

9 класс Задача 1

Батискаф объемом V и массой m с не работающими двигателями опускается на глубину с постоянной скоростью u . Найдите натяжение троса, связывающего батискаф с платформой, если сила сопротивления $F = ku$, где k – известная константа.

Решение

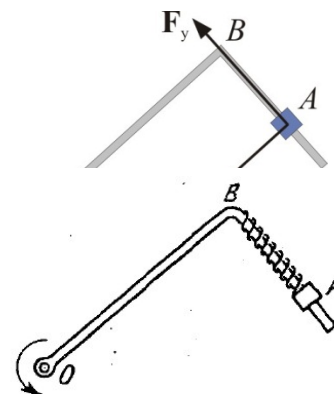
На батискаф действуют четыре силы: натяжение троса величиной T , сила тяжести mg , сила Архимеда $\rho_0 g V$, сила сопротивления ku . Так как батискаф опускается с постоянной скоростью, эти силы должны уравнивать друг друга. Так как только сила тяжести направлена вниз, получим уравнение:

$$T + \rho_0 g V + ku = mg.$$

Отсюда получаем $T = mg - \rho_0 g V - ku$.

9 класс Задача 2

Прибор (см.рис.) состоит Г-образного стержня и муфточки A , соединенной пружиной жесткостью k в точке B . Вся система вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости стержня (плоскости рисунка) и проходящей через точку O . В первом случае по часовой стрелке, во втором – против. Найдите отношение удлинений пружины в первом и во втором случаях.



Решение

В инерциальной системе отсчета связанной с точкой O на муфточку действуют три силы: сила тяжести mg (здесь и далее жирным шрифтом обозначаем векторные величины), сила реакции опоры стержня N , сила упругости F_y . Направление силы тяжести известно наверняка. Про силу реакции известно, что она направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения, но в нашем случае поверхность соприкосновения муфточки и стержня представляет собой цилиндр, поэтому точная ориентация силы реакции не известна. Сила упругости всегда направлена вдоль пружины, но здесь тоже возможны варианты: к точке Вили от нее. Уточнить направления сил помогает условие задачи. Поскольку угловая скорость постоянна, равнодействующая сил обеспечивает центростремительное ускорение муфточки, направленное в точку O . С учетом этого делаем вывод, что сила тяжести компенсируется вертикальной составляющей силы реакции опоры, а сила упругости и горизонтальная составляющая силы реакции $N\tau$ направлены так, как показано на рисунке. Очевидно, что если хотя бы одна из этих сил поменяет направление на противоположное, их сумма не будет направлена в точку O ни при каких величинах сил.

Направление и величина центростремительного ускорения не зависят от направления вращения. Значит не будут зависеть от направления вращения направления и величины сил упругости и реакции опоры.

Следовательно, отношение удлинений пружины будет равно 1.

9 класс Задача 3

Дно у кастрюли состоит из сваренных между собой медной и стальной пластин. Найти температуру на стыке пластин, если в кастрюле кипит вода, а температура варочной поверхности $t = 300$ °С. Толщина медной пластины $h_m = 7$ мм, стальной $h_c = 3$ мм. Теплопроводность меди равна 400 Вт/(м·К), стали – 70 Вт/(м·К).

Решение

Для лучшего распределения тепла по поверхности дна очевидно к варочной поверхности должна быть обращена медная пластина. Если температура стыка T то равенство теплового потока через пластины запишется в виде (учтем, что температура в кастрюле 100°C):

$$(300-T) \cdot 400 \cdot S \cdot h_m = (T-100) \cdot 70 \cdot S \cdot h_c.$$

Отсюда получаем $T = (300 \cdot 400 \cdot h_m + 100 \cdot 70 \cdot h_c) / (400 \cdot h_m + 70 \cdot h_c) = 286^\circ\text{C}$.

9 класс Задача 4

Две одинаковые электроплитки подключили к сети 220 В сначала последовательно, а потом параллельно друг другу. Как при этом изменилась потребляемая каждой из них и суммарная мощность?

