Известия вузов. Математика
2013, №8, с. 57–65

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

О.А. РЕПИН, С.К. КУМЫКОВА

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА, ПОРЯДОК КОТОРОГО ВЫРОЖДАЕТСЯ ВДОЛЬ ЛИНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Аннотация. Исследована однозначная разрешимость нелокальной задачи с операторами Сайго в краевом условии для уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа. При ограничениях вида неравенств на известные функции доказана теорема единственности. Существование решения задачи доказано эквивалентной редукцией к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши. Выписано условие, гарантирующее существование регуляризатора, приводящего полученное уравнение к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная задача, операторы дробного интегро-дифференцирования, сингулярное уравнение с ядром Коши, уравнение Фредгольма, регуляризатор, задача Дирихле, задача Коши.

УДК: 517.946

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0, \tag{1}$$

где m — натуральное число, $\alpha = \mathrm{const}$, причем $\frac{1-2m}{2} \le \alpha < 1$, в конечной области Ω плоскости переменных x, y, ограниченной кривой σ:

$$x^2 + \left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 y^{2m+1} - x = 0$$

с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, расположенной в верхней полуплоскости, и характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) в нижней полуплоскости.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$ — соответственно эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω, I — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup I) \cap C^1(\Omega_2 \cup I) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)|_\sigma = \varphi(x,y), \tag{2}$$

$$a(x)I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\eta_1}\delta(x)u[\Theta_0(x)] + b(x)I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}w(x)u[\Theta_1(x)] + c(x)u(x,0) + d(x)\nu(x) = \gamma(x) \quad \forall\, x \in I \tag{3}$$

Поступила 12.04.2012

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \equiv \nu(x), \tag{4}$$

где $\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\big)(x)$ и $\big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\big)(x)$ — обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования, введенные японским математиком М. Сайго [1] ([2], с. 326–327) и имеющие при действительных α, β, η и $x>0$ вид

$$\begin{aligned}
\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f\big)(x) &= \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}\Big)f(t)\,dt \quad (\alpha>0),\\
\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f\big)(x) &= \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\big(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f\big)(x) \quad (\alpha\le 0,\quad n=[-\alpha]+1);\\
\big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f\big)(x) &= \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;\frac{t-x}{1-x}\Big)f(t)\,dt \quad (\alpha>0),\\
\big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f\big)(x) &= \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n\big(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f\big)(x) \quad (\alpha\le 0,\quad n=[-\alpha]+1).
\end{aligned}$$

Заметим, что при $\alpha>0$ справедливы формулы

$$\begin{aligned}
\big(I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta}f\big)(x) = \big(I_{0+}^{\alpha}f\big)(x), \quad \big(I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}f\big)(x) = \big(D_{0+}^{\alpha}f\big)(x),\\
\big(I_{1-}^{\alpha,-\alpha,\eta}f\big)(x) = \big(I_{1-}^{\alpha}f\big)(x), \quad \big(I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta}f\big)(x) = \big(D_{1-}^{\alpha}f\big)(x),
\end{aligned}$$

где $\big(I_{0+}^{\alpha}f\big)(x)$, $\big(D_{0+}^{\alpha}f\big)(x)$ и $\big(I_{1-}^{\alpha}f\big)(x)$, $\big(D_{1-}^{\alpha}f\big)(x)$ — операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\alpha>0$ ([2], сс. 42, 44),

$$\begin{aligned}
\big(I_{0+}^{\alpha}f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt \quad (\alpha>0,\quad x>0),\\
\big(D_{0+}^{\alpha}f\big)(x) &= \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt \quad (\alpha>0,\quad n=[\alpha]+1);\\
\big(I_{1-}^{\alpha}f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1}f(t)\,dt \quad (\alpha>0,\quad x>0),\\
\big(D_{1-}^{\alpha}f\big)(x) &= \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt \quad (\alpha>0,\quad n=[\alpha]+1),
\end{aligned}$$

а $[\alpha]$ означает целую часть α; $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in I$ с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi(x,y)\in C(\sigma)$, $a(x),b(x),c(x),d(x),\gamma(x)\in C^{(1,\lambda)}(\overline{I})\cap C^2(I)$, $\lambda=\mathrm{const}>0$, причем

$$a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)+d^2(x)\neq 0.$$

Сразу же отметим, что на функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ и параметры α_i, β_i, η_i $(i=1,2)$ ниже будут наложены необходимые условия, при которых исследуемая задача однозначна разрешима.

