с одинаковым индексом i получены путем последовательного пропорционального уменьшения размера ячеек во всей области.

Численное решение системы уравнений Навье–Стокса проводится по схеме, предложенной в работе [14] и успешно апробированной на базе целой серии задач о колебательном движении тел различной формы [10, 15, 16]. Согласно [14], дискретизация системы уравнений движения жидкости выполняется по методу конечных объемов (FVM) в декартовой системе координат. Дискретные значения составляющих скорости и дискретные давления локализируются в центрах ячеек расчетных

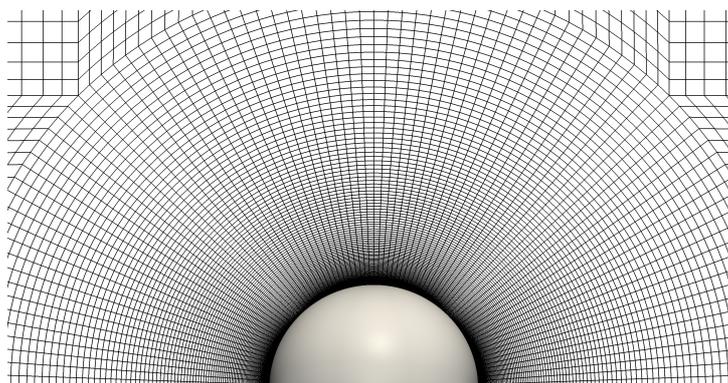


Рис. 1. Структура расчетной сетки в окрестности сферы в плоскости xOy

Табл. 1

Параметры расчетных сеток

Сетка	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{21}	m_{22}	m_{23}
L_x, L_y	25, 20	25, 20	25, 20	50, 40	50, 40	50, 40
N	13076	29421	66197	19372	43689	99031
V_{min}	2e-7	5.9e-8	1.7e-8	2e-7	5.9e-8	1.7e-8
N_{sp}	86	129	195	86	129	195

сеток. Для вычисления объемных интегралов по контрольному объему используется общая процедура Гаусса. Для аппроксимации градиента давления в расчетах применяется линейная интерполяция. Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых используется нелинейная NVD (normalised variable diagram) схема “Gamma”, предложенная в работе [17]. В диффузионных слагаемых при дискретизации оператора Лапласа нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки аппроксимируются с помощью симметричной схемы второго порядка с поправкой на неортогональность [18].

Решение нелинейной дискретизованной системы проводится по методу PISO [19]. Для решения системы уравнений для давления в методе PISO используется метод сопряженных градиентов (PCG) с геометрико-алгебраическим многосеточным предобуславливателем (GAMG). Для сглаживания используется метод Гаусса–Зейделя с одной пререлаксацией и двумя пост релаксациями, для агломерации ячеек сетки используется алгоритм faceAreaPair [20]. Для решения системы уравнений для скорости используется метод бисопряженных градиентов (PBICG) с предиктором на основе DILU-факторизации.

3. Установившееся движение с постоянной скоростью

В первой задаче проведем определение гидродинамических сил, действующих на сферу при установившемся движении в вязкой жидкости с постоянной скоростью $u_0 = 1$. Рассмотрим диапазон $5 \leq Re \leq 300$. Из всех составляющих, входящих в трехкомпонентную аппроксимацию (1), ненулевой в установившемся режиме обтекания является только стационарная составляющая силы. Результаты ее измерения хорошо известны из литературы, поэтому найденные в ходе расчетов значения можно использовать для проверки разрешающих способностей расчетных сеток и влияния внешних границ расчетной области.

Данные, представленные в табл. 3., получены при решении задачи в осесимметричной постановке. Осесимметричная модель обтекания справедлива для стационарного

Табл. 2

Значения F_{st} при разных числах Рейнольдса

Re	Результаты настоящего исследования, полученные на сетках						Результаты, полученные в работах		
	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	[12]	[21]	[22]
5	7.23	7.23	7.23	7.168	7.168	7.168	7.34	7.029	7.21
10	4.38	4.38	4.38	4.32	4.32	4.32	4.42	4.288	4.424
20	2.72	2.72	2.72	2.73	2.73	2.73		2.711	2.73
30	2.11	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12		2.110	
40	1.79	1.80	1.80	1.79	1.81	1.81	1.832	1.86	1.808

Re	Результаты настоящего исследования, полученные на сетках			Результаты, полученные в работах		
	m_{11}	m_{12}	m_{13}	[24]	[21]	[23]
50	1.5836	1.5838	1.5838	1.5743		~ 1.57
100	1.0926	1.0931	1.0932	1.0870	1.096	~ 1.09
150	0.8904	0.8901	0.89	0.8892		~ 0.89
200	0.7746	0.7738	0.7732	0.7756	0.772	~ 0.77
300	0.6493	0.646	0.645	0.6527	0.632	~ 0.63

нарного движения вплоть до $Re \sim 210$ [23]. Вычисленные в рамках этой модели силы, впрочем, хорошо согласуются с экспериментальными оценками [24] и результатами трехмерного численного моделирования [23] для $Re = 300$.