Решение

Поскольку в обоих случаях плитки подключают к одному и тому же напряжению, для расчета мощности удобно пользоваться формулой $P = U^2/R$. При параллельном соединении полное сопротивление двух плиток $R = r/2$, при последовательном $R = 2r$ (r – сопротивление каждой плитки). Таким образом, при смене последовательного соединения на параллельное мощность увеличивается в 4 раза.

9 класс Задача 5

Сколько изображений дает предмет в двух плоских зеркалах, поставленных под углом 60° друг к другу.

Решение

Предмет и его изображения расположены на окружности с центром в точке пересечения зеркал O (в этом легко убедиться, доказав на основе закона отражения равенство расстояний от них до точки O). Тогда для количества изображений получаем формулу $360^\circ/\alpha - 1$. В нашем случае - 5.

10 класс Задача 1

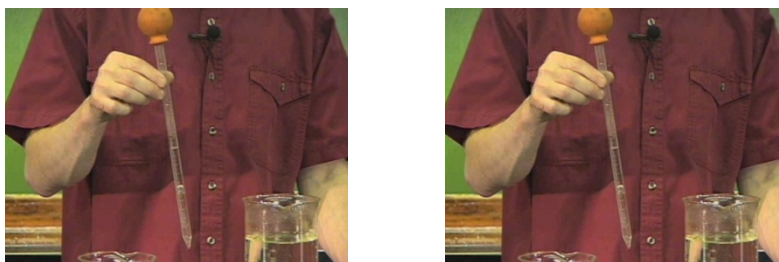
Гимнастический обруч катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v . Найдите максимальную высоту подъема его центра масс при вкатывании на шероховатую наклонную плоскость, с углом наклона α к горизонту.

Решение

По условию обруч катится без проскальзывания. Это свидетельствует об отсутствии работы силы трения. Значит, мы можем воспользоваться законом сохранения энергии. При отсутствии проскальзывания скорость каждой точки обруча складывается из скорости движения центра масс v и равной по величине скорости вращения вокруг центра масс. Таким образом, кинетическая энергия катящегося без проскальзывания обруча будет равна mv^2 . В наивысшей точке подъема она полностью перейдет в потенциальную энергию: mgh . Тогда $h = v^2/g$

10 класс Задача 2

Всем известно, что лекарство не выливается из медицинской пипетки. Однако, если в пипетку набрать горячую воду, вода начнет каплями выливаться из пипетки. Объясните явление



Решение

Рассмотрим случай, когда пипетка заполняется *холодной* водой и вынимается из стакана. Давление p_1 , оказываемое сверху на границу MN воды и воздуха (рис.1), равно:

$$p_1 = p_0 + \rho gh, \quad (1)$$

где p_0 – давление газа в верхней полости, ρ – плотность воды, h – высота столба воды, g – ускорение свободного падения.

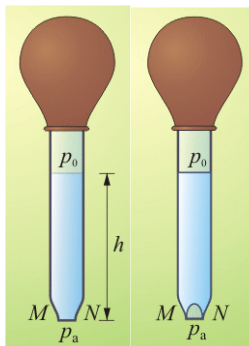


Рис 1

Рис 2

Давление p_2 , оказываемое на эту же границу снизу, складывается из атмосферного давления p_a и давления Лапласа p_L , обусловленного искривлённой поверхностью воды в кончике пипетки.

Давление p_L можно оценить по формуле

$$p_L = 2\sigma/r, \quad (2)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды ($\sigma = 73$ мН/м при комнатной температуре), r – радиус отверстия в кончике пипетки ($r \sim 1$ мм). Очевидно, что давление Лапласа пренебрежимо мало по сравнению с атмосферным, и им можно пренебречь.

Так как жидкость находится в покое, то $p_1 = p_2$. Учитывая соотношение (1);, получим:

$$p_0 + \rho gh = p_a. \quad (3)$$

Отсюда видно, что вода может выливаться из пипетки (это приведёт к уменьшению h) лишь за счёт увеличения p_0 . Параметры газа в полости (температура и объём) остаются постоянными, поэтому давление p_0 не меняется, и вода не выливается.

