УДК 519.2

КИБЕРНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИКЛИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

А.В. Зорин

Аннотация

Для построения математической модели процесса обслуживания конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов с переналадками применен подход Ляпунова–Яблонского. Для задания входных потоков с зависимыми интервалами между поступлением требований использовано нелокальное описание. Выделены и нелокально описаны блоки-схемы, информация, координаты и функция системы. Конструктивно задана многомерная цепь Маркова с несчетным измеримым пространством состояний, описывающая изменение состояния обслуживающего устройства, флуктуации длин очередей и состояние входных потоков. Установлены некоторые свойства полученного стохастического переходного ядра.

Ключевые слова: управляющая система, конфликтные входные потоки, неординарный рекуррентный поток, нелокальное описание, общая цепь Маркова.

Введение

Предложенное А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским в работе [1] понятие управляющей системы было призвано выявить общие закономерности устройства и реализации процессов управления в различных реальных объектах как в живой природе, так и в технике. В основе этого подхода лежит представление об управляющей системе как единстве схемы, координат, информации и функции. Схема управляющей системы содержит фиксированное число элементов или блоков, координаты описывают расположение блоков на схеме. Информация системы определяется набором состояний блоков, при этом возникает задача кодирования информации. Функция системы определяет действие, переводящее систему из одного состояния в другое во времени. Идея о представлении системы массового обслуживания как управляющей системы была выдвинута в работе [2]. В ней были сформулированы принципы, которые необходимо положить в основу определения, анализа и оптимизации моделей обслуживания:

– принцип дискретности функционирования управляющей системы: акты поступления требований, начала и окончания обслуживаний, поступления повторных вызовов и т. д. имеют место в дискретной временно́й шкале $\{\tau_i; i = 0, 1, \ldots\}$;

– принцип нелокального (неполного, интегрального) описания [3] поблочного строения управляющей системы: функционально-статистическое описание состояния блоков производится в выбранные моменты времени, достаточные для построения математической модели управляющей системы, но оно не обязано содержать состояния блоков между моментами наблюдений;

– принцип совместного рассмотрения поблочного строения управляющей системы и ее функционирования в дискретной временно́й шкале $\{\tau_i; i = 0, 1, \ldots\}$.

Систематическое применение кибернетического подхода к вероятностному моделированию, анализу и оптимизации различных систем массового обслуживания реализовано в работах [4–9].

1. Система обслуживания конфликтных неординарных рекуррентных потоков как управляющая система

Пусть в систему массового обслуживания поступают конфликтные независимые входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$, $m < \infty$. Требования каждого потока могут быть одного из двух типов: «быстрые» и «медленные». «Быстрые» требования могут образовывать группы, следующие за «медленными» требованиями. Поэтому в реальных потоках интервалы между требованиями, как правило, зависимы и разнораспределены. При этом статистический анализ реальных транспортных потоков [10, 11] позволяет предположить, что «медленные» требования образуют рекуррентный поток, а размеры групп независимы и одинаково распределены. Перейдем к нелокальному описанию потока Π_j: будем фиксировать только моменты поступления «медленных» требований, а входящие в одну группу с данным «медленным» требованием «быстрые» требования будем считать поступающими одновременно с ним. Таким образом, действительные моменты поступления части требований потока Π_j не наблюдаются. Нелокальное описание такого потока имеет вид неординарного рекуррентного потока. Пусть $a_j(t)$, $t \geqslant 0$, – общая плотность распределения интервалов между «медленными» требованиями, $f_j(b)$ – вероятность поступления в группе $b = 1, 2, \ldots$ требований по потоку Π_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j неограниченного объема. Обслуживание требований осуществляется единственным прибором с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживаются требования только из очереди O_j. В состоянии $\Gamma^{(2j)}$ требования не обслуживаются и осуществляется акт переналадки с целью разрешения конфликтности. Длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(r)}$ равна T_r, $r = 1, 2, \ldots, 2m$. Обслуживание конфликтных потоков осуществляется в классе циклических алгоритмов, то есть смена состояния обслуживающего устройства происходит по схеме $\ldots \to \Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \ldots \to \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)} \to \ldots$ Длительности обслуживания требований могут быть зависимыми величинами с различными законами распределения. Поэтому для нелокального, интегрального задания процесса обслуживания используем потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \ldots, \Pi_m^{\text{нас}}$. В состоянии прибора $\Gamma^{(2j-1)}$ поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ содержит ℓ_j требований, а при прочих состояниях – 0 требований. Требования из очереди O_j обслуживаются в порядке поступления.

Наглядной физической интерпретацией рассматриваемой системы обслуживания является перекресток автомагистралей, управляемый светофором-автоматом с фиксированным ритмом переключения.

