

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Направление: 010100.68 - математика

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ НА ТЕМУ  
"Некоторые полиномиальные решения обратной задачи логарифмического потенциала"

Работа завершена:

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2015г. \_\_\_\_\_ (Г.Ф.Зинатуллина)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, профессор

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2015г. \_\_\_\_\_ (Л.А.Аксентьев)

Заведующий кафедрой:

док. физ.-мат. наук, профессор

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2015г. \_\_\_\_\_ (С.Р.Насыров)

Казань - 2015

# Оглавление

1. Введение	2
2. Получение отображающей функции в виде полинома	3
3. Исследование вариантов с полиномом третьей степени	5
3.1. . . . . .	7
3.2. . . . . .	7
3.3. . . . . .	8
3.4. . . . . .	9
4. Заключение	10

# 1. Введение

Следуя В.К.Иванову [1], под обратной задачей логарифмического потенциала будем понимать задачу нахождения плоской односвязной области  $D \subset \mathbb{C}_z$  ( $z = x + iy$ ). Эта область при заполнении её веществом плотности  $\mu = 1$  возбуждает внешний потенциал в виде гармонической функции

$$v(x, y) = \alpha_0 \ln \frac{1}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{r^k}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Задание  $v(x, y)$  эквивалентно заданию аналитической функции

$$u(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Удобно использовать разложение функции  $u(z)$  в окрестности  $\infty$

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}. \quad (1)$$

Если граница искомой области определяется конечным числом параметров, удовлетворяющих конечной системе уравнений (составленной по заданной функции  $u(z)$ ), то такая задача называется разрешимой в конечном виде.

Обозначим через  $z(\zeta)$  функцию, конформно отображающую круг  $|\zeta| < 1$  плоскости  $\zeta$  на область  $D$  плоскости  $z$  и через  $z^*(\zeta)$  – функцию, определенную при  $|\zeta| \geq 1$  условием  $z^*(\zeta) = \overline{z(1/\bar{\zeta})}$ .

В.К.Ивановым доказана

**Теорема 1 ([1]).** Пусть  $u(z)$  – рациональная функция, имеющая полюсы порядков  $k_1, k_2, \dots, k_s$  с суммой  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$ , и для неё существует решение обратной задачи. Тогда

$$z^*(\zeta) = \frac{p(\zeta)}{(\zeta - \zeta_1)^{k_1} \dots (\zeta - \zeta_s)^{k_s}},$$

где  $p(\zeta)$  – полином степени  $n - 1$ , а  $\zeta_1, \dots, \zeta_s$  – прообразы точек  $z_1, \dots, z_s$  при конформном отображении  $z(\zeta)$ .

В данной выпускной работе будут исследованы этапы решения обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде, который связан с полиномами. Для этого в развернутой форме представлена статья И.М. Рапопорта [2] и получены решения новых частных случаев задачи Рапопорта.

## 2. Получение отображающей функции в виде полинома

И.М.Рапопорт [2] и В.К.Иванов [3] получили задачи, разрешимые в конечном виде, для которых ряд (1) обрывается и является полиномом от  $1/z$

$$u(z) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^{k+1}}. \quad (2)$$

Соответствующая функция  $v(x, y)$  с  $z = x + iy = re^{i\varphi}$  представлена в [2], [3] в виде

$$v = \alpha_0 \ln r + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{r^k},$$

причем эта функция должна подчиняться условию

$$\iint_D \ln R(\tau, z) d\sigma = v(x, y), \quad (3)$$

где  $R(\tau, z) = |\tau - z|$ ,  $\tau \in D$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ ,  $d\sigma$  - дифференциальный элемент площади,  $\tau = r_1 e^{i\varphi_1}$ .