Как показывает сравнение результатов, полученных на сетках m_{1j} , m_{2j} , влияние размера области более выражено для малых чисел Рейнольдса. Для больших чисел Рейнольдса заметно влияние разрешающей способности сетки в окрестности сферы. Тем не менее при всех рассматриваемых значениях числа Рейнольдса наблюдается сеточная сходимость (см. данные, полученные на сетках с фиксированным индексом i). Хорошая точность полученных результатов косвенно подтверждается и малыми различиями найденных значений F_{st} от данных других численных и экспериментальных исследований.

4. Равномерное движение после мгновенного ускорения

Во второй задаче рассмотрим изменение силы, происходящее сразу после скачкообразного увеличения скорости с u_0 до $u_1 > u_0$. Эта задача была поставлена в [3, 4] для определения наследственных сил. В данной постановке ускорение отлично от нуля только в одной точке на временной прямой ($t = t_1$)

$$\dot{u}_M = \Delta U \delta(t), \quad \Delta U = u_1 - u_0,$$

где происходит скачкообразное изменение скорости. Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Течение до скачка ($t < t_1$) при этом является установившимся. В последующие моменты времени $t > t_1$ в отсутствие ускорения, согласно аппроксимации (1), ненулевыми являются компоненты F_{st} и F_h . Поскольку значение F_{st} для заданного числа Рейнольдса известно из решения стационарной задачи (разд. 4) и постоянно для любого момента времени $t > t_1$, изменение полной силы F от времени определяется только составляющей F_h , что позволяет легко выделить ее влияние.

В первую очередь рассмотрим случай, когда переключение происходит между положительными скоростями $u_1 > u_0 \geq 0$. На рис. 2 представлено изменение полной силы F и наследственной составляющей F_h при $t - t_1 > 0$ для числа Рейнольдса

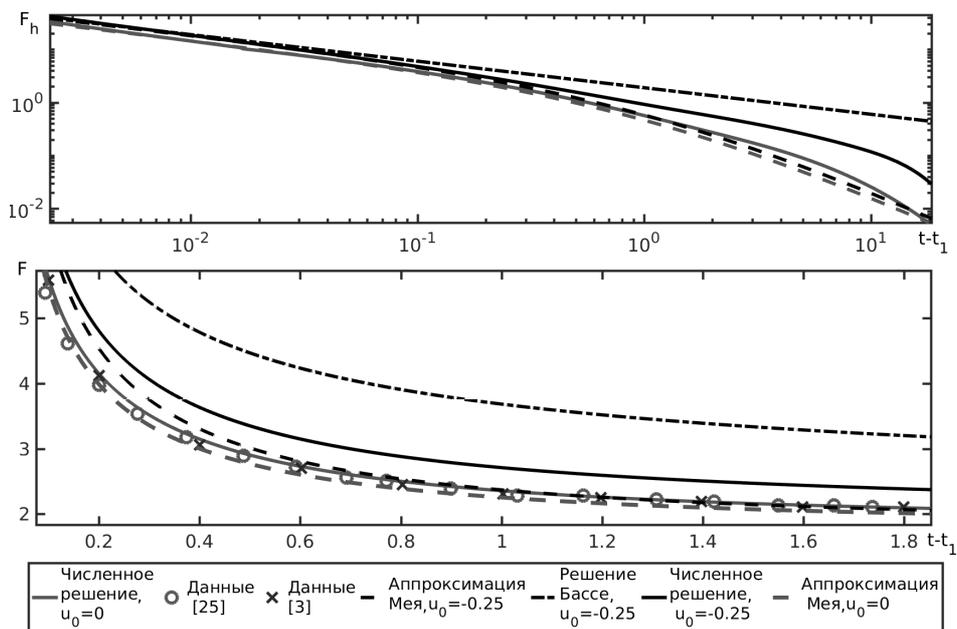


Рис. 2. Изменение сил сопротивления от времени после скачкообразного увеличения скорости для $Re = 40$

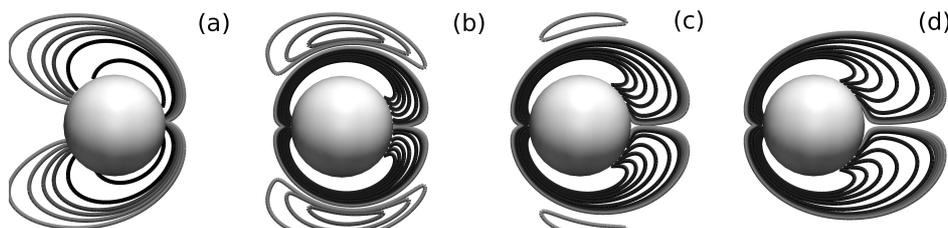


Рис. 3. Завихренность. Мгновенные картины течения в моменты времени: (a) $t - t_1 = 0$, (b) $t - t_1 = 0.6$, (c) $t - t_1 = 1.2$, (d) $t - t_1 = 1.8$. $Re = 40$, $u_0 = -0.25$, $u_1 = 1$

$Re = 40$. Результаты, полученные в настоящей работе для мгновенного старта ($u_0 = 0$), полностью согласуются с данными [25] и [3]. Сопоставим также результаты для данного случая с аппроксимационной зависимостью Мея [2], предложенной для описания наследственной составляющей. Как хорошо видно, для данного типа движения их согласование можно считать более чем удовлетворительным.