В качестве дискретной временно́й шкалы моментов наблюдения за системой выберем моменты $\tau_0 = 0$, $\tau_1, \tau_2, \ldots$ смены состояний обслуживающего устройства. Определим схему конфликтной управляющей системы массового обслуживания, выявим информацию, функциональные и статистические связи между блоками. Схема системы представлена на рис. 1 и содержит следующие блоки: 1) внешняя среда (ВС) с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа – входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$; 3) входные полюса второго типа – потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \ldots, \Pi_m^{\text{нас}}$; 4) внешняя память – накопители $O_1, O_2, \ldots, O_m$; 5) устройства по переработке информации внешней памяти – устройства $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ по организации дисциплины очередей; 6) внутренняя память – обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство переработки информации во внутренней памяти – граф смены состояния обслуживающего устройства; 8) выходные полюса – выходные потоки $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \ldots, \Pi_m^{\text{вых}}$. Внешняя среда имеет одно состояние, обозначаемое $e^{(1)}$. Информация внешней среды состоит в текущем состоянии среды и кодируется одноэлементным множеством $\{e^{(1)}\}$. Множество состояний входного полюса Π_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, имеет вид $\{(b, t) \colon b = 0, 1, \ldots;\ t \geqslant 0\}$, где b обозначает

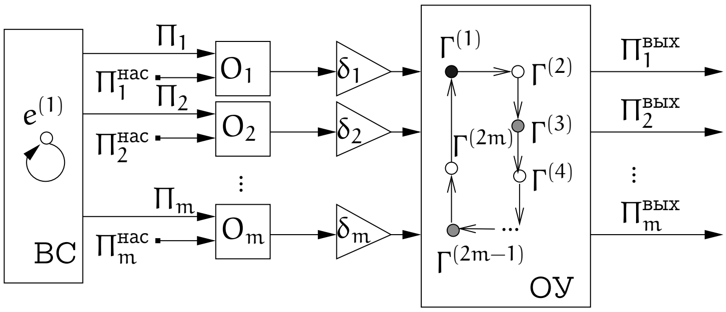

Рис. 1. Система обслуживания конфликтных потоков в классе циклических алгоритмов как управляющая система

число требований, поступивших по потоку Π_j на промежутке между двумя моментами наблюдения, а t – оставшееся время до поступления следующей группы требований в конце этого промежутка. Множество состояний входного полюса второго типа $\Pi_j^{\text{нас}}$ есть множество $\{0, 1, \ldots\}$ целых неотрицательных чисел. Информация блока O_j внешней памяти заключается в наличной длине очереди O_j и кодируется целым неотрицательным числом. Для кодирования информации внутренней памяти системы будем рассматривать множество $\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$ состояний обслуживающего устройства. Множество состояний выходного полюса $\Pi_j^{\text{вых}}$ есть множество $\{0, 1, \ldots\}$ целых неотрицательных чисел.

Пусть $\Gamma_0 \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\} = \Gamma$ есть состояние обслуживающего устройства в момент 0, $\Gamma_i \in \Gamma$ обозначает состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_{i-1}, \tau_i]$. Положим $r \oplus 1 = r + 1$ при $r < 2m$, $2m \oplus 1 = 1$. Определим отображение $v(\cdot)\colon \Gamma \to R$ равенством $v(\Gamma^{(r)}) = T_{r\oplus 1}$. Тогда последовательность моментов наблюдения порождается рекуррентным соотношением

$$\tau_{i+1} = \tau_i + v(\Gamma_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Пусть $\zeta_{j,i}$ – оставшееся время до поступления следующей после τ_i группы требований потока Π_j. Выберем $\nu_i = (\Gamma_i, \zeta_{j,i})$ в качестве метки требований потока Π_j, поступающих на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Пусть $\eta_{j,i}$ – число поступивших за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ требований потока Π_j, $\varphi_j(b, y; \gamma, t)$ – условная вероятность события $\eta_{j,i} = b$, $\zeta_{j,i+1} < y$ при условии $\Gamma_i = \gamma$, $\zeta_{j,i} = t$. Нелокальное описание входного полюса Π_j первого типа зададим условными распределениями

$$\{\varphi_j(b, \infty; \gamma, t); b = 0, 1, \ldots\}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad t \geqslant 0,$$

выделенной дискретной компоненты $\{\eta_{j,i}; i = 0, 1, \ldots\}$ маркированного точечного процесса

$$\{(\tau_i, \eta_{j,i}, \nu_i); i = 0, 1, \ldots\}.$$

Из предположения о вероятностной структуре входного потока Π_j следует, что интегральное преобразование

$$\sum_{b=0}^{\infty} \int_0^{\infty} z^b e^{-sy}\, d_y \varphi_j(b, y; \Gamma^{(r)}, t)$$