Представим подынтегральную функцию рядом по степеням  $r = |z|$  с учетом того, что

$$\ln \frac{R}{|z|} = \ln \left| 1 - \frac{\tau}{z} \right| = \operatorname{Re} \ln \left( 1 - \frac{\tau}{z} \right), \quad \frac{\tau}{z} = \frac{r_1}{r} e^{i(\varphi_1 - \varphi)}$$

и

$$\begin{aligned} \ln(1 - w) &= - \int_0^w \frac{dw}{1 - w} = - \int_0^w \sum_{k=0}^{\infty} w^k dw = - \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{w^{k'+1}}{k' + 1} = \\ &= \{k' + 1 = k, \quad k' = 0 \leftrightarrow k = 1\} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln \frac{R}{|z|} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \frac{\tau}{z} \right|^k \cos[k(\varphi_1 - \varphi)] = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{r_1^k}{r^k} (\cos k\varphi_1 \cos k\varphi + \sin k\varphi_1 \sin k\varphi). \quad (4)$$

Это разложение сходится во внешности круга  $r \leq \max r_1$ , т.е. при

$$r > \max_{|\zeta| \leq 1} |f(\zeta)|,$$

целиком содержащего область  $D$ .

Подставим (4) в (3) и почленно проинтегрируем сумму в левой части. Будем иметь

$$\iint_D d\sigma \ln r - \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k} \frac{\cos k\varphi}{r^k} \iint_D r_1^k \cos k\varphi_1 d\sigma + \frac{1}{k} \frac{\sin k\varphi}{r^k} \iint_D r_1^k \sin k\varphi_1 d\sigma \right] =$$

$$= \alpha_0 \ln r + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) r^{-k}.$$

Сравнивая коэффициенты при  $\ln r$  и при одинаковых степенях  $r^{-k}$  в двух частях записанного равенства, получим

$$\iint_D d\sigma = \alpha_0, \quad \iint_D r_1^k \cos k\varphi_1 d\sigma = \begin{cases} -k\alpha_k, & k = \overline{1, n}; \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad \iint_D r_1 \sin k\varphi_1 d\sigma = \begin{cases} -k\beta_k, & k = \overline{1, n}; \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Обозначим через  $f(\zeta) = z(\zeta)$  (с нормировкой  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ ) функцию, которая отображает круг  $|\zeta| < 1$  на область  $D$ . Воспользуемся разложением

$$f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_{n+1}\zeta^{n+1}, \quad a_1 > 0.$$

Подсчитаем интегралы с учетом того, что  $d\sigma = |f'(\zeta)|^2 \rho d\theta d\rho$  при  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} \iint_D r_1^k e^{ik\varphi_1} d\sigma &= \iint_{|\zeta|<1} f^k(\zeta) |f'(\zeta)|^2 \rho d\theta d\rho = \\ &= \iint_{|\zeta|<1} (a_1\zeta + \dots + a_{n+1}\zeta^{n+1})^k (a_1 + \dots + (n+1)a_{n+1}\zeta^n) (a_1 + \dots + (n+1)\bar{a}_{n+1}\bar{\zeta}^n) \rho d\theta d\rho = \\ &= F_k(a_1, \dots, a_{n+1}). \end{aligned}$$

Чтобы записать развернутое выражение для  $F_k(a_1, \dots, a_{n+1})$ , нужно учесть значения

$$\iint_{|\zeta|<1} \zeta^k \bar{\zeta}^n \rho d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta \int_0^1 \rho^{k+n+1} d\rho = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ 2\pi \frac{\rho^{2n+2}}{2(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{n+1}, & k = n. \end{cases}$$

При  $k = 0$  получим

$$\begin{aligned} \iint_D d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a_1 + 2a_2\zeta + \dots + (n+1)a_{n+1}\zeta^n) (a_1 + 2\bar{a}_2\bar{\zeta} + \dots + (n+1)\bar{a}_{n+1}\bar{\zeta}^n) \rho d\theta d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 (a_1^2 \rho + 4|a_2|^2 \rho^3 + \dots + (n+1)^2 |a_{n+1}|^2 \rho^{2n+1}) d\rho = \pi(a_1^2 + 2|a_2|^2 + \dots + (n+1)|a_{n+1}|^2). \end{aligned}$$