Другим обособленным случаем является реверсивное движение сферы, когда ее скорость до и после ускорения изменяет свой знак $u_0 < 0$, $u_1 > 0$. Ключевое отличие от случаев движения с положительной скоростью состоит здесь в изменениях, происходящих в структуре течения. В результате смены направления движения сфера сталкивается с течениями, сформировавшимися до скачка. Вихревая структура при этом полностью переформируется (см. рис. 3). Переход к стационарному течению замедляется. Это сказывается и на динамике наследственной составляющей. Как можно видеть на рис. 2, кривая зависимости $F_h(t)$ лежит для случая реверсивного движения между предельным решением Бассе [11] и аппроксимацией Мея [2] (заметим, что аппроксимация, приложенная в работе [2], не распространяется ее автором на случай реверсивного движения).

Табл. 3

Осредненные на интервале $(t_1, t_1 + \tau)$ значения силы F , действующей на сферу

Re	u_0	u_1	$\tau = 1$			$\tau = 10$		
			$\langle F \rangle$	$\langle F^m \rangle$	$\langle F^b \rangle$	$\langle F \rangle$	$\langle F^m \rangle$	$\langle F^b \rangle$
10	-0.8	1	12.5268	9.7397 (22.25)	14.9382 (19.25)	6.1704	5.0000 (18.97)	7.7382 (25.41)
10	0.8	1	5.0751	4.9244 (2.97)	5.5023 (8.42)	4.4323	4.4137 (0.42)	4.7180 (6.45)
40	-0.25	1	4.3278	4.0173 (7.17)	5.4234 (25.31)	2.3122	2.1040 (9.00)	2.9724 (28.55)
40	0	1	3.7025	3.5721 (3.52)	4.6969 (26.85)	2.0923	2.0414 (2.43)	2.7361 (30.77)
40	0.25	1	3.0597	3.1269 (2.20)	3.9705 (29.77)	1.9892	1.9789 (0.5206)	2.500 (25.67)
100	-0.25	1	2.6318	2.7626 (4.97)	3.3898 (28.80)	1.4522	1.3647 (6.03)	1.8396 (26.68)
100	0	1	2.2009	2.4286 (10.35)	2.9303 (33.15)	1.2860	1.3103 (1.89)	1.69 (31.43)
100	0.25	1	1.843	2.0946 (13.66)	2.4709 (34.07)	1.2305	1.2559 (2.0623)	1.5408 (25.22)

В заключение этого раздела рассмотрим осредненное на временном интервале $(t_1, t_1 + \tau)$ значение силы F , полученное при численном моделировании ($\langle F \rangle$) с использованием предельного решения Бассе ($\langle F^b \rangle$) и аппроксимации Мея ($\langle F^m \rangle$). Данные для разных значений τ представлены в табл. 3. В скобках для значений $\langle F^b \rangle$ и $\langle F^m \rangle$ указано отклонение (в процентах) от численного решения.

Как хорошо заметно, на коротких временных отрезках осредненные значения силы могут значительно отличаться от стационарных значений в установившихся режимах обтекания. При $\tau = 1$ вклад наследственной составляющей в суммарную силу может превышать 50% от ее значения. Величина вклада при этом существенно зависит от параметров движения сферы до и после скачка.

Оценки $\langle F^b \rangle$ осредненного значения силы, выполненные с использованием предельного решения Бассе, практически во всех случаях плохо соответствуют численным результатам. В целом решение Бассе некорректно описывает динамику наследственной составляющей при конечных числах Рейнольдса. Оценки $\langle F^m \rangle$, полученные на основе аппроксимации Мея, более чем удовлетворительно согласуются с численными данными для случаев $0 \leq u_0 < u_1$. Заметим, что их точность растет с увеличением τ . Это объясняется правильным предсказанием характера затухания наследственной составляющей на больших временах. На малых временах $\tau \sim 1$ при больших $Re \sim 100$ оценки среднего сопротивления с использованием аппроксимации получаются завышенными.

Для случая реверсивного движения оценки $\langle F^m \rangle$ в общем случае являются некорректными. Несмотря на приемлемую точность оценок на малых временах для некоторых расчетов ($Re = 100$, $u_0 = -0.25$, $u_1 = 1$), полученные данные показывают, что долгосрочное изменение наследственной силы в реверсивном движении не описывается аппроксимацией Мея.