принимает вид $e^{-s(t - T_{r\oplus 1})}$ при $t > T_{r\oplus 1}$ и принимает вид

$$\int_0^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} (\widehat{f}_j(z))^{b+1} e^{-sy}\, d_y G_b(T_{r\oplus 1} - t, y)$$

при $t \geqslant T_{r\oplus 1}$, где

$$\widehat{f}_j(z) = \sum_{b=0}^{\infty} z^b f_j(b), \quad a_j^{*1}(t) = a_j(t), \quad a_j^{*(b+1)}(t) = \int_0^t a^{*b}(s) a_j(t-s)\, ds,\ b = 1, 2, \dots ,$$

а $G_b(t, y)$ принимает значение

$$\int_t^{t+y} a_j(s)\, ds \quad \text{при} \quad b = 0$$

и значение

$$\int_0^t a_j^{*b}(s) \Big(\int_{t-s}^{t+y-s} a_j(s_1)\, ds_1 \Big)\, ds \quad \text{при} \quad b = 1, 2, \dots$$

Для нелокального описания входного полюса $\Pi_j^{\text{нас}}$ второго типа выберем $\nu_i' = \Gamma_i$ в качестве метки требований потока насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Пусть $\xi_{j,i}$ – число требований потока насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Условное распределение $\overline{\varphi}_j(\cdot; \gamma)$ величины $\xi_{j,i}$ при фиксированном значении метки $\nu_i' = \gamma$ задается равенствами

$$\overline{\varphi}_j(\ell_j; \Gamma^{(2j-2)}) = \overline{\varphi}_j(0; \Gamma^{(r)}) = 1 \quad \text{при} \quad r \neq 2j - 2,$$

$$\overline{\varphi}_j(b; \gamma) = 0 \quad \text{в остальных случаях.}$$

Введем отображение $u(\cdot)\colon \Gamma \to \Gamma$ соотношением $u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(r \oplus +1)}$. Тогда динамика обслуживающего устройства описывается рекуррентным по $i = 0, 1, \dots$ соотношением

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i). \tag{1}$$

Пусть $\kappa_{j,i}$ задает состояние блока внешней памяти и число требований в очереди O_j. При экстремальной стратегии обслуживания изменение состояния внешней памяти происходит по закону

$$\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) и семейства условных распределений $\varphi_j(\cdot, \cdot; \gamma, y)$ и $\overline{\varphi}_j(\cdot; \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, $y \geqslant 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, задают функционально-статистическое описание состояния блоков управляющей системы и ее функционирования во времени. Функция данной управляющей системы – обслуживание конфликтных неординарных рекуррентных потоков по циклическому алгоритму с переналадками.

2. Построение вероятностной модели и ее свойства

Выберем в качестве основной анализируемой характеристики состояние обслуживающего устройства (внутреннюю память), длины очередей (внешнюю память) и метки входных полюсов. Введем множества

$$R_+^m = \{(t_1, t_2, \dots, t_m)\colon t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \dots, t_m \geqslant 0\},$$

$$S = \Gamma \times X \times R_+^m.$$

Пусть $\mathfrak{S}$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая множества вида $\{(\gamma, x, y)\colon y < y^1\}$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$, $y^1 \in R_+^m$. Неравенство $y < y^1$ и аналогичные ему здесь и далее понимаются поэлементно. Пусть $\overline{0} \in X$ – нулевой вектор из X. Используемые ниже при формулировании основных результатов работы математические понятия из теории общих цепей Маркова определены в [12, 13].

Теорема 1. *Пусть* $P_0(\cdot)$ *– распределение вероятностей на* $(S,\mathfrak{S})$. *Тогда существует вероятностное пространство* $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$, *на котором определена случайная последовательность* $\{(\zeta_i(\omega),\kappa_i(\omega),\eta_i(\omega),\xi_i(\omega),\Gamma_i(\omega); i=0,1,\ldots\}$ *с векторами* $\zeta_i(\omega)=(\zeta_{1,i}(\omega),\zeta_{2,i}(\omega),\ldots,\zeta_{m,i}(\omega))$, $\kappa_i(\omega)=(\kappa_{1,i}(\omega),\kappa_{2,i}(\omega),\ldots,\kappa_{m,i}(\omega))$, $\eta_i(\omega)==(\eta_{1,i}(\omega),\eta_{2,i}(\omega),\ldots,\eta_{m,i}(\omega))$, $\xi_i(\omega)=(\xi_{1,i}(\omega),\xi_{2,i}(\omega),\ldots,\xi_{m,i}(\omega))$, *так что:*