Система уравнений для определения  $\{a_k\}_{k=1}^{n+1}$  получится такой:

$$a_1^2 + 2|a_2|^2 + \dots + (n+1)|a_{n+1}|^2 = \frac{\alpha_0}{\pi}, \quad F_k(a_1 + \dots + a_{n+1}) = -k(\alpha_k + i\beta_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Если система (5) будет решена, то можно представить  $f(\zeta)$  в виде вполне определенного полинома. В случае однолистности  $f(\zeta)$  в круге  $|\zeta| < 1$  искомая область представится как  $f(E)$ , где  $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ .

### 3. Исследование вариантов с полиномом третьей степени

Составим систему (5) при  $n = 2$  для определения коэффициентов функции  $f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3$  при известной функции

$$u(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3}.$$

Для этого подсчитаем интегралы, которые нужны для составления системы (5). Будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{|\zeta|<1} f'(\zeta) \overline{f'(\zeta)} \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a_1 + 2a_2\zeta + 3a_3\zeta^2)(a_1 + 2\bar{a}_2\bar{\zeta} + 3\bar{a}_3\bar{\zeta}^2) \rho d\rho d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 (a_1^2\rho + 4|a_2|^2\rho^3 + 9|a_3|^2\rho^5) d\rho = \pi(a_1^2 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2), \\ \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta) f'(\zeta) \overline{f'(\zeta)} \rho d\rho d\theta &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3)(a_1 + 2a_2\zeta + 3a_3\zeta^2)(a_1 + 2\bar{a}_2\bar{\zeta} + 3\bar{a}_3\bar{\zeta}^2) \rho d\rho d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 [a_1^2 2\bar{a}_2\rho^3 + (a_1 2a_2 + a_2 a_1) 3\bar{a}_3\rho^5] d\rho = \pi(a_1^2 \bar{a}_2 + 3a_1 a_2 \bar{a}_3), \\ \iint_{|\zeta|<1} f^2(\zeta) f'(\zeta) \overline{f'(\zeta)} \rho d\rho d\theta &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3)^2 (a_1 + 2a_2\zeta + 3a_3\zeta^2)(a_1 + 2\bar{a}_2\bar{\zeta} + 3\bar{a}_3\bar{\zeta}^2) \rho d\rho d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 a_1^3 3\bar{a}_3\rho^5 d\rho = \pi a_1^3 \bar{a}_3. \end{aligned}$$

По заданной функции  $u(z)$  найдем потенциал  $v(x, y)$  из равенства

$$u(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial v}{\partial z} \Rightarrow v(x, y) = -\frac{\pi}{2} \left( c_0 \ln z - \frac{c_1}{z} - \frac{c_2}{2z^2} + c_0 \ln \bar{z} - \frac{\bar{c}_1}{\bar{z}} - \frac{\bar{c}_2}{2\bar{z}^2} \right) =$$

(слагаемые с сопряженными величинами дополняются для того, чтобы функция  $v(x, y)$  была вещественной) =

$$\begin{aligned} &= -\pi \left( c_0 \ln r - \frac{c_1 e^{-i\varphi} + \bar{c}_1 e^{i\varphi}}{2r} - \frac{c_2 e^{-i2\varphi} + \bar{c}_2 e^{i2\varphi}}{4r^2} \right) = \\ &= -\pi c_0 \ln r + \pi \frac{\alpha_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi}{r} + \pi \frac{\alpha_2 \cos 2\varphi + \beta_2 \sin 2\varphi}{2r^2}. \end{aligned}$$

Теперь систему (5) при  $n = 2$  можно записать в виде

$$\begin{cases} a_1^2 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2 = -c_0, \\ a_1^2 \bar{a}_2 + 3a_1 a_2 \bar{a}_3 = -(\alpha_1 + i\beta_1) = -c_1, \\ a_1^3 \bar{a}_3 = -(\alpha_2 + i\beta_2) = -c_2. \end{cases} \quad (6)$$