5. Равноускоренное движение

В третьей задаче рассмотрим изменение сил, действующих на сферу на отрезке времени $[t_1, t_2]$, в течение которого сфера движется с постоянным ускорением. Эта тестовая задача была предложена в работах [13, 26, 27] для определения сил

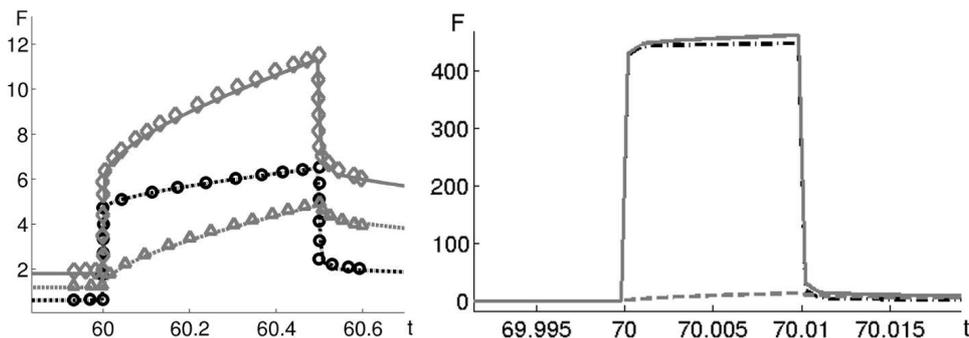


Рис. 4. Структура сил, действующих на сферу при постоянном ускорении. Слева $Re = 10$ ($u_0 = 0.5, u_1 = 1, \Delta t = 0.5$), справа $Re = 100$ ($u_0 = -0.1, u_1 = 1, \Delta t = 0.01$). Линиями обозначены составляющие силы: F (серая сплошная), F_p (черная штрих-пунктирная), F_v (серая пунктирная), маркерами – данные [13]

присоединенных масс. Ускорение на выбранном отрезке задается по формуле

$$\dot{u}_M = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \text{const.}$$

Здесь ΔU , как и ранее, есть разность скоростей после (u_1) и до (u_0) ускорения, Δt есть длина временного отрезка $[t_1, t_2]$.

Рассмотрим по отдельности изменение компоненты силы, связанной с распределением давления F_p по поверхности сферы (сопротивления давления), и касательной компоненты F_v , порождаемой вязкими напряжениями (вязкого сопротивления). Как было отмечено в [12], именно составляющая F_p должна полностью отражать изменения силы присоединенных масс, поскольку эта сила не должна зависеть от вязких эффектов. Графики, представленные на рис. 4, характеризуют изменение составляющих силы для двух случаев $Re = 10, Re = 100$. Как видно, результаты для случая $Re = 10$ хорошо совпадают с данными в работе [13]. Сопротивление давления F_p в общем случае не является постоянным на отрезке $[t_1, t_2]$ (что обусловлено влиянием квазистационарной и наследственной составляющих силы, изменяющихся вместе со скоростью движения), однако в начале и конце временного интервала ее скачкообразное изменение полностью пропорционально ускорению. Величину этого скачка, согласно представлению [13], можно определить по формуле:

$$\Delta F_p = (1 + C_a) \frac{8}{3} \dot{u}_M \approx 4\dot{u}_M, \tag{6}$$

где слагаемое $(8/3)\dot{u}_M$ (см. уравнение (5)) отражает вклад силы Фруда – Крылова. Отсюда найдем значение коэффициента присоединенных масс $C_a \approx 1/2$. Полученное значение C_a является практически универсальной константой, подтвержденной для многих случаев (см. [13, 27]), включая стоксовское и невязкое приближения. Аналогичное значение этот коэффициент принимает и в представленном на рис. 4 случае реверсивного движения ($Re = 100, C_a = 0.501$). Заметим, что при больших значениях \dot{u}_M зависимость F_p от ускорения значительнее, чем от изменения скорости, по этой причине приближенно значение коэффициента присоединенных масс можно вычислять на отрезке ускорения по формуле

$$C_a = \frac{3}{8} \frac{F_p}{\dot{u}_M} - 1. \tag{7}$$

Табл. 4

Значения коэффициента присоединенных масс для разных случаев равноускоренного движения

Re	10	10	20	20	100	100
u_1	0.5	0.5	0.5	0.5	-0.5	-0.1
u_2	1	1	1	1	1	1
Δt	0.25	0.5	0.25	0.5	0.01	0.01
C_a	0.508	0.508	0.502	0.504	0.5008	0.501