1) *для* σ*-алгебры* $\widehat{\mathfrak{F}}_i$, *порожденной набором случайных элементов* $\Gamma_0(\omega)$, $\kappa_0(\omega)$, $\eta_t(\omega)$, $\xi_t(\omega)$, $\zeta_t(\omega)$, $t=0,1,\ldots,i-1$, *и* $\zeta_i(\omega)$ *вариант условной вероятности* $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i(\omega)=b^1,\xi_i(\omega)=b^2,\zeta_{i+1}(\omega)<y\}|\widehat{\mathfrak{F}}_i)$ $\mathbf{P}$*-почти наверное имеет вид*

$$\prod_{j=1}^{m}\overline{\varphi}_j(b_j^2;\Gamma_i(\omega))\times\varphi_j(b_j^1,y_j;\Gamma_i(\omega),\zeta_i(\omega)); \tag{3}$$

2) *выполняются рекуррентные соотношения* (1), (2) *между случайными элементами* $\kappa_{j,i}(\omega)$, $\eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i}(\omega)$ *и* $\Gamma_{i+1}(\omega)$, $\kappa_{j,i+1}(\omega)$;

3) *вектор* $(\Gamma_0(\omega),\kappa_0(\omega),\zeta_0(\omega))$ *имеет распределение* $P_0(\cdot)$. *При этом последовательность*

$$\{(\Gamma_i(\omega),\kappa_i(\omega),\zeta_i(\omega)); i=0,1,\ldots\} \tag{4}$$

является однородной общей цепью Маркова с переходной вероятностью $\widetilde{P}(\cdot,\cdot)\colon S\times\mathfrak{S}\to[0,1]$, *определяемой на паре* $(\Gamma^{(r)},x,y^0)\in S$, $\{(\Gamma^{(s)},w,y)\colon y<y^1\})\in\mathfrak{S}$ *формулами*

$$\sum_{b=0}^{\ell_j-x}\varphi_j(b,y_j^1;r,y_j^0)\prod_{l\neq j}\varphi_l(w_l-x_l,y_l^1;r,y_l^0)\quad \text{для}\ \ r=2j-2,\quad s=r\oplus 1,\quad w=\overline{0};$$

$$\varphi_j(w_j+\ell_j-x_j,y_j^1;r,y_j^0)\prod_{l\neq j}\varphi_l(w_l-x_l,y_l^1;r,y_l^0)\quad \text{для}\ \ r=2j-2,\quad s=r\oplus 1,\quad w\neq\overline{0};$$

$$\prod_{l=1}^{m}\varphi_l(w_j-x_j,y_l^1;r,y_l^0)\quad \text{для}\ \ r\neq 2j-2,\quad s=r\oplus 1;$$

значением 0 *в остальных случаях. В пространстве состояний* S *содержится* $2m$*-цикл* $\{E_r\colon r=0,1,\ldots,2m-1\}$ *с* $E_r=\{(\Gamma^{(r+1)},x,y)\colon x\in X; y\in R_+^m\}$.

Доказательство. Мера $P_0(\cdot)$ по условию теоремы определена на измеримом пространстве $(S,\mathfrak{S})$. Рассмотрим вспомогательное измеримое пространство $(\widehat{\Omega},\widehat{\mathfrak{F}})$ с $\widehat{\Omega}=X\times X\times R_+^m$, σ-алгеброй $\widehat{\mathfrak{F}}$ подмножеств $\widehat{\Omega}$, порожденной множествами

$$\{(x^1,x^2,y)\colon y<y^1\},\quad x^1,\,x^2\in X,\quad y^1\in R_+^m.$$

Пусть $i=1,2,\ldots$ и выбраны точки $\omega_0=(\gamma_0,x^0,y^0)\in S$, $\omega_1=(b^0,\overline{b}^0,y^1)\in\widehat{\Omega}$, $\ldots$, $\omega_{i-1}=(b^{i-2},\overline{b}^{i-2},y^{i-1})\in\widehat{\Omega}$. Положим для $t=0,1,\ldots,i-2$ и $j=1,2,\ldots,m$

$$\gamma_{t+1}=u(\gamma_t),\quad x_j^{t+1}=\max\{0,x_j^t+b_j^t-\overline{b}_j^t\}. \tag{5}$$

Определим вероятностную меру $P_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1};\cdot)$ на измеримом пространстве $(\widehat{\Omega},\widehat{\mathfrak{F}})$ соотношением

$$P_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1};\{(b^{i-1},\overline{b}^{i-1},y)\colon y<y^i\})=\\=\prod_{j=1}^{m}\varphi_j(b_j^{i-1},y_j^i;\gamma_{i-1},y_j^{i-1})\overline{\varphi}_j(\overline{b}_j^{i-1};\gamma_{i-1}). \tag{6}$$

