УДК УДК 539.3:534.1

О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ КОЛЕБАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Н. Данилин

Аннотация

Рассмотрены нестационарные колебания механических систем с демпферами гистерезисного типа. Для описания гистерезиса предложен феноменологический подход, который демонстрируется на задаче о вынужденных колебаниях гасителя пляски проводов воздушных линий электропередачи. В соответствии с этим подходом силовые и кинематические параметры механической системы связываются обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Правая часть уравнения подбирается из класса функций, обеспечивающих асимптотическое приближение решения к кривым объемлющего (предельного) гистерезисного цикла установившихся колебаний. Идентификация коэффициентов уравнения осуществляется по экспериментальным данным для объемлющего цикла. Предлагаемый подход позволяет описать траекторию гистерезиса в условиях нестационарных колебаний, оценивать эффективность устройств демпфирования и подбирать частотные диапазоны их применения.

Ключевые слова: нестационарные колебания, демпферы, гистерезис энергорассеяния, кинематический подход, объемлющий цикл, идентификация параметров.

Установление зависимости, определяющей форму петли гистерезиса, выражает соответствующую гипотезу диссипации энергии [1]. Широкое распространение получила гипотеза Фойгхта [2, 3], в соответствии с которой рассеяние энергии зависит от частоты процесса деформирования системы. Физически обоснованными являются модель Н.Н. Давиденкова и модель гистерезиса трения без возвращающей силы [4–6], описывающие диссипацию энергии в упругопластических материалах. Подробный обзор с анализом различных моделей гистерезиса и методов идентификации его параметров для нелинейных механических колебательных систем содержится, например, в работе Н.П. Плахтиенко [7].

В работе [8] предлагается подход, основанный на использовании данных серии типовых экспериментов по построению опорных кривых нагружения, которые используются далее в качестве своеобразной криволинейной координатной сетки, позволяющей моделировать траекторию гистерезиса в условиях нестационарных колебаний.

В настоящей работе для описания гистерезиса предлагается дифференциальный подход, названный кинематическим, согласно которому силовые (f) и кинематические (q) параметры связываются специальным дифференциальным уравнением первого порядка $df(q)/dq = R(q, f)$, правая часть которого подбирается из класса функций, обеспечивающих асимптотическое приближение решения к кривым предельного цикла. Предлагаемый подход позволяет описать траекторию гистерезиса с произвольной точкой старта внутри области предельного цикла.

1. Модель гистерезиса

Для описания гистерезиса при нестационарных колебаниях механической системы предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в виде

$$\frac{df}{dq} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}, \tag{1}$$

где коэффициенты C_{ij} определяются методами приближения на основе минимизации невязки аналитического представления $R(q, f)$ к множеству значений $\{df/dq\}$, полученных из экспериментов для предельного цикла. Числа k и m подбираются в результате простых численных экспериментов. Значения этих параметров определяют характер (скорость) асимптотического приближения решения с начальной точкой (q_0, f_0) к кривым предельного цикла.

Пусть в результате экспериментальных измерений получена последовательность точек (q_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$. Для построения $\{q_i, (df/dq)_i\}$ можно воспользоваться конечно-разностным выражением $(f_i - f_{i-1})/(q_i - q_{i-1})$. Таким способом пользоваться нельзя, если экспериментальных точек мало или если измеряемые величины имеют сильный разброс своих значений. Однако можно предварительно получить аналитическую аппроксимацию $f(q)$ по измеренным значениям, например, методом наименьших квадратов. Дифференцирование полученной зависимости даст искомую производную (df/dq).

В соответствии с методом наименьших квадратов вводится функция невязки $F = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[R(q_i, f_i) - f_i'\right]^2$, где $f_i' = (df/dq)_i$. Минимизация F приводит к системе алгебраических уравнений относительно величин C_{ij}

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} a_{ijpq} = b_{pq},$$

где

$$a_{ijpq} = \sum_{l=1}^{n} q_l^{i+p-2} f_l^{j+q-2}, \quad b_{pq} = \sum_{l=1}^{n} q_l^{p-1} f_l^{q-1} f_l', \quad p = 1, \ldots, k, \quad q = 1, \ldots, m.$$

Уравнение (1) должно быть включено в общую систему уравнений, описывающих движение механической системы, с учетом зависимости от параметра времени t. В этой связи целесообразно перейти в левой части (1) от производной f по обобщенной координате $q(t)$ к производной f по t, используя связь $df/dq = (df/dt)(dt/dq)$. Подстановка последнего соотношения в левую часть (1) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{df}{dt} = \frac{dq}{dt} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}. \tag{2}$$

Знак множителя dq/dt определяет направление движения по траектории гистерезиса (процессы «нагрузки» и «разгрузки»).