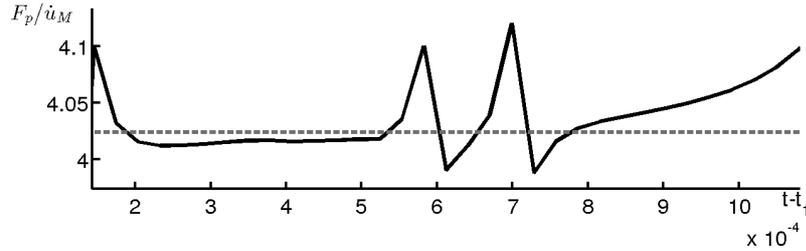


Рис. 5. Изменение функции F_p/\dot{u}_M на отрезке ускорения. Сплошная линия – результаты расчета, пунктирная линия – среднее значение функции на отрезке. $u_0 = -0.3$, $u_1 = 1$, $\Delta t = 0.0012$, $Re = 300$

Отличие C_a от постоянного значения (для случая $Re = 100$) при таком вычислении составляет не более 2%. Формула (7) позволяет приближенно вычислять коэффициент C_a для случаев с непрерывным ускорением, когда формула (6) неприменима (см. разд. 6).

Оценки коэффициента присоединенных масс для других расчетных случаев равноускоренного движения представлены в табл. 4. Всюду полученные значения C_a не более чем на 2% отличны от универсальной постоянной.

6. Движение с кусочно-линейным ускорением

В четвертой задаче рассмотрим изменение сил присоединенных масс при движении сферы с непрерывным ускорением $\dot{u}_M(t)$, определенным с помощью кусочно-линейной функции

$$\dot{u}_M(t) = -\frac{4\Delta U}{(t_2 - t_1)^2} \cdot \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1), \\ t_1 - t, & t \in [t_1, (t_1 + t_2)/2], \\ t - t_2, & t \in ((t_1 + t_2)/2, t_2], \\ 0, & t \in (t_2, t_3]. \end{cases}$$

До момента времени t_1 , как и в предыдущих задачах, сфера движется в установившемся режиме со скоростью u_0 , на отрезке ускорения $[t_1, t_2]$ скорость движения увеличивается на ΔU до u_1 . Для анализа изменения сил присоединенных масс рассмотрим случаи, когда отрезок $[t_1, t_2]$ мал и ускорения велики. Придерживаясь процедуры, описанной в разд. 5, выделим компоненту силы, связанную с распределением давления F_p по поверхности сферы, и изучим изменение функции F_p/\dot{u}_M .

На рис. 5 представлены результаты для случая $u_0 = -0.3$, $u_1 = 1$, $\Delta t = 0.0012$, $Re = 300$. Как видно, значения функции F_p/\dot{u}_M на большей части отрезка ускорения варьируются с течением времени не более чем на 2.5%, за исключением малой окрестности точек t_1 , t_2 , где функция принимает большие значения в связи с близостью делителя \dot{u}_M к нулю. Небольшие скачки наблюдаются также в окрестности

Табл. 5

Значения коэффициента присоединенных масс для разных случаев линейно ускоренного движения

Re	50	50	50	100	100	300
u_0	0.3	0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.3
u_1	1	1	1	1	1	1
Δt	0.001	0.001	0.002	0.002	0.001	0.0012
C_a	0.505	0.508	0.504	0.508	0.504	0.509

точки $(t_2 - t_1)/2$. Здесь нарушается гладкость функции, что может приводить к повышенным погрешностям численной схемы. Постоянство значений функции F_p/\dot{u}_M , безусловно, является эффектом сил присоединенных масс.

Для вычисления коэффициента C_a найдем среднее значение функции F_p/\dot{u}_M на отрезке ускорения и подставим его в формулу (7). Значения C_a , вычисленные таким образом при разных комбинациях параметров, представлены в табл. 5. Как можно видеть, отклонение этих значений от величины универсальной константы составляет не более 1.8%.

Заключение

В работе проведено решение серии задач, на основе полученных решений проанализированы силы, действующие на сферу при поступательном движении. В каждом рассмотренном случае выполнена декомпозиция полной гидродинамической силы на составляющие: квазистационарную и наследственную силы и силу присоединенных масс. По результатам исследования указанных сил были сделаны следующие выводы.

1. Ускоренное движение сферы в жидкости порождает как мгновенный отклик, выражающийся в силах присоединенных масс, так и долгосрочное воздействие, описываемое наследственными силами.

2. Наследственная сила является функцией многих параметров движения. По своей сути, она описывает воздействие на сферу завихренности, образовавшейся в результате ее нестационарного движения. Время и степень влияния этой завихренности на структуру течения около сферы определяет продолжительность действия и величину вклада наследственной силы. Несмотря на всю сложность этого явления, для некоторых случаев развития течения существуют достаточно точные аппроксимации наследственной силы. Так, для описания нестационарного гидродинамического воздействия после мгновенного переключения между двумя положительными скоростями можно использовать аппроксимационную зависимость Мея. Область применения этой аппроксимации ограничена описываемыми в ней механизмами развития вихревого следа. Как показывают проведенные вычисления для случая реверсивного движения, где сфера интенсивно взаимодействует с течениями, сформированными до скачка, изменение наследственной компоненты не описывается этой аппроксимацией.