Допускается также, что функция $\nu(x)$ из (4) может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы на концах интервала $(0,1)$.

В случаях, когда $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{1}{2}-m$, а условие (3) заменено условием

$$a(x)D_{0+}^{1-\beta}u[\Theta_0(x)] + b(x)D_{1-}^{1-\beta}u[\Theta_1(x)] = c(x), \tag{5}$$

где $D_{0+}^{1-\beta}$, $D_{1-}^{1-\beta}$ — операторы дробного в смысле Римана–Лиувилля дифференцирования [2], $\beta=\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, существование и единственность решения задачи (1), (2), (5) доказаны А.В. Бицадзе [3].

Условие, более общее чем (5), представлено в статье С.К. Кумыковой [4].

В данной работе существенно обобщаются результаты, полученные в [3], [4].

2. Единственность решения задачи. При $\frac{1-2m}{2}<\alpha<1$ регулярное в Ω_2 решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\quad \lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\quad 0<x<1,$$

единственно и имеет вид ([3], с. 48)

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]\big[t(1-t)\big]^{\beta-1}\,dt-$$
$$-\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1\nu\left[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]\big[t(1-t)\big]^{-\beta}\,dt. \quad (6)$$

Найдем $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$. Получим

$$u[\Theta_0(x)]=u\left[\frac{x}{2},-\left(\frac{2m+1}{4}x\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^x\frac{x^{1-2\beta}\xi^{\beta-1}\tau(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-\beta}}-$$
$$-\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}x\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{2m+1}}\int_0^x\frac{x^{2\beta-1}\xi^{-\beta}\nu(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{\beta}},$$
$$u[\Theta_1(x)]=u\left[\frac{1+x}{2},-\left(\frac{2m+1}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_x^1\frac{(1-x)^{1-2\beta}(1-\xi)^{\beta-1}\tau(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{1-\beta}}-$$
$$-\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}(1-x)\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{2m+1}}\int_x^1\frac{(1-\xi)^{-\beta}\nu(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\beta}},$$

или в укороченном виде

$$u[\Theta_0(x)]=k_1I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x)+k_2I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x),$$
$$u[\Theta_1(x)]=k_1I_{1-}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x)+k_2I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x),$$

где

$$k_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)},\quad k_2=-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}.$$

Из формулы (6) при $\beta\to0$ получим функцию ([3], с. 51)

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\tau\left[x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]+\frac{1}{2}\tau\left[x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]-$$
$$-\frac{2}{2m+1}\cdot(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\int_0^1\nu\left[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]dt, \quad (7)$$

являющуюся регулярным в области Ω_2 решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\quad \lim_{y\to-0}(-y)^{\frac{1-2m}{2}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\quad 0<x<1,$$

где заданные $\tau(x)$ и $\nu(x)$ функции два и один раз непрерывно дифференцируемые соответственно.

Вычислим $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ в случае $\alpha = \frac{1-2m}{2}$. Получим

$$u[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2}\tau(0) + \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{x}{2}\int_0^1 \nu[x(1-t)]\,dt.$$

В результате замены $\xi = x(1-t)$ будем иметь

$$u[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2}\tau(0) + \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \nu(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично

$$u[\Theta_1(x)] = \frac{1}{2}\tau(x) + \frac{1}{2}\tau(1) - \frac{1-x}{2}\int_0^1 \nu[1-t(1-x)]\,dt.$$

Произведя замену $\xi = 1 - t(1-x)$, получим

$$u[\Theta_1(x)] = \frac{1}{2}\tau(x) + \frac{1}{2}\tau(1) - \frac{1}{2}\int_x^1 \nu(\xi)\,d\xi.$$

Теорема (принцип экстремума). *При* $\frac{1-2m}{2} < \alpha < 1$ *решение* $u(x,y)$ *задачи* (1)–(4) *при* $\gamma(x) = 0$ *положительный максимум и отрицательный минимум в области* $\overline{\Omega}_1$ *принимает на дуге* σ, *если*

$$\text{либо}\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta - 1,\quad \beta_1 = \beta_2 = 1 - 2\beta,\quad \eta_1 = \eta_2 = 0,\quad \sigma(x) = w(x) = 1, \tag{8}$$

$$\text{либо}\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta - 1,\quad \beta_1 = \beta_2 = 0,\quad \eta_1 = \eta_2 = 1 - 2\beta,$$
$$\sigma(x) = x^{2\beta-1},\quad w(x) = (1-x)^{2\beta-1} \tag{9}$$