2. Гаситель низкочастотных колебаний

В качестве примера использования предложенного подхода рассмотрены вынужденные низкочастотные колебаний гасителя маятникового типа (TDD – Torsional Damper and Detuner). Такие гасители используются, например, для подавления

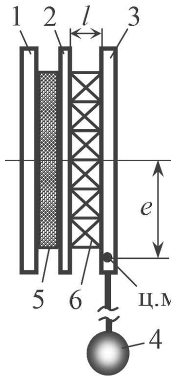

Рис. 1. Упрощенная схема гасителя

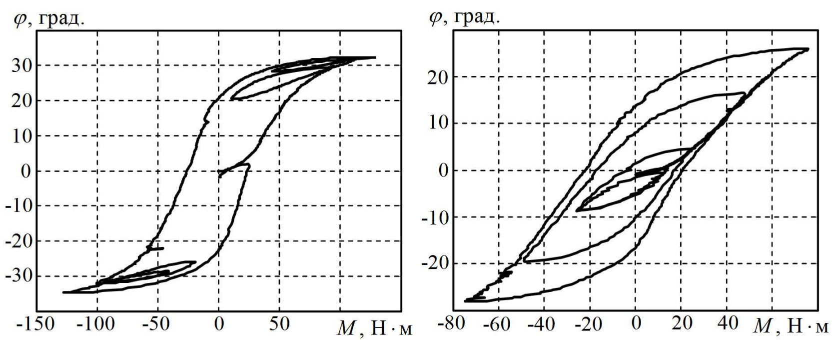

Рис. 2. Примеры экспериментальных зависимостей

и расстраивания низкочастотных колебаний проводов воздушных линий электропередачи [8, 9]. Упрощенная схема гасителя показана на рис. 1.

Основными элементами конструкции гасителя являются диски 1, 2 и 3. Диски 1 и 2 имеют общую центральную ось, позволяющую им вращаться друг относительно друга. К диску 3 крепится маятник 4. Диски 2 и 3 соединяются друг с другом через упругую вставку 6. Диск 1 скрепляется (подвешивается) к элементам конструкции, колебания которой необходимо демпфировать. Этот диск для остальной части элементов гасителя являются ведущим. Диск 2 является ведомым. Между дисками 1 и 2 помещаются элементы 5, препятствующие свободному вращению дисков относительно друг друга. Такими элементами могут быть, например, эластомерные шарики. Возможны также иные конструктивные варианты демпферных узлов. Можно также использовать в качестве рабочего тала электро- или магнитореологические жидкости, которые при относительном вращении дисков перетекают по специальным каналам, где помещены источники поля. Физические поля локально воздействуют на жидкость, увеличивая ее вязкость в зоне воздействия и, как следствие, увеличивая силы сопротивления течению.

Если φ_1, φ_2 – углы поворотов соответственно ведущего 1 и ведомого 2 дисков, то момент $M(\varphi_2-\varphi_1)$ порождается в результате взаимодействия этих дисков через систему демпфирования 5. Зависимость $M(\varphi_2-\varphi_1)$ формулируется в результате экспериментальных исследований. Примеры экспериментальных зависимостей, соответствующих двум различным программам нагружения демпферного узла, показаны на рис. 2 [8].

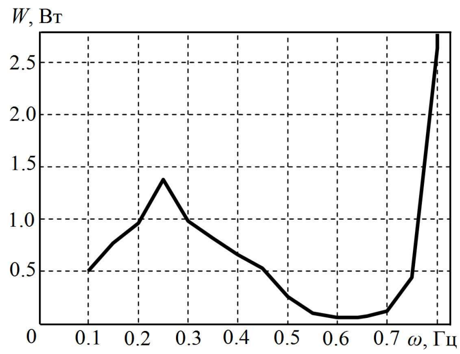

Рис. 3. Зависимость мощности рассеяния энергии от частоты при квазистатическом увеличении частоты гармонических колебаний ведущего диска

Анализ экспериментальных данных позволяет представить зависимость $M(\varphi)$ в виде непрерывной ломаной кривой, состоящей из гладких участков (ветвей), формирующих петлеобразную траекторию внутри предельного цикла. Ветви зависимости $M(\varphi)$ образуют два множества, соответствующие процессам «нагрузки» и «разгрузки». Считается, что в каждом множестве ветви подобны между собой в асимптотическом смысле, то есть каждая из них асимптотически приближается с ростом или уменьшением φ к соответствующим кривым предельного цикла. Зависимость $M(\varphi)$, удовлетворяющая указанным свойствам, строится с использованием уравнения (1).

Мощность энергорассеяния TDD определяется по формуле

$$A = \frac{1}{t} \cdot \int\limits_t M_t \, \dot{\alpha} \, dt.$$

При исследовании нестационарных колебаний это выражение удобно представить в дифференциальной форме и включить вместе с (2) в систему уравнений динамики. Дифференцирование по времени дает $t \cdot \dot{A} + A = M_t \dot{\alpha}$, откуда следует дифференциальное уравнение $dA/dt = 1/t \cdot (M_t \dot{\alpha} - A)$, решение которого имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую мощности рассеяния при установившихся вынужденных колебаний.