3. Сила присоединенных масс для сферы (в противоположность наследственным силам) имеет достаточно простую структуру. Во всех рассмотренных примерах она является функцией, пропорциональной ускорению. Коэффициент пропорциональности практически не зависит от параметров движения и является универсальной константой, величина которой ($C_a \approx 1/2$) совпадает с предельными решениями для невязкого и стоксовского случаев.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00462-мол_a).

Литература

1. *Van Overbrüggen T., Klaas M., Soria J., Schröder W.* Experimental analysis of particle sizes for PIV measurements // *Meas. Sci. Technol.* – 2016. – V. 27, No 9. – Art. 094009, P. 1–10. – doi: 10.1088/0957-0233/27/9/094009.
2. *Mei R., Adrian R.* Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity, and unsteady drag at finite Reynolds number // *J. Fluid Mech.* – 1992. – V. 237. – P. 323–341. – doi: 10.1017/S0022112092003434.
3. *Mei R.* History force on a sphere due to a step change in the free-stream velocity // *Int. J. Multiphase Flow.* – 1993. – V. 19, No 3. – P. 509–525. – doi: 10.1016/0301-9322(93)90064-2.
4. *Lawrence C.J., Mei R.* Long-time behaviour of the drag on a body in impulsive motion // *J. Fluid Mech.* – 1995. – V. 283. – P. 301–327. – doi: 10.1017/S0022112095002333.
5. *Mei R.* Velocity fidelity of flow tracer particles // *Experiments in Fluids.* – 1996. – V. 22, No 1. – P. 1–13. – doi: 10.1007/BF01893300.
6. *Lighthill M.J.* On the squirring motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1952. – V. 5, No 2. – P. 109–118. – doi: 10.1002/cpa.3160050201.
7. *Егоров А.Г., Захарова О.С.* Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости // *Изв. вузов. Матем.* – 2012. – № 2. – С. 57–64.
8. *Egorov A.G., Zakharova O.S.* The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a medium with an inherited law of resistance // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* – 2015. – V. 54, No 3. – P. 495–503. – doi: 10.1134/S1064230715030065.
9. *Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T.A.* A bug on a raft: Recoil locomotion in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* – 2011. – V. 669. – P. 527–556. – doi: 10.1017/S002211201000515X.
10. *Nuriev A., Zakharova O.* The optimal control of a multi-mass vibration propulsion system in a viscous incompressible fluid // *Proc. 7th Eur. Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.* – 2016. – V. 4. – P. 7121–7129. – doi: 10.7712/100016.2322.11098.
11. *Basset A.B.* A treatise on hydrodynamics, with numerous examples: 2 v. – Cambridge: Deighton, Bell and Co., 1888. – V. 2. – 368 p.
12. *Chang E.J., Maxey M.R.* Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. Part 1. Oscillatory motion // *J. Fluid Mech.* – 1994. – V. 277. – P. 347–379. – doi: 10.1017/S002211209400279X.
13. *Chang E.J., Maxey M.R.* Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. Part 2. Accelerated motion // *J. Fluid Mech.* – 1995. – V. 303. – P. 133–153. – doi: 10.1017/S0022112095004204.
14. *Нуриев А.Н., Зайцева О.Н.* Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM // *Вестн. Казан. технол. ун-та.* – 2013. – Т. 16, № 8. – С. 116–123.
15. *Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н., Паймушин В.Н.* Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 2. Аэродинамическая составляющая демпфирования // *Механика композит. материалов.* – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 379–396.
16. *Нуриев А.Н., Захарова О.С.* Численное моделирование движения клиновидного двухмассового виброробота в вязкой жидкости // *Вычисл. механика сплошных сред.* – 2016. – Т. 9, № 1. – С. 5–15. – doi: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.1.

17. *Jasak H., Weller H.G., Gosman A.D.* High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* – 1999. – V. 31, No 2. – P. 431–449.
18. *Jasak H.* Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows: Ph.D. Thesis. – London: Univ. London, Imperial College, 1996. – 394 p.
19. *Issa R.I.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *J. Comput. Phys.* – 1986. – V. 62, No 1. – P. 40–65. – doi: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
20. *Behrens T.* OpenFOAM's basic solvers for linear systems of equations: Solvers, preconditioners, smoothers. Techn. Report. – Denmark: Techn. Univ. Denmark, 2009. – 18 p.
21. *Le Clair B.P., Hamielec A.E., Pruppracher H.R.* A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers // *J. Atmos. Sci.* – 1970. – V. 27. – P. 308–315.
22. *Dennis S.C.R., Walker J.D.A.* Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* – 1971. – V. 48, No 4. – P. 771–789. – doi: 10.1017/S0022112071001848.
23. *Johnson T., Patel V.* Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // *J. Fluid Mech.* – 1999. – V. 378. – P. 19–70. – doi: 10.1017/S0022112098003206.
24. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory. – N. Y.: McGraw-Hill, 1979. – 817 p.
25. *Dennis S.C.R., Walker J.D.A.* Numerical solutions for time-dependent flow past an impulsively started sphere // *Phys. Fluids.* – 1972. – V. 15, No 4. – P. 517–525. – doi: 10.1063/1.1693943.
26. *Rivero M., Magnaudet J., Fabre J.* Quelques resultants nouveaux concernant les forces exercees sur une inclusion spherique par un ecoulement accelere // *C. R. Acad. Sci., Ser. II: Mec., Phys., Chim., Sci. Terre Univers.* – 1991. – V. 312, No 13. – P. 1499–1506.
27. *Wakaba L., Balachandar S.* On the added mass force at finite Reynolds and acceleration numbers // *Theor. Comput. Fluid Dyn.* – 2007. – V. 21, No 2. – P. 147–153. – doi: 10.1007/s00162-007-0042-5.