Рассмотрим другой случай: пипетка заполняется *кипятком*.

Необходимо обратить внимание, что в верхней полости пипетки находится смесь воздуха с насыщенным водяным паром. Давление насыщенного пара существенно зависит от температуры: при комнатной температуре (20°C) оно равно приблизительно 2 кПа, а при 100°C около 101 кПа. Поэтому можно считать, что в случае, когда пипетка заполняется *очень горячей* водой, в полости будет находиться *в основном насыщенный водяной пар* (отметим, что при наполнении пипетки холодной водой, там находился в основном воздух).

Допустим, что в какой-то момент времени в системе установилось равновесие, т.е. выполняется соотношение (3);, и вода из пипетки не выливается. Через некоторое время температура воды и пара должна понизиться. Давление в полости p_0 уменьшится, и соотношение (3); нарушится:

$$p_0 + \rho gh < p_a. \quad (4)$$

Давление на поверхность MN извне станет больше, чем изнутри пипетки, и граница начнёт втягиваться внутрь (рис.2): в пипетку всасывается пузырёк воздуха.

Попадая в верхнюю полость, пузырёк доставляет туда некоторое количество газа. Давление в полости возрастает, соотношение (3); восстанавливается. Газ продолжает остывать, и его давление p_0 уменьшается. Новый пузырёк воздуха втягивается в пипетку и т.д.

Осталось обратить внимание на то, что из пипетки каждый раз вытекает *небольшое количество* воды. В чём причина?

Нужно учесть, что в пипетку втягивается *холодный* воздух. Если бы его температура не менялась, то вода бы не вытекала из пипетки. Однако, поднимаясь сквозь горячую воду, газ в пузырьке нагревается.

Для упрощения анализа можно считать, что пузырёк с воздухом *попадает* в полость *холодным*, а уже оказавшись в ней, нагревается. Это приводит к *дополнительному увеличению давления* и вытеснению из пипетки некоторого количества воды.

10 класс Задача 3

При морозе -10°C на поверхности пруда за одни сутки нарастает слой льда толщиной 11 см. Оцените, на какой глубине в средних широтах можно закапывать без дополнительной теплоизоляции металлические трубы водопровода, чтобы избежать замерзания воды?

Решение

При замерзании воды необходимо обеспечить отток скрытой теплоты плавления льда от областей кристаллизации. Чем меньше теплопроводность вещества, через который осуществляется отток теплоты, тем медленнее будет идти кристаллизация. Сухой грунт обладает плохой теплопроводностью, однако дождливой осенью он может пропитаться водой. Поэтому, делая оценку “с запасом” предположим, что теплопроводность промерзшего грунта равна теплопроводности льда.

Далее возможны следующие рассуждения. Пусть за время Δt толщина льда прирастает на величину Δh . Тогда за это время с единицы площади замерзающей поверхности необходимо отвести количество скрытой теплоты $q \rho \Delta h$ (q – удельная теплота плавления льда, ρ – плотность воды). Сквозь толщу h уже замерзшего к этому времени льда через единицу площади поверхности в атмосферу перейдет количество тепла $\chi(T - T_{\text{пл}}) \Delta t / h$ (χ – коэффициент теплопроводности льда, T – температура воздуха). Таким образом, получаем уравнение:

$$q \rho h \Delta h = \chi(T - T_{\text{пл}}) \Delta t.$$

Отсюда, из соображений размерности, очевидно, что $h^2 \propto (T - T_{\text{пл}})t$. Следовательно, если считать, что мороз -10°C продержится 100 суток, это приведет к возрастанию толщи льда на 110 см. А при морозе -20°C за те же 100 суток примерно 155 см. С учетом, средней температуры зимой, можно быть уверенным, что трубопровод на глубине 1,5 метра не промерзнет.