и выполняется любое из двух условий:

$$a(x) \geq 0,\quad b(x) \geq 0,\quad c(x) \geq 0,\quad d(x) \leq 0\quad \forall x \in \overline{I} \tag{10}$$

или

$$a(x) \leq 0,\quad b(x) \leq 0,\quad c(x) \leq 0,\quad d(x) \geq 0\quad \forall x \in \overline{I}; \tag{11}$$

при $\alpha = \frac{1-2m}{2}$ *нужно выполнить условия* (10), (11).

Доказательство. Пусть выполняются условия (8). Удовлетворяя $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ условию (3), опираясь на формулы композиций ([2], с. 327; [5], с. 15–17)

$$\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f\big)(x) = \big(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f\big)(x)\quad (\gamma > 0), \tag{12}$$

$$\big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f\big)(x) = \big(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f\big)(x)\quad (\gamma > 0), \tag{13}$$

получим

$$a(x) I_{0+}^{\beta-1,1-2\beta,0}\big(k_1 I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x) + k_2 I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x)\big) +$$
$$+ b(x) I_{1-}^{\beta-1,1-2\beta,0}\big(k_1 I_{1-}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x) + k_2 I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x)\big) + c(x)\tau(x) + d(x)\nu(x) = \gamma(x).$$

Отсюда с учетом (12), (13) будем иметь

$$a(x)\big(k_1 I_{0+}^{2\beta-1,1-2\beta,0}\tau(x) + k_2\nu(x)\big) + b(x)\big(k_1 I_{1-}^{2\beta-1,1-2\beta,0}\tau(x) + k_2\nu(x)\big) +$$
$$+ c(x)\tau(x) + d(x)\nu(x) = \gamma(x).$$

Воспользуемся формулами

$$\big(I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta} f\big)(x) = \big(D_{0+}^{\alpha} f\big)(x),\quad \big(I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta} f\big)(x) = \big(D_{1-}^{\alpha} f\big)(x),\quad \alpha > 0, \tag{14}$$

и в результате получим

$$\big[k_2(a(x)+b(x))+d(x)\big]\nu(x)+k_1a(x)D_{0+}^{1-2\beta}\tau(x)+k_1b(x)D_{1-}^{1-2\beta}\tau(x)+c(x)\tau(x)=\gamma(x).$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$\left[k_0(a(x)+b(x))-\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}d(x)\right]\nu(x)=a(x)D_{0+}^{1-2\beta}\tau(x)+ \\ +b(x)D_{1-}^{1-2\beta}\tau(x)+\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}c(x)\tau(x)-\gamma(x), \quad (15)$$

где

$$k_0=-k_2/k_1>0.$$

Функция $u(x,y)$ свои экстремальные значения не может достигать в области Ω_1. Пусть положительный максимум (отрицательный минимум) в области Ω_1 достигается в точке $(\xi,0)\in I$. При выполнении условий (10), (11) и $\gamma(x)=0$ в силу принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования ([6], с. 105) из (15) имеем $\nu(\xi)>0$ ($\nu(\xi)<0$), что противоречит принципу Заремба–Жиро ([7], с. 26).

Полученное противоречие при выполнении условий (8) доказывает сформулированный принцип экстремума и единственность решения задачи.

Пусть теперь выполняются условия (9). Тогда, подставляя $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ в (3), получим

$$a(x)I_{0+}^{\beta-1,0,1-2\beta}x^{2\beta-1}\big(k_1I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x)+k_2I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x)\big)+ \\ +b(x)I_{1-}^{\beta-1,0,1-2\beta}(1-x)^{2\beta-1}\big(k_1I_{1-}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x)+k_2I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x)\big)+ \\ +c(x)\tau(x)+d(x)\nu(x)=\gamma(x). \quad (16)$$

Отсюда, учитывая известные равенства

$$x^{\alpha+\beta+\eta}\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f\big)(x)=\big(I_{0+}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta}f\big)(x) \quad (\alpha>0),$$
$$(1-x)^{\alpha+\beta+\eta}\big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f\big)(x)=\big(I_{1-}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta}f\big)(x) \quad (\alpha>0),$$