По теореме И. Тулчи [14] существует единственная вероятностная мера $\mathbf{P}$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$ с $\Omega = S \times \widehat{\Omega} \times \widehat{\Omega} \times \cdots$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S} \otimes \widehat{\mathfrak{F}} \otimes \widehat{\mathfrak{F}} \otimes \cdots$ такая, что для произвольных $A_0 \in \mathfrak{S}$, $A_1 \in \widehat{\mathfrak{F}}$, $A_2 \in \widehat{\mathfrak{F}}$, $\ldots$, $A_i \in \widehat{\mathfrak{F}}$

$$\mathbf{P}(\{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots)\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\}) = \\ = \int\limits_{A_0} P_0(d\omega_0) \int\limits_{A_1} P_1(\omega_0; d\omega_1) \cdots \int\limits_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; d\omega_i).$$

Введем координатные случайные элементы $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$, $\kappa_0(\omega) = x^0$, $\zeta_i(\omega) = y^i$, $\eta_i(\omega) = b^i$, $\xi_i(\omega) = \overline{b}^i$, $i = 0, 1, \ldots$. Пусть, далее, $\Gamma_i(\omega) = \gamma_i$, $\kappa_i(\omega) = x^i$, где γ^i и x^i определены в (5). Тогда вероятностная мера $P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \cdot)$ есть вариант условного распределения вероятностей случайного вектора $(\eta_i(\omega), \xi_i(\omega), \zeta_{i+1}(\omega))$ относительно σ-алгебры $\widehat{\mathfrak{F}}_i$ [14, с. 234]. Утверждение 1) теоремы доказано.

Далее, из соотношений (1), (2) следует равенство в событиях

$$\{\omega\colon \Gamma_{i+1}(\omega) = \gamma, \kappa_{i+1}(\omega) = w, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} = \\ = \bigcup_{b^1 \in X} \bigcup_{b^2 \in X} \big(\{\omega\colon \eta_i(\omega) = b^1, \xi_i(\omega) = b^2, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} \bigcap \\ \bigcap \{\omega\colon \gamma = u(\Gamma_i(\omega)), w_j = \max\{\kappa_{j,i}(\omega) + b_j^1 - b_j^2, 0\},\ j = 1, 2, \ldots, m\}\big). \quad (7)$$

Отсюда, пользуясь свойствами условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно σ-алгебр, находим

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}(\omega) = \gamma, \kappa_{i+1}(\omega) = w, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} | \widehat{\mathfrak{F}}_i) = \\ = \sum_{b^1 \in X} \sum_{b^2 \in X} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i(\omega) = b^1, \xi_i(\omega) = b^2, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} | \widehat{\mathfrak{F}}_i) \times \\ \times I(\{\omega\colon \gamma = u(\Gamma_i(\omega)), w_j = \max\{\kappa_{j,i}(\omega) + b_j^1 - b_j^2, 0\},\ j = 1, 2, \ldots, m\}). \quad (8)$$

Обозначим через $I(A) = I(\omega, A)$ индикатор события $A \in \mathfrak{F}$. Правая часть равенства (8) также может быть записана в виде

$$\sum_{b^1 \in X} \sum_{b^2 \in X} \prod_{j=1}^{m} \varphi_j(b_j^1, y_j; \Gamma_i(\omega), \zeta_{j,i}(\omega)) \times \overline{\varphi}_j(b_j^2; \Gamma_i(\omega)) \times I(\{\omega\colon \gamma = u(\Gamma_i(\omega))\}) \times \\ \times I(\{\omega\colon w_j = \max\{\kappa_{j,i}(\omega) + b_j^1 - b_j^2, 0\},\ j = 1, 2, \ldots, m\}). \quad (9)$$

Из равенства (7) индукцией по $i = 0, 1, \ldots$ легко установить $\widehat{\mathfrak{F}}_i$-измеримость вектора $(\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega), \zeta_i(\omega))$. В силу «телескопического» свойства условных математических ожиданий относительно σ-алгебр

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}(\omega) = \gamma, \kappa_{i+1}(\omega) = w, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} | \Gamma_i, \kappa_i, \zeta_i) = \\ = \mathbf{M}\big[\,\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}(\omega) = \gamma, \kappa_{i+1}(\omega) = w, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} | \widehat{\mathfrak{F}}_i)\ \big| \Gamma_i, \kappa_i, \zeta_i\big]. \quad (10)$$

Но условная вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}(\omega) = \gamma, \kappa_{i+1}(\omega) = w, \zeta_{i+1}(\omega) < y\} | \widehat{\mathfrak{F}}_i)$$

оказывается (в силу (9)) измеримой функцией от $(\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega), \zeta_i(\omega))$, поэтому условная вероятность в левой части равенства (10) также $\mathbf{P}$-почти наверно имеет вид (9). Можем заключить, что последовательность (4) является общей цепью Маркова. Вид переходной вероятности $\widetilde{P}(\cdot, \cdot)$ следует из соотношения (9). $\square$

Содержательный смысл теоремы 1 заключается в следующем: функционально-статистическое описание блоков рассматриваемой управляющей системы является замкнутым, так что существует вероятностное пространство, на котором заданы соответствующие случайные величины и случайные элементы. Заметим, что при построении описаний ω элементарных исходов было использовано кодирование информации блоков системы.