10 класс Задача 4

Карандаш опущен в неглубокую ванну с водой. Определите, на каком из рисунков карандаш опускают в воду, а на каком – поднимают. Ответ обоснуйте.

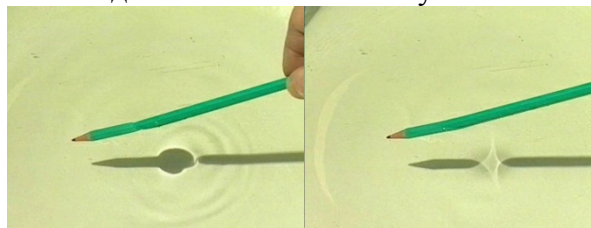


Рис 1

Рис 2

Решение

Возникновение “странных теней” связано с недостаточно хорошим смачиванием водой поверхности карандаша. Когда он входит в воду, то поверхность воды около него имеет выпуклую форму, и лучи от источника света S отклоняются от оси карандаша (рис. 1). В этом случае под карандашом образуется большое темное пятно.

Когда карандаш поднимают, поверхность воды около карандаша становится вогнутой. Световые лучи преломляются такой поверхностью и отклоняются к оси карандаша (рис.2). Под ним образуется светлое пятно.

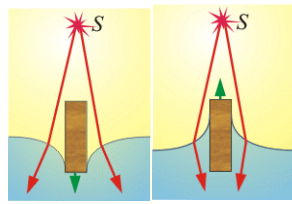
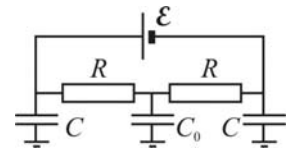


Рис 1

Рис 2

10 класс Задача 5

К точкам 1,2,3 электрической цепи присоединены первоначально не заряженные конденсаторы. Найдите заряды на этих конденсаторах. Значения всех параметров, указанных на рисунке, известны.



Решение

Если заряд первого слева конденсатора q_1 , второго q_2 , третьего q_3 , то потенциалы на их не заземленных обкладках можно записать так: $\varphi_1 = q_1/C$, $\varphi_2 = q_2/C_0$, $\varphi_3 = q_3/C$. Из второго правила Кирхгофа и закона сохранения заряда, очевидны соотношения:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \mathcal{E}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}/2$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

Решая полученную систему уравнений получаем: $q_1 = -q_3 = q_2 C \mathcal{E} / 2 = 0$.

11 класс Задача 1

Вращающийся с угловой скоростью ω гимнастический обруч радиуса R и массой m упал вертикально плашмя на ковер с высоты h . Определите количество выделившейся при этом теплоты.

Решение

Первоначальный запас энергии обруча определялся суммой потенциальной и кинетической энергии.

Начальная потенциальная энергия равна mgh , кинетическая $m(R\omega)^2/2$. Значит, полное количество теплоты равно $Q = m(gh + (R\omega)^2/2)$

11 класс Задача 2

При морозе -10°C на поверхности пруда за одни сутки нарастает слой льда толщиной 11 см. Оцените, на какой глубине в средних широтах можно закапывать без дополнительной теплоизоляции металлические трубы водопровода, чтобы избежать замерзания воды?

Решение

При замерзании воды необходимо обеспечить отток скрытой теплоты плавления льда от областей кристаллизации. Чем меньше теплопроводность вещества, через который осуществляется отток теплоты, тем медленнее будет идти кристаллизация. Сухой грунт обладает плохой теплопроводностью, однако дождливой осенью он может пропитаться водой. Поэтому, делая оценку “с запасом” предположим, что теплопроводность промерзшего грунта равна теплопроводности льда.