Поступила в редакцию
18.09.17

Нуриев Артем Наилевич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: nuriev_an@mail.ru

Зайцева Ольга Николаевна, кандидат педагогических наук, научный сотрудник НИЛ «Высокопроизводительные распределенные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: olga_fdpi@mail.ru

Юнусова Альбина Иноятовна, аспирант кафедры информатики и прикладной математики

Казанский национальный исследовательский технологический университет
ул. К. Маркса, д. 68, г. Казань, 420015, Россия
E-mail: yunusova24@rambler.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
 SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
 (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
 2017, vol. 159, no. 4, pp. 458–472

Numerical Investigation of the History and Added Mass Forces Acting on a Spherical Micro-Particle in Rectilinear Motion in the Case of Finite Reynolds Numbers

A.N. Nuriev^{a*}, O.N. Zaitseva^{a**}, A.I. Yunusova^{b***}

^aKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

^bKazan National Research Technological University, Kazan, 420015 Russia

E-mail: *nuriev-an@mail.ru, **olga_fdpi@mail.ru, ***yunusova24@rambler.ru

Received September 18, 2017

Abstract

In this paper, the study of components (quasi-stationary, history, and added mass forces) of the hydrodynamic force in several cases of rectilinear motion of the sphere at relatively low Reynolds numbers ($5 < Re < 300$) has been carried out. Stationary motion, linearly accelerated motion, uniform motion of the sphere following the step change of velocity has been considered. The calculation of the forces acting on the sphere has been performed based on the numerical solution of the flow problem. The fluid motion has been described by the complete non-stationary system of the Navier–Stokes equations. The methods for extraction of various components of the hydrodynamic force have been investigated, as well as the applicability of simplified models describing their behavior. The estimates of the history force contribution to the total force following the step change of motion velocity have been presented. It has been shown that the law of decay of this component is different for the cases of unidirectional and reverse motion due to different transition flows. A universal approach to determine the force of the added mass for the case of large accelerations has been proposed. On its basis, the analysis of the accelerated motion for the cases of uniform and piecewise linear acceleration laws has been carried out. The results of the analysis confirm the hypothesis of the linear nature of the added mass force acting on the sphere.

Keywords: viscous fluid, rectilinear motion of sphere, quasi-stationary force, history force, added mass force, numerical simulation

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-31-00462-mol.a).

Figure Captions

Fig. 1. The computational grid near the sphere in xOy plane.

Fig. 2. Changes of the resistance forces depending on time following the step increase in the velocity for $Re = 40$.

Fig. 3. Vorticity. Immediate images of the flow at the time moments: (a) $t - t_1 = 0$, (b) $t - t_1 = 0.6$, (c) $t - t_1 = 1.2$, (d) $t - t_1 = 1.8$. $Re = 40$, $u_0 = -0.25$, $u_1 = 1$.

Fig. 4. The structure of forces acting on the sphere subjected to constant acceleration. Left-side image – $Re = 10$ ($u_0 = 0.5$, $u_1 = 1$, $\Delta t = 0.5$), right-side image – $Re = 100$ ($u_0 = -0.1$, $u_1 = 1$, $\Delta t = 0.01$). The lines designate components of the force: F (gray solid line), F_p (black dash-and-dot line), F_v (gray dashed line), markers – data from [13].

Fig. 5. Changes in the function F_p/\dot{u}_M in the acceleration interval. Solid line – the results of the calculation, dashed line – the mean value of the function within the interval. $u_0 = -0.3$, $u_1 = 1$, $\Delta t = 0.0012$, $Re = 300$.