Если при составлении системы (6) учитывать представление

$$v(x, y) = \alpha_0 \ln r + \frac{\check{\alpha}_1 \cos \varphi + \check{\beta}_1 \sin \varphi}{r} + \frac{\check{\alpha}_2 \cos 2\varphi + \check{\beta}_2 \sin 2\varphi}{r^2},$$

то эта система примет вид

$$\begin{cases} a_1^2 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2 = \frac{\alpha_0}{\pi}, \\ a_1^2 \bar{a}_2 + 3a_1 a_2 \bar{a}_3 = -\frac{\check{\alpha}_1 + i\check{\beta}_1}{\pi}, \\ a_1^3 \bar{a}_3 = -\frac{2}{\pi}(\check{\alpha}_2 + i\check{\beta}_2). \end{cases} \quad (7)$$

### 3.1.

При  $c_1 = c_2 = 0$  получим полином первой степени. Это следует из второго и третьего уравнений системы (6), именно,  $a_2 = a_3 = 0$ . Коэффициент  $a_1$  определится из первого уравнения. Будем иметь функцию  $f(\zeta) = a_1\zeta$ , поэтому в качестве искомой области получится круг.

### 3.2.

При  $c_2 = 0$  получится полином второй степени. Проведем подробный анализ этого случая. Система (6) перепишется в виде (для простоты  $(-c_0)$  полагаем равным 1)

$$a_1^2 + 2|a_2|^2 = -c_0 = 1, \quad a_1^2 \bar{a}_2 = -(\alpha_1 + i\beta_1), \quad a_3 = 0.$$

В общем случае  $c_0 = -\frac{\alpha_0}{\pi}$ .

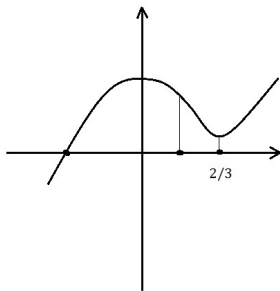
При  $a_2 = x_2 + iy_2$  и при  $a_1^2 = t$  получим из второго уравнения

$$x_2 = -\frac{\alpha_1}{t} \quad y_2 = \frac{\beta_1}{t}.$$

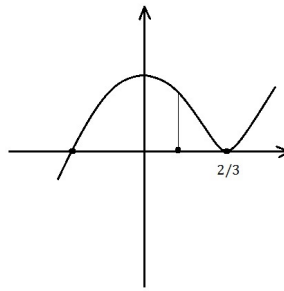
Тогда первое уравнение перепишется в форме  $t + \frac{2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{t^2} = 1$  и примет вид

$$t^3 - t^2 + c = 0, \quad \text{где } c = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2).$$

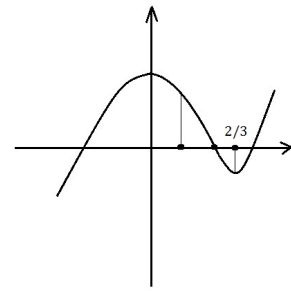
График функции  $y = \varphi(t) = t^3 - t^2 + c$  можно начертить при различных значениях  $c$ . Так как  $\varphi'(t) = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$ , то при  $t = 0$  и  $t = 2/3$  получаются локальные максимум и минимум соответственно, а при  $t = 1/3$  возникнет точка перегиба, потому что  $\varphi''(t) = 6t - 2$ .



$$c > \frac{4}{27}$$



$$c = \frac{4}{27}$$



$$c < \frac{4}{27}$$

Если  $c = \frac{4}{27}$ , то  $t = \frac{2}{3}$  является корнем уравнения  $\varphi(t) = 0$ . Поэтому  $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$



и  $|a_2|^2 = \frac{c}{2a_1^4} = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{6}$ . Отображающая функция запишется в виде

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{3}}\zeta + e^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{6}}\zeta^2.$$

Получится внутренность кардиоиды с угловой точкой, так как нуль производной ( $f'(\zeta_0) = 0$ )  $\zeta_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{6}}{2e^{i\alpha}} = -e^{-i\alpha}$  лежит на окружности  $|\zeta| = 1$ .