Далее возможны следующие рассуждения. Пусть за время Δt толщина льда прирастает на величину Δh . Тогда за это время с единицы площади замерзающей поверхности необходимо отвести количество скрытой теплоты $q \rho \Delta h$ (q – удельная теплота плавления льда, ρ – плотность воды). Сквозь толщину h уже замерзшего к этому времени льда через единицу площади поверхности в атмосферу перейдет количество тепла $\chi(T - T_{\text{пл}}) \Delta t / h$ (χ – коэффициент теплопроводности льда, T – температура воздуха). Таким образом, получаем уравнение:

$$q \rho h \Delta h = \chi(T - T_{\text{пл}}) \Delta t.$$

Отсюда, из соображений размерности, очевидно, что $h^2 \sim (T - T_{\text{пл}})t$. Следовательно, если считать, что мороз -10°C продержится 100 суток, это приведет к возрастанию толщи льда на 110 см. А при морозе -20°C за те же 100 суток примерно 155 см. С учетом, средней температуры зимой, можно быть уверенным, что трубопровод на глубине 1,5 метра не промерзнет.

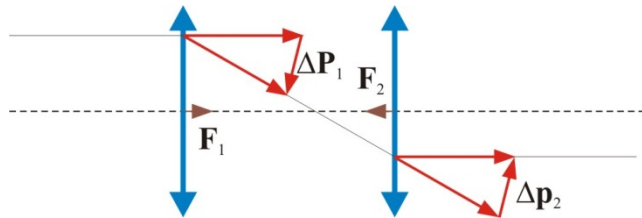
11 класс Задача 3

Две идеально прозрачных собирающих линзы установлены на подставках на горизонтальном гладком столе. Линзы образуют телескопическую систему (расстояние между ними равно сумме фокусных расстояний). Что произойдет с линзами при освещении системы мощным пучком лазерного света параллельным оптической оси?

Решение

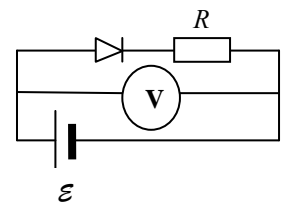
Как известно, свет обладает импульсом. Преломляя лучи света, линзы меняют направления импульсов световых лучей, и значит, испытывают на себе силу светового давления.

На рисунке проведены построения хода световых лучей в системе, описанной в условии. Учтено, что поглощения в линзах нет. Видно, что изменение импульса света первой линзой имеет составляющую вдоль оптической оси направленную навстречу падающим лучам, а второй – вдоль. Тогда по третьему закону Ньютона свет будет “отталкивать” (сила F_1) первую линзу и “притягивать” (сила F_2) вторую. Линзы начнут сближаться. Дальнейший анализ движения требует большего количества данных: фокусные расстояния, диаметр линз, их масса.



11 класс Задача 4

В схеме, приведенной на рисунке, внутреннее сопротивление источника тока r , диод имеет нулевое сопротивление, если напряжение на нем больше U_0 в прямом направлении и бесконечное в остальных случаях. Что показывает идеальный вольтметр в этой цепи? Что он покажет, если изменить полярность включения диода?



Решение

Если $\mathcal{E} < U_0$ то диод закрыт и вольтметр покажет значение \mathcal{E} . Если $\mathcal{E} > U_0$ диод открывается и можно записать закон Ома для полной цепи $\mathcal{E} = U_0 + I(R+r)$. Вольтметр покажет $(\mathcal{E}R + U_0 r)/(R+r)$.

11 класс Задача 5

Точечные электрические заряды величинами $2q$ и $-q$ находятся на расстоянии l друг от друга. Где и какой заряд следует поместить, чтобы система находилась в механическом равновесии?

Решение

Ясно, что дополнительный заряд следует поместить на прямой соединяющей наши заряды. Положительный заряд Q нужно расположить так чтобы заряд $-q$ оказался между ним и зарядом $2q$, Так как только в этом случае можно ожидать равенства кулоновских сил от зарядов разной величины (за счет пропорционального изменения расстояний) Если обозначить расстояние между зарядами Q и $-q$ как x , то условия динамического равновесия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} 2qq/l^2 &= qQ/x^2 \\ qQ/x^2 &= 2qQ/(x+l)^2 \end{aligned}$$

Решив эти уравнения получим $x = (1 + \sqrt{2})l$, $Q = 2q(1 + \sqrt{2})^2$.