будем иметь

$$x^{2\beta-1}I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x)=I_{0+}^{\beta,1-2\beta,-\beta}\tau(x),$$
$$(1-x)^{2\beta-1}I_{1-}^{\beta,0,\beta-1}\tau(x)=I_{1-}^{\beta,1-2\beta,-\beta}\tau(x),$$
$$x^{2\beta-1}I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x)=I_{0+}^{1-\beta,0,-\beta}\nu(x),$$
$$(1-x)^{2\beta-1}I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(x)=I_{1-}^{1-\beta,0,-\beta}\nu(x).$$

Подставляя в (16), находим

$$a(x)I_{0+}^{\beta-1,0,1-2\beta}\big[k_1I_{0+}^{\beta,1-2\beta,-\beta}\tau(x)+k_2I_{0+}^{1-\beta,0,-\beta}\nu(x)\big]+ \\ +b(x)I_{1-}^{\beta-1,0,1-2\beta}\big[k_1I_{1-}^{\beta,1-2\beta,-\beta}\tau(x)+k_2I_{1-}^{1-\beta,0,-\beta}\nu(x)\big]+ \\ +c(x)\tau(x)+d(x)\nu(x)=\gamma(x).$$

Отсюда

$$a(x)\big[k_1I_{0+}^{2\beta-1,1-2\beta,1-2\beta}\tau(x)+k_2\nu(x)\big]+b(x)\big[k_1I_{1-}^{2\beta-1,1-2\beta,1-2\beta}\tau(x)+k_2\nu(x)\big]+ \\ +c(x)\tau(x)+d(x)\nu(x)=\gamma(x).$$

С учетом (14)

$$a(x)\big[k_1 D_{0+}^{1-2\beta}\tau(x)+k_2\nu(x)\big]+b(x)\big[k_1 D_{1-}^{1-2\beta}\tau(x)+k_2\nu(x)\big]+c(x)\tau(x)+d(x)\nu(x)=\gamma(x).$$

Получили соотношение (15), и все сказанное относительно единственности решения задачи справедливо.

В случае, когда $\alpha=\frac{1-2m}{2}$, $\beta=0$, условие (3) примет вид

$$a(x)\frac{d}{dx}u[\Theta_0(x)]-b(x)\frac{d}{dx}u[\Theta_1(x)]+c(x)\tau(x)+d(x)\nu(x)=\gamma(x),$$

откуда

$$a(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\tau(0)+\frac{1}{2}\tau(x)-\frac{1}{2}\int_0^x\nu(\xi)\,d\xi\right]-b(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\tau(x)+\frac{1}{2}\tau(1)-\frac{1}{2}\int_x^1\nu(\xi)\,d\xi\right]+$$
$$+c(x)\tau(x)+d(x)\nu(x)=\gamma(x),$$

или

$$\big[2d(x)-a(x)-b(x)\big]\nu(x)+\big[a(x)-b(x)\big]\tau'(x)+2c(x)\tau(x)=2\gamma(x). \tag{17}$$

При $\gamma(x)=0$ перепишем (17) в виде

$$\big[a(x)+b(x)-2d(x)\big]\nu(x)=\big[a(x)-b(x)\big]\tau'(x)+2c(x)\tau(x).$$

Отсюда видно, что при выполнении (10) или (11) принцип экстремума также имеет место.

Таким образом, единственность решения задачи в случае $\frac{1-2m}{2}\le\alpha<1$ доказана.

3. Существование решения задачи. При $\frac{1-2m}{2}\le\alpha<1$ решение задачи $u|_\sigma=\varphi(x,y)$, $\lim\limits_{y\to+0}y^\alpha\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x)$ выписывается в квадратурах по формуле ([7], сс. 184–185, 201–202)

$$u(x,y)=\int_0^1\nu(\xi)G(\xi,z)\,d\xi+\int_0^1\varphi(\xi)\left(\eta^m\frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)G(\zeta,z)\,d\xi, \tag{18}$$

$\zeta\in\sigma$, функция Грина

$$G(\zeta,z)=g(\zeta,z)-\left|\frac{1}{2z-1}\right|^{2\beta}g\left(\zeta,\ \frac{z-\frac{1}{2}}{|2z-1|^2}\right),$$

где

$$g(\zeta,z)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{2\beta}\cdot\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}|z-\overline{\zeta}|^{-\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta;1-\left|\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}\right|^2\right),$$
$$\beta=\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}.$$

Не ограничивая общности, во избежание технической сложности далее будем полагать $\varphi(x,y)\equiv0$. Пусть $\alpha=\frac{1-2m}{2}$.