Отметим, что число удерживаемых членов в суммах $R(q, f)$ порождает множество альтернативных видов правой части уравнения (1). В результате интегрирования каждого уравнения получаются кривые, аппроксимирующие данные, полученные из эксперимента. Выбираются такие правые части, которые обеспечивают наибольшее приближение решения (1) к экспериментальным данным и по виду наиболее просты.

Ниже представлены результаты анализа эффективности энергорассеяния гасителя низкочастотных колебаний с маятником длиной $l = 0.6$ м и грузом $m = 12$ кг на его конце. Масса и момент инерции ведомого диска принимались соответственно равными $m_0 = 1.15$ кг и $I_0 = 0.004$ кг$\cdot$м^3. На рис. 3 показана зависимость мощности рассеяния энергии от частоты при квазистатическом увеличении частоты гармонических колебаний ведущего диска от 0 до 0.8 Гц при амплитуде $\Phi = 0.3$ рад. Пример гистерезисной зависимости $M(\varphi)$ показан на рис. 4.

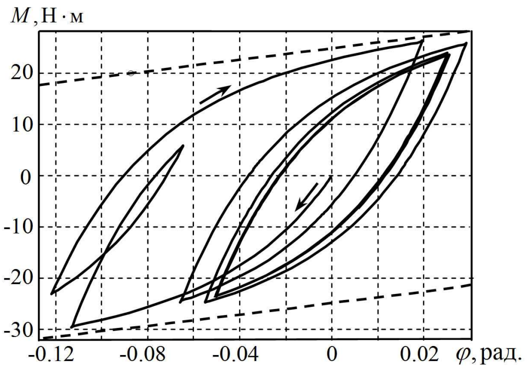

Рис. 4. Пример гистерезисной зависимости

Заключение

В работе предложена математическая модель для описания гистерезиса различных физических зависимостей, в том числе диаграмм деформирования при нестационарных колебаниях механических систем. В качестве определяющего физического соотношения используется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка со специальной правой частью, обеспечивающей асимптотическое приближение искомой зависимости к предельным кривым, известным из экспериментов. Коэффициенты в правой части определяются методами приближения, минимизируя невязку аналитического представления к множеству значений, полученных из экспериментов для предельного цикла.

Разработанный подход может быть использован при решении различных задач о нестационарных колебаниях различных конструкций и механизмов с гистерезисным характером рассеяния энергии [9, 10]. Подход может оказаться полезным и при решении задач об упругопластическом или циклическом деформировании различных материалов и конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-19-01653).

Summary

A.N. Danilin. On the Modeling of Hysteretic Oscillations of Mechanical Systems.

The paper considers nonstationary vibrations of mechanical systems with hysteretic dampers. To describe the hysteresis, a phenomenological approach is suggested, which is demonstrated on the problem of forced vibrations produced by the antigalloping device used for protection of power transmission lines. In accordance with this approach, the force and kinematic parameters of the mechanical system are correlated via the first-order ordinary differential equation. The right-hand part of the equation is chosen from the class of functions that ensure the asymptotic approximation of the solution to the curves of the enveloping (boundary) hysteretic cycle of steady-state vibrations. Identification of the equation coefficients is carried out based on experimental data for the enveloping cycle. The proposed approach allows us to describe the trajectory of hysteresis under the conditions of nonstationary vibrations, as well as to evaluate the effectiveness of damping devices and to select the frequency ranges of their application.

Keywords: nonstationary vibrations, dampers, energy dissipation hysteresis, kinematic approach, enveloping cycle, identification of parameters.

Литература

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 271 с.
2. *Рейнер М.* Реология / Пер. с англ. – М.: Наука, 1965. –224 с.
3. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
4. *Давиденков Н.Н.* О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. – 1938. – Т. 8, № 6. – С. 15–21.
5. *Писаренко Г.С.* Рассеяние энергии при механических колебаниях. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 436 с.
6. *Лебедев А.Б.* Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // Физика твердого тела. – 1999. – Т. 41, Вып. 7. – С. 1214–1222.
7. *Плахтиенко Н.П.* Методы идентификации нелинейных механических колебательных систем // Прикл. механика. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 38–68.
8. *Danilin A.N., Shalashilin V.I.* A method to identify hysteresis by an example of an antigal-loping device // Int. Appl. Mech. – 2010. – V. 46, No 5. – P. 588–595. – doi: 10.1007/s10778-010-0345-x.
9. *Данилин А.Н., Козлов К.С.* Моделирование нестационарных колебаний гасителей вибрации с учетом гистерезиса диссипации энергии // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 34–47.
10. *Danilin A.N., Yanovsky Yu.G., Semenov N.A., Shalashilin A.D.* Kinematic model of the rheological behavior of non-newtonian fluids in condition of nonstationary cyclic loading // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An Int. J. – 2012. – V. 3, No 4. – P. 331–345. – doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v3.i4.30.

Поступила в редакцию
30.06.15

Данилин Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия.

E-mail: *andanilin@yandex.ru*