Если  $c > \frac{4}{27}$ , то уравнение  $\varphi(t) = 0$  не будет иметь положительных корней.

Если  $c < \frac{4}{27}$ , то уравнение  $\varphi(t) = 0$  будет иметь два корня, один из которых будет  $> 2/3$ , а второй  $< 2/3$ .

Если  $a_1 > \sqrt{\frac{2}{3}}$ , то  $|a_2|^2 = \frac{c}{2a_1^4} < \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{6}$ . Тогда  $f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2$  и нуль производной  $\zeta_0 = -\frac{a_1}{2a_2}$  имеет оценку модуля  $|\zeta_0| > \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 1$ . Поэтому образом круга  $|\zeta| < 1$  будет внутренность однолистной кардиоиды без угловой точки.

Если  $a_1 < \sqrt{\frac{2}{3}}$ , то надежной оценки не получается и возможны оба случая.

Если  $|a_1| \geq 2|a_2|$ , то искомая область будет однолистной.

Если  $|a_1| < 2|a_2|$ , то искомая область окажется неоднолистной, и задача будет неразрешимой в классе полиномов.

### 3.3.

И.М.Рапопортом [2] получен полином третьей степени в качестве решения обратной задачи с условием

$$\iint_D \ln R d\sigma = \pi \ln r + \frac{\pi \lambda \cos 2\varphi}{2r^2}.$$

При решении системы

$$a_1^3 \bar{a}_3 = -\lambda, \quad a_1^2 \bar{a}_2 + 3a_1 a_2 \bar{a}_3 = 0, \quad a_1^2 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2 = 1, \quad (8)$$

получена функция  $f(\zeta) = a_1\zeta - \frac{\lambda}{a_1^3}\zeta^3$ , где  $a_1$  – наибольший из действительных корней уравнения  $a_1^8 - a_1^6 + 3\lambda^2 = 0$ . Область  $f(E)$ ,  $E = \zeta : |\zeta| < 1$ , является звездобразной, так как выполняется условие ([4], с.45; [5], с.167.)

$$\operatorname{Re} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \operatorname{Re} \frac{1 - \zeta^2 3\lambda/a_1^4}{1 - \zeta^2 \lambda/a_1^4} > 0,$$

если  $|\zeta^2 3\lambda a_1^4| < 1$  (в силу  $\lambda \leq 3/16$  и  $a_1 > \sqrt{3}/2$ ).

При решении системы (8) была учтена одна из двух возможностей. Именно, доведен до конца случай  $a_2 = 0$ .

Проведем анализ пропущенного случая. Для этого рассмотрим систему (9).

$$a_1^3 \bar{a}_3 = -\lambda, \quad a_1 + 3 \frac{a_2}{a_2} \bar{a}_3 = 0, \quad a_1^2 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^2 = 1, \quad (9)$$

где  $\frac{a_2}{\bar{a}_2} = \frac{|a_2|^2 e^{i\varphi}}{|a_2| e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$ . Если  $\bar{a}_3 = -\frac{\lambda}{a_1^3}$ , то из второго уравнения системы (9) найдем  $a_1 = \sqrt[4]{3\lambda e^{2i\varphi}}$ . Так как  $a_1 > 0$ , то  $e^{i\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0, \pi$  (исследуем случай  $\varphi = 0$ ). В этом случае  $a_1 = \sqrt[4]{3\lambda}$ ,  $a_3 = -\frac{\sqrt[4]{3\lambda}}{3}$ . Подставив, найденные выражения, в третье уравнение системы (9) найдем  $a_2 = \sqrt{\frac{3-4\sqrt{3\lambda}}{6}}$ .  $a_2$  вещественное число, следовательно  $3 - 4\sqrt{3\lambda} \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{3}{16}$ .