References

1. Van Overbrüggen T., Klaas M., Soria J., Schröder W. Experimental analysis of particle sizes for PIV measurements. *Meas. Sci. Technol.*, 2016, vol. 27, no. 9, art. 094009, pp. 1–10. doi: 10.1088/0957-0233/27/9/094009.
2. Mei R., Adrian R. Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity, and unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 237, pp. 323–341. doi: 10.1017/S0022112092003434.
3. Mei R. History force on a sphere due to a step change in the free-stream velocity. *Int. J. Multiphase Flow*, 1993, vol. 19, no. 3, pp. 509–525. doi: 10.1016/0301-9322(93)90064-2.
4. Lawrence C.J., Mei R. Long-time behaviour of the drag on a body in impulsive motion. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 283, pp. 301–327. doi: 10.1017/S0022112095002333.
5. Mei R. Velocity fidelity of flow tracer particles. *Exp. Fluids*, 1996, vol. 22, no. 1, pp. 1–13. doi: 10.1007/BF01893300.
6. Lighthill M.J. On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1952, vol. 5, no. 2, pp. 109–118. doi: 10.1002/cpa.3160050201.
7. Egorov A.G., Zakharova O.S. The optimal quasi-stationary motion of a vibration-driven robot in a viscous medium. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 50–55. doi: 10.3103/S1066369X12020065.
8. Egorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a medium with a inherited law of resistance. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 495–503. doi: 10.1134/S1064230715030065.
9. Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T.A. A bug on a raft: Recoil locomotion in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 669, pp. 527–556. doi: 10.1017/S002211201000515X.
10. Nuriev A., Zakharova O. The optimal control of a multi-mass vibration propulsion system in a viscous incompressible fluid. *Proc. 7th Eur. Congr. on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2016, vol. 4, pp. 7121–7129. doi: 10.7712/100016.2322.11098.
11. Basset A.B. A Treatise on Hydrodynamics, with Numerous Examples. Vol. 2. Cambridge, Deighton, Bell and Co., 1888. 368 p.
12. Chang E.J., Maxey M.R. Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. Part 1. Oscillatory motion. *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 277, pp. 347–379. doi: 10.1017/S002211209400279X.
13. Chang E.J., Maxey M.R. Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. Part 2. Accelerated motion. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 303, pp. 133–153. doi: 10.1017/S0022112095004204.
14. Nuriev A.N., Zaitseva O.N. Solving the problem of oscillatory motion of a cylinder in a viscous medium using the OpenFOAM package. *Vestn. Kazan. Tekhnol. Univ.*, 2013, vol. 16, no. 8, pp. 116–123. (In Russian)
15. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. Aerodynamic component of damping. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 267–278. doi: 10.1007/s11029-014-9413-3.

16. Nuriev A.N., Zakharova O.S. Numerical simulation of the motion of a wedge-shaped two-mass vibration-driven robot in a viscous fluid. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 5–15. doi: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.1. (In Russian)
17. Jasak H., Weller H.G., Gosman A.D. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1999, vol. 31, no. 2, pp. 431–449.
18. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. *PhD Thesis*. London, Univ. of London, Imp. Coll., 1996. 394 p.
19. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1986, vol. 62, no. 1, pp. 40–65. doi: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
20. Behrens T. Technical Report. *OpenFOAM's Basic Solvers for Linear Systems of Equations: Solvers, Preconditioners, Smoothers*. Denmark, Techn. Univ. of Denmark, 2009. 18 p.
21. Le Clair B.P., Hamielec A.E., Pruppracher H.R. A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers. *J. Atmos. Sci.*, 1970, vol. 27, pp. 308–315.
22. Dennis S.C.R., Walker J.D.A. Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, no. 4, pp. 771–789. doi: 10.1017/S0022112071001848.
23. Johnson T., Patel V. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 378, pp. 19–70. doi: 10.1017/S0022112098003206.
24. Schlichting H. *Boundary Layer Theory*. New York, McGraw-Hill, 1979. 817 p.
25. Dennis S.C.R., Walker J.D.A. Numerical solutions for time-dependent flow past an impulsively started sphere. *Phys. Fluids*, 1972, vol. 15, no. 4, pp. 517–525. doi: 10.1063/1.1693943.
26. Rivero M., Magnaudet J., Fabre J. Quelques resultants nouveaux concernant les forces exercees sur une inclusion spherique par en icoulement accelkre. *C. R. Acad. Sci., Ser. II: Mec., Phys., Chim., Sci. Terre Univers.*, 1991, vol. 312, no. 13, pp. 1499–1506. (In French)
27. Wakaba L., Balachandar S. On the added mass force at finite Reynolds and acceleration numbers. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2007, vol. 21, no. 2, pp. 147–153. doi: 10.1007/s00162-007-0042-5.

Для цитирования: Нуриев А.Н., Зайцева О.Н., Юнусова А.И. Численное исследование наследственной силы и силы присоединенных масс, действующих на сферическую микрочастицу при поступательном движении, в случае конечных чисел Рейнольдса // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 458–472.

For citation: Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Yunusova A.I. Numerical investigation of the history and added mass forces acting on a spherical micro-particle in rectilinear motion in the case of finite Reynolds numbers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 458–472. (In Russian)