Следующие теоремы 2 и 3 выявляют свойства переходной вероятности $\widetilde{P}(\cdot,\cdot)$, играющие важную роль при изучении предельных свойств общей цепи Маркова (4). Будем называть множество $\{(\gamma,x,y)\colon y\in R_+^m\}\in\mathfrak{S}$ для краткости и образности (γ,x)-слоем, $\gamma\in\Gamma$, $x\in X$.

Теорема 2. *Пусть для каждого $j=1,2,\dots,m$ существует $t_j^0>0$ такое, что $a_j(t)=0$ при $t<t_j^0$, $a_j(t)>0$ при $t\geqslant t_j^0$, $f_j(1)>0$. Введем меру $\vartheta(\cdot)$ на $(S,\mathfrak{S})$ соотношением $\vartheta\{(\Gamma^{(s)},w,y)\colon y<y^1\}=y_1^1y_2^1\times\ldots\times y_m^1$ при $s=1$, $w=\overline{0}$, $y^1\in R_+^m$, и значением 0 в остальных случаях. Тогда стохастическое ядро $\widetilde{P}$ ϑ-неприводимо.*

Доказательство. Зафиксируем начальное состояние $\Gamma_0(\omega)=\Gamma^{(r)}$, $\kappa_0(\omega)=x$, $\zeta_0(\omega)=y^0$, $(\Gamma^{(r)},x,y^0)\in S$ и множество $A=\{(\Gamma^{(1)},\overline{0},y)\colon y\in B\}$ в $(\Gamma^{(1)},\overline{0})$-слое с измеримым по Борелю «основанием» $B\subset R_+^m$. Пусть поступление ожидаемой группы требований по потоку Π_j должно произойти на i_j^0-м шаге общей цепи Маркова (4), при этом за время y_j^0, оставшееся до поступления новой группы требований потока Π_j, успеет обслужиться b_j требований из очереди O_j. Непосредственно перед поступлением группы требований потока Π_j длина очереди O_j составит $x_j^1=(x_j-b_j)$ требований. С положительной вероятностью $f_j(1)$ после поступления этой группы размер очереди O_j составит x_j^1+1. Пусть, наконец, от момента поступления этой группы до следующего переключения прибора из состояния $\Gamma^{(1)}$ в состояние $\Gamma^{(2)}$ остается время t_j^1 и число тактов i_j^1. Выберем натуральное число i_j^2 из условий:

$$
\begin{gathered}
i_j^2>x_j^1/\ell_j,\quad t_j^1+i_j^2(T_1+T_2+\cdots+T_{2m})>t_j^0,\quad j=1,2,\dots,\\
i_1^0+i_1^1+i_1^2=i_2^0+i_2^1+i_2^2=\cdots=i_m^0+i_m^1+i_m^2.
\end{gathered}
$$

Введем в рассмотрение область

$$
\begin{aligned}
B'=\{(u_1,u_2,\dots,u_m)\colon (u_1-t_1^1+i_1^2(T_1+T_2+\cdots+T_{2m}),&\\
u_2-t_2^1+i_2^2(T_1+T_2+\cdots+T_{2m}),\dots,&\\
u_m-t_m^1+i_m^2(T_1+T_2+\cdots+T_{2m}))\in B\}\subset R_+^m.&
\end{aligned}
$$

Из предположения теоремы о неотрицательности плотностей $a_j(u)$ находим, что существует положительная вероятность

$$
\int\limits_{B'}\cdots\int a_1(u_1)a_2(u_1)\cdots a_m(u_m)\,du_1du_2\cdots du_m
$$

одновременного поступления второй группы требований по каждому потоку Π_j, $j=1,2,\dots,m$, так что через $i=i_1^0+i_1^1+i_1^2$ шагов будем иметь $\Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(1)}$, $\kappa_i(\omega)=\overline{0}$, $\zeta_i(\omega)\in B$. Тем самым ϑ-неприводимость доказана. □

Поскольку σ-алгебра $\mathfrak{S}$ является счетно-порожденной, из ϑ-неприводимости переходной вероятности $\widetilde{P}$ следует существование так называемых минорантных множеств [12, 13]. Сформулируем определения минорантного множества применительно к нашим обозначениями. Обозначим

$$C_0(r,x,y)=\{\omega\colon \Gamma_0(\omega)=\Gamma^{(r)},\kappa_0(\omega)=x,\zeta_0(\omega)=y\}.$$