Для значения $\tau(x)=u(x,0)$ решения задачи (1), (2),

$$\lim_{y\to+0}y^\alpha\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x) \tag{19}$$

имеем ([3], с. 51)

$$\tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\big[\log|t-x|-\log(t+x-2tx)\big]\nu(t)\,dt. \tag{20}$$

Дифференцируя (20), получим

$$\tau'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right]\nu(t)\,dt.$$

Подставляя $\tau(x)$ и $\tau'(x)$ в (17), будем иметь

$$\big[2d(x)-a(x)-b(x)\big]\nu(x)-\big[a(x)-b(x)\big]\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{1}{\xi-x}+\frac{1-2\xi}{\xi+x-2\xi x}\right]\nu(\xi)\,d\xi=R[\nu]+2\gamma(x),\quad (21)$$

где

$$R[\nu]=-\frac{2c(x)}{\pi}\int_0^1\big[\log|\xi-x|-\log(\xi+x-2\xi x)\big]\nu(\xi)\,d\xi.$$

Произведя замену переменных [8]

$$t=\frac{\xi^2}{1-2\xi+2\xi^2},\quad y=\frac{x^2}{1-2x+2x^2}$$

и вводя обозначение $\rho(y)=(1-2x+2x^2)\nu(x)$, придадим уравнению (21) вид

$$A(y)\rho(y)+\frac{B(y)}{\pi i}\int_0^1\frac{\rho(t)\,dt}{t-y}=(1-2x+2x^2)R[\rho]+2(1-2x+2x^2)\gamma(x),\qquad (22)$$

где

$$A(y)=2d(x)-a(x)-b(x),\quad B(y)=\big[b(x)-a(x)\big]i,\quad x=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{1-y}},$$

$$(1-2x+2x^2)R[\rho]=\frac{c\big(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{1-y}}\big)}{\pi(\sqrt{y}+\sqrt{1-y})^2}\int_0^1\left[\log\left|\frac{\sqrt{t(1-y)}-\sqrt{y(1-t)}}{(\sqrt{t}+\sqrt{1-t})(\sqrt{y}+\sqrt{1-y})}\right|-\right.$$
$$\left.-\log\left|\frac{\sqrt{t(1-y)}+\sqrt{y(1-t)}}{(\sqrt{y}+\sqrt{1-y})(\sqrt{t}+\sqrt{1-t})}\right|\right]\frac{\rho(t)\,dt}{\sqrt{t(1-t)}},$$

$$2(1-2x+2x^2)\gamma(x)=\frac{2}{(\sqrt{y}+\sqrt{1-y})^2}\cdot\gamma\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{1-y}}\right).$$

Так как $\gamma(x)\in C^{(1,\lambda)}(\overline{I})\cap C^2(I)$, $\lambda>0$ и в $R[\rho]$ ядро имеет слабую особенность (при $t=y$ — логарифмическую, а при $t=0$ и $t=1$ — особенность порядка $1/2$), то при $\alpha=(1-2m)/2$ задача (1)–(3) эквивалентна в смысле разрешимости сингулярному интегральному уравнению (22) [9].

Условие

$$A^2(y)-B^2(y)\neq 0$$

гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (22) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [9]. Из возможности приведения задачи (1)–(3) к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и единственности искомого решения следует существование решения задачи (1)–(3) в требуемом классе функций.

В случае $\alpha=0$ и $m=1$ уравнение (1) является уравнением Трикоми и решение $u(x,y)$ задачи (1),

$$u(x,0)=\tau(x),\quad \lim_{y\to-0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\quad 0<x<1,\qquad (23)$$

дается формулой ([7], с. 286)

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2t)\right][t(1-t)]^{-5/6}\,dt+$$
$$+\frac{4}{3}^{2/3}\gamma_2 y\int_0^1\nu\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2t)\right]\big[t(1-t)\big]^{-1/6}\,dt,\quad (24)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{6})}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma^2(\frac{5}{6})}.$$