Отображающая функция запишется в виде

$$f(\zeta) = \sqrt[4]{3\lambda} \zeta + \sqrt{\frac{3-4\sqrt{3\lambda}}{6}} \zeta^2 - \frac{\sqrt[4]{3\lambda}}{3} \zeta^3, \quad (10)$$

$$f'(\zeta) = -\sqrt[4]{3\lambda} \zeta^2 + 2\sqrt{\frac{3-4\sqrt{3\lambda}}{6}} \zeta + \sqrt[4]{3\lambda}. \quad \text{При } f'(\zeta) = 0, \quad D_1 = \frac{3-4\sqrt{3\lambda}}{6} + \sqrt[4]{3\lambda}.$$

По теореме Виета  $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = -1$ , и так как  $D_1 > 0$  имеем два случая:

1)  $\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = -1$ , нетрудно заметить, что эта ситуация возможна, когда  $a_2 = 0$ . Откуда следует  $3 - 4\sqrt{3\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{16}$ . Таким образом, при  $\lambda = \frac{3}{16}$  получаем функция  $f(\zeta)$ , (10) однолистка,

2)  $\zeta_1 \in |\zeta| < 1, \quad \zeta_2 \notin |\zeta| < 1, \quad \lambda < \frac{3}{16}$ , что приводит к неоднолистности функции (10).

### 3.4.

Рассуждениями и вычислениями в пункте 2 обосновано следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если начальная потенциальная функция представлена полиномом третьей степени по  $\frac{1}{z}$   $u(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3}$  (или  $v(x, y) = (\int u dz + \overline{\int u dz})(-\frac{\pi}{2})$ ), то решением обратной задачи логарифмического потенциала окажется функция  $f(\zeta) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3$  в круге  $|\zeta| < 1$  при соблюдении однолистности  $f(\zeta)$  с такими частными вариантами искомых областей:

при  $c_1 = c_2 = 0$  областью будет круг,

при  $c_2 = 0$  областью будет внутренность кардиоиды,

при  $c_1 = 0$  получится звездообразная область (в случае  $a_2 = 0$ ).

## 4. Заключение

В предисловии к сборнику "Избранные научные труды" В.К.Иванова [6] отмечается следующее замечание. "По мнению многих авторитетных ученых исследования В.К.Иванова в области обратных задач потенциала имеют для геофизиков непреходящее значение"([6],с.9). В связи с этим у меня возник интерес к возможности приложений математических задач теории потенциала. После консультации на геофаке КФУ по этому вопросу стало ясно, что геофизики КФУ не нуждаются в простых математических моделях геофизических процессов. Осваивать сложные и современные методики геофизических задач у меня не было времени и сил. Поэтому при непосредственной помощи доцента Н.Р.Абубакирова и профессора Л.А.Аксентьева я ограничилась лишь некоторыми добавлениями в традиционных задачах логарифмического потенциала. Своим основным достижением считаю формулировку и доказательство **теоремы 2**.

## Литература

- [1] В.К.Иванов. *О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде*. ДАН СССР, т.106, №4, 1956. – с. 598 – 599.
- [2] И.М.Рапопорт. *О плоской обратной задаче теории потенциала*. ДАН СССР, т.28, №4, 1940. – с. 305 – 307.
- [3] В.К.Иванов. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала*. ДАН СССР, т.105, №3, 1955. – с. 409 – 411.
- [4] Ф.Г.Авхадиев. *Введение в геометрическую теорию функций: учеб.пособие* / Ф.Г.Авхадиев. – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 127 с.
- [5] Г.М.Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. М.: Физматлит. – 1966.
- [6] В.К.Иванов. *Избранные научные труды. Математика.*: Физматлит. Москва – 2008.