Множество $A\in\mathfrak{S}$ называется минорантным, если существует нетривиальная мера $\vartheta_1(\cdot)$ на $(S,\mathfrak{S})$ и натуральное число i такие, что для всех $(\Gamma^{(r)},x,y)\in A$ и всех $B\in\mathfrak{S}$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon (\Gamma_i(\omega),\kappa_i(\omega),\zeta_i(\omega))\in B\}|C_0(r,x,y))\geqslant\vartheta_1(B). \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть для каждого $j=1,2,\dots,m$ число t_j^0 и плотность $a_j(t)$ удовлетворяют предположениям теоремы 2, $a_j(t)$ – непрерывная функция для всех $t>t_j^0$. Тогда каждое множество вида $\{(\Gamma^{(r)},x,y)\colon \overline{0}\leqslant y^1\leqslant y<y^2\}$, $\Gamma^{(r)}\in\Gamma$, $x=0,1,\dots$, с достаточно малым $\max\{y_1^2-y_1^1,\, y_2^2-y_2^1,\dots,\, y_m^2-y_m^1\}$ является минорантным для стохастического ядра $\widetilde{P}$.*

Доказательство. Зафиксируем начальное состояние $(\Gamma^{(r)},x,y)$, $y_1\leqslant y<y_2$. Рассмотрим интервалы на положительной оси, образованные точками 0, $T_{r\oplus1}$, $T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}$, $T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+T_{r\oplus3}$, … Пусть i_j – номер интервала, содержащего число y_j. «Малость» величины

$$\max\{y_1^2-y_1^1,y_2^2-y_2^1,\dots,y_m^2-y_m^1\}$$

будем понимать в том смысле, что i_j-й интервал содержит целиком полуинтервал $[y_j^1,y_j^2)$. Выберем теперь число i из условия

$$y_j^2+t_j^0\leqslant T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+\ldots+T_{r\oplus i},\quad j=1,2,\dots,m.$$

Рассмотрим событие следующего вида: одновременно для всех $j=1,2,\dots,m$ поступившая по потоку Π_j группа на i_j-м такте, то есть спустя время y_j, содержит единственное требование, оставшееся время s_j^1 до поступления следующей группы по потоку Π_j удовлетворяет условию

$$T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}-\Delta\leqslant y_j+s_j^1\leqslant T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}$$

для достаточно малого Δ, эта группа также состоит из единственного требования, а следующая группа требований потока Π_j поступает через время s_j^2 такое, что

$$t_j^0+\Delta\leqslant s_j^2-(T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}-y_j-s_j^1)\leqslant t_j^0+\Delta+y_j^3.$$

При осуществлении данного составного события будут иметь место равенства

$$\eta_{j,0}(\omega)=\eta_{j,1}(\omega)=\dots=\eta_{j,i_j-2}(\omega)=0\quad\text{при}\quad i_j>1,$$
$$\eta_{j,i_i}(\omega)=\dots=\eta_{j,i}(\omega)=0,\quad \eta_{j,i_j-1}(\omega)=\eta_{j,i}(\omega)=1.$$

Значения величин $\xi_{j,0}(\omega),\,\xi_{j,1}(\omega),\dots,\xi_{j,i}(\omega)$ определяются последовательностью состояний $\Gamma^{(r\oplus1)},\,\Gamma^{(r\oplus2)},\dots,\Gamma^{(r\oplus i)}$ обслуживающего устройства. Значит, равенствами (2) вполне определены значения $w_j=\kappa_{j,i+1}(\omega)$, $j=1,2,\dots,m$. Кроме того, будет иметь место равенство

$$\zeta_{j,i+1}(\omega)=s_j^2-(T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}-y_j-s_j^1).$$

Обозначим $t_j^\Delta=t_j^0+\Delta$, $y_j^4=T_{r\oplus1}+T_{r\oplus2}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}-y_j$. По свойству монотонности вероятности имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}(\omega)=\Gamma^{(r\oplus(i+1))},\kappa_{i+1}(\omega)=w,t^\Delta\leqslant\zeta_{i+1}(\omega)<t^\Delta+y^3\}|C_0(r,x,y))\geqslant$$

$$\geqslant \prod_{j=1}^{m} (f_j(1))^2 \int\limits_{y_j^4-\Delta}^{y_j^4} \Bigg(\int\limits_{t_j^\Delta+y_j^4-s_1}^{y_j^3+t_j^\Delta+y_j^4-s_1} a_j(s_2)\, ds_2 \Bigg) a_j(s_1)\, ds_1 \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{j=1}^{m} (f_j(1))^2 \delta_j \int_0^\Delta \Bigg(\int\limits_{t_j^0+s_1}^{y_j^3+t_j^0+s_1} a_j(s_2)\, ds_2 \Bigg) ds_1,$$