Отсюда

$$u[\Theta_0(x)] = u\left[\frac{x}{2}, -\left(\frac{3}{4}x\right)^{2/3}\right] = \gamma_1 x^{2/3} \int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{[t(x-t)]^{5/6}} - \gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{[t(x-t)]^{1/6}},$$

$$u[\Theta_1(x)] = u\left[\frac{1+x}{2}, -\left(\frac{3}{4}(1-x)\right)^{2/3}\right] =$$
$$= \gamma_1 (1-x)^{2/3} \int_x^1 \frac{\tau(t)\,dt}{[(1-t)(t-x)]^{5/6}} - \gamma_2 \int_x^1 \frac{\nu(t)\,dt}{[(1-t)(x-t)]^{1/6}},$$

или

$$u[\Theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) I_{0+}^{1/6,\,0,\,-5/6} \tau(x) - \gamma_2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) I_{0+}^{5/6,\,-2/3,\,-5/6} \nu(x),$$
$$u[\Theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) I_{1-}^{1/6,\,0,\,-5/6} \tau(x) - \gamma_2 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) I_{1-}^{5/6,\,-2/3,\,-5/6} \nu(x).$$

Далее, при $\alpha = 0$, $m = 1$, $\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)} = \frac{1}{6}$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -5/6, \quad \beta_1 = \beta_2 = 2/3, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0, \quad \delta(x) = w(x) = 1$$

либо

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -5/6, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \eta_1 = \eta_2 = 2/3, \quad \delta(x) = x^{-2/3}, \quad w(x) = (1-x)^{-2/3}$$

и при условиях (9) или (10) доказательство единственности и существования решения исследуемой задачи проводится аналогично случаю $\alpha = 1/2 - m$.

При $(1-2m)/2 < \alpha < 1$ и при условиях теоремы единственности вопрос существования решения задачи также редуцируется к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения относительно $\nu(x)$ подобно тому, как это указано в работах А.В. Бицадзе [3], [7].

По обычной схеме, восходящей к Ф. Трикоми [10], можно выписать условие, гарантирующее существование регуляризатора, сводящего полученное сингулярное интегральное уравнение к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Литература

[1] Saigo M. *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function*, Math. Rep. Kyushu Univ. **11** (2), 135–143 (1978).

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).

[3] Бицадзе А.В. *К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа*, Сб. тр., посвящ. 80-летию Н.И. Мусхелишвили (Наука, М., 1972), с. 48–52.

[4] Кумыкова С.К. *Задача со смещением для уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа*, Тр. 7-й Всероссийск. научн. конф. “Матем. моделиров. и краевые задачи” (Самара, 2010), ч. 3, с. 147–149.

[5] Репин О.А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов* (Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 1992).

[6] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение* (Физматлит, М., 2003).

[7] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).

[8] Manwell A.R. *On general conditions for the existence of certain solutions of the equations of plane transonic flow.* I: *The Dirichlet problem* (Arch. Rat. Mech. Anal. **12**, 249-272 (1963).

[9] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

[10] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа* (Пер. с итал. Ф.И. Франкля. Гостехтеориздат, М.–Л., 1947).

О.А. Репин

профессор, заведующий кафедрой математической статистики и эконометрики,
Самарский государственный экономический университет,
ул. Советской Армии, д. 141, г. Самара, 443090, Россия,

`e-mail:` Matstat@mail.ru

С.К. Кумыкова

доцент, кафедра теории функций и функционального анализа,
Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, д. 173, г. Нальчик, 360004, Россия,

`e-mail:` bsk@rect.kbsu.ru

O.A. Repin and S.K. Kumykova

A nonlocal problem for a mixed-type equation whose order degenerates along the line of change of type

Abstract. We consider a mixed-type equation whose order degenerates along the line of change of type. For this equation we study the unique solvability of a nonlocal problem with Saigo operators in the boundary condition. We prove the uniqueness theorem under certain conditions (stated as inequalities) on known functions. To prove the existence of a solution to the problem, we equivalently reduce it to a singular integral equation with the Cauchy kernel. We establish a condition ensuring the existence of a regularizer which reduces the obtained equation to a Fredholm equation of the second kind, whose unique solvability follows from that of the problem.

Keywords: mixed-type equation, nonlocal problem, fractional integro-differentiation operators, singular integral equation with Cauchy kernel, Fredholm equation, regularizer, Dirichlet problem, Cauchy problem.

O.A. Repin

Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Econometrics,
Samara State Economic University,
141 Sovetskoi Armii str., Samara, 443090 Russia,

`e-mail:` Matstat@mail.ru

S.K. Kumykova

Associate Professor, Chair of Function Theory and Functional Analysis,
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo str., Nalchik, 360004 Russia,

`e-mail:` bsk@rect.kbsu.ru