где вследствие непрерывности и положительности $a_j(t)$ при $t > t_j^0$

$$\delta_j = \min_{\substack{t \geqslant T_{r\oplus 1}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}-\Delta-y_j^2 \\ t \leqslant T_{r\oplus 1}+\dots+T_{r\oplus(i+1)}-y_j^1}} a_j(t) > 0.$$

Определим функцию $\vartheta_1(B)$ на подмножествах

$$B = \{(\Gamma^{(r\oplus(i+1))}, w, \widetilde{y})\colon \overline{0} \leqslant \widetilde{y} < y^3\}, \quad y^3 \in R_+^m$$

$(\Gamma^{(r\oplus(i+1))}, w)$-слоя с m-мерными параллелепипедами в основании следующим образом. Пусть $\vartheta_1(B)$ принимает значение 0, если $y_j^3 \leqslant t_j^0$ при некотором $j = 1, 2, \dots, m$. Пусть, далее, $\vartheta_1(B)$ принимает значение

$$\prod_{j=1}^{m} (f_j(1))^2 \delta_j \int\limits_0^\Delta \Bigg(\int\limits_{t_j^0+s_1}^{y_j^3+t_j^0+s_1} a_j(s_2)\, ds_2 \Bigg) ds_1,$$

если $y_j^3 > t_j^0$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Доопределим $\vartheta_1(B)$ нулевым значением, если B принадлежит любому другому слою. Такая функция ϑ_1 однозначно определяет меру на $(S, \mathfrak{S})$. Сохраняя символ ϑ_1 и для этой меры, получаем, что неравенство (11) выполняется для произвольного множества $B \in \mathfrak{S}$. $\square$

Работа выполнена в рамках фундаментальной НИР «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных систем и процессов принятия решений» (№ госрегистрации 01201456585) и государственной программы «Поддержка ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров».

Summary

A. V. Zorine. A Cybernetic Model of Cyclic Control of Conflicting Flows with an After-Effect.

The Lyapunov–Yablonsky approach has been used to construct a mathematical model of the service process of conflicting input flows in the class of cyclic algorithms with re-adjustments. To define input flows with dependent inter-arrival intervals, a non-local description has been used. The flowcharts, information, coordinates, and function of the queueing system have been selected and described non-locally. A multi-dimensional Markov chain has been constructed with an uncountable measurable state space, which describes changes in the server state, fluctuations in the queue size, and states of the input flows. Some properties of the stochastic transition kernel have been established.

Keywords: controlling system, conflicting input flows, non-ordinary recurrent flow, non-local description, general Markov chain.

Литература

1. *Ляпунов А.А., Яблонский С.В.* Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. – М.: Физматгиз, 1963. – Вып. 9. – С. 5–22.

2. *Федоткин М.А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики: Сб. ст. / Под ред. С.В. Яблонского. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – Вып. 6. – С. 51–70.

3. *Федоткин М.А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики: Сб. ст. / Под ред. С.В. Яблонского. – М.: Наука, 1998. – Вып. 7. – С. 333–344.

4. *Зорин А.В., Федоткин М.А.* Система с разделением времени в условиях изменения структуры обслуживающего устройства и структуры входных потоков. – Н. Новгород, 2003. – Деп. в ВИНИТИ 19.09.03. № 1704-В2003.

5. *Зорин А.В.* Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVI Междунар. конф. (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Н. Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 2011. – С. 179–183.

6. *Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В.* Управляющие системы и механизм образования транспортных пачек на магистралях с интенсивным движением // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVI Междунар. конф. (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Н. Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 2011. – С. 503–507.

7. *Федоткин М.А., Рачинская М.В.* Исследование математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова – Яблонского // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVI Междунар. конф. (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Н. Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 2011. – С. 508–512.

8. *Федоткин М.А., Федоткин А.М.* Кибернетический подход к изучению выходных процессов управления потоками Бартлетта //Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVI Междунар. конф. (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Н. Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 2011. – С. 512–516.

9. *Zorine A.V.* Stability of a tandem of queueing systems with Bernoulli noninstantenous transfer of customer // Theor. Probability and Math. Statist. – 2012. – No 84. – P. 173–188.

10. *Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A.* Parameters estimator of the probabilistic model of batches traffic flow with the non-intensive movement // Distributed computer and communication networks: control, computation, communication. – M.: Техносфера, 2013. – С. 357–364.

11. *Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В.* Оценка параметров вероятностной модели интенсивного транспортного потока // Distributed computer and communication networks: control, computation, communication. – М.: Техносфера, 2013. – С. 373–378.

12. *Нуммелин Э.* Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. – М.: Мир, 1989. – 207 с.

13. *Meyn S.P., Tweedie R.L.* Markov chains and stochastic stability. – London: Springer-Verlag, 1993. – 566 p.

14. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1969. – 310 с.

Поступила в редакцию
06.08.14

Зорин Андрей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной теории вероятностей, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

E-mail: *zoav1602@gmail.com*