УДК 517.53/.55

ЛОКАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ МАРЦИНКЕВИЧА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Д.Б. Кац

Аннотация

В статье автор обобщает понятие показателей Марцинкевича, введенных им ранее. Эти показатели по сути являются новыми метрическими характеристиками для неспрямляемых плоских кривых. Вводимое здесь обобщение находит применение при решении краевых задач для голоморфных функций в областях, границы которых неспрямляемы.

Ключевые слова: метрические характеристики, фракталы, неспрямляемые кривые, показатели Марцинкевича.

Введение

Введем основные используемые понятия.

Задача Римана – классическая задача комплексного анализа; её решение на кусочно-гладких (и, следовательно, спрямляемых) контурах широко известно (см., например, [1, 2]) и является признанным во всем мире достижением российской и советской математики. Для неспрямляемого контура решение этой задачи было получено в 1982–1983 гг. в работах [3, 4].

Для демонстрации одного из основных результатов в этой области нам потребуется ввести сначала некоторые понятия.

Условие Гельдера. Пусть Γ – компактное множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \le 1$. Заданная на Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν, если

$$\sup\left\{\frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^{\nu}} : t', t'' \in \Gamma, t' \ne t''\right\} := h_\nu(f,\Gamma) < \infty.$$

Линейное пространство функций, удовлетворяющих этому условию, принято обозначать через $H_\nu(\Gamma)$. На нем можно ввести норму $\|f\|_\nu := h_\nu(f,\Gamma) + \sup\{|f(t)| : t \in \Gamma\}$, превращающую его в банахово пространство.

Верхняя метрическая размерность. Пусть Γ – компактное множество на комплексной плоскости. Через $N(\varepsilon,\Gamma)$ обозначим наименьшее число кругов диаметра ε, покрывающих множество Γ. Тогда верхняя метрическая размерность множества Γ, также известная как размерность Колмогорова, размерность Минковского и box counting dimension, определяется как предел (см. [5–8])

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(\varepsilon,\Gamma)}{-\ln\varepsilon}.$$

Эта величина меняется от 1 до 2; для спрямляемой кривой она равна единице, а для неспрямляемой может быть больше. Эта размерность может быть определена и по-другому: разграфим плоскость на квадраты со стороной 2^{-n} и обозначим через $M(\Gamma,n)$ число таких квадратов, пересекающихся с Γ. Тогда (см., например, [7, 8])

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma := \limsup_{n\to\infty}\frac{\ln M(\Gamma,n)}{n}.$$

Задача о скачке. Возьмем теперь в качестве Γ простую замкнутую (необязательно спрямляемую) кривую, разбивающую комплексную плоскость на конечную область D^+ и содержащую бесконечно удаленную точку область D^-. Пусть на этой кривой задана функция $f(t)$. Задачей о скачке называют краевую задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ функции $\Phi(z)$, которая непрерывна в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$ и предельные значения которой в точках $t\in\Gamma$ при стремлении к ним из областей D^+ и D^- связаны соотношением

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=f(t),\quad t\in\Gamma. \tag{1}$$

Это простейший случай упомянутой выше задачи Римана. Подобная задача может ставиться и на незамкнутой дуге.

Имеет место

Теорема 1 (см. [3, 4]). *Пусть Γ есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и $f\in H_\nu(\Gamma)$. Если*

$$\nu > \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \tag{2}$$

то задача о скачке имеет решение.

Другие характеристики неспрямляемых кривых типа размерности. На эту тему существуют примеры двоякого рода. Так, построен пример [4], когда условие (2) нарушено и задача о скачке неразрешима, но, с другой стороны, известны случаи [9], когда задача имеет решения, даже несмотря на нарушение данного условия. Именно из этого следует необходимость во введении других метрических характеристик неспрямляемых кривых типа размерностей, отличающихся от верхней метрической размерности и позволяющих сделать условие (2) более точным. К примеру, в [9–11] (см. также недавние работы [12, 13]) вводятся аппроксимационная и уточненная метрические размерности.

Опишем их вкратце. Пусть область D^+ разбита на меньшие неналегающие области δ_j со спрямляемыми границами длин λ_j, а r_j – наибольший радиус круга, помещающегося внутри δ_j. Число $M_d=\sum\lambda_j r_j^{d-1}$, где сумма берется по всем областям δ_j, называется d-массой этого разбиения. Тогда внутренняя аппроксимационная размерность Γ есть точная верхняя грань значений d, для которых существует разбиение с конечной d-массой. Внешняя аппроксимационная размерность определяется аналогично. Определение уточненной метрической размерности сложнее: здесь используются последовательности областей δ_j, из которых область D^+ (или D^-) получается в результате применения операций $\bigcup$ и $\setminus$. Доказано, что

(i) как аппроксимационные, так и уточненные метрические размерности не превосходят $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$, и имеются примеры кривых, для которых каждая из них строго меньше $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$;

(ii) теорема 1 сохраняет силу при замене в условии (2) верхней метрической размерности на любую из описанных выше размерностей, то есть такая замена усиливает теорему 1.

Проблема, однако, в том, что до настоящего времени неизвестны точные значения аппроксимационных и уточненных метрических размерностей сколько-нибудь тривиальных кривых. Это связано с использованием в их определениях множества всевозможных разбиений области на меньшие области со спрямляемыми границами, которое трудно обозримо в нетривиальных случаях.

Становится ясно, что с точки зрения приложений в краевых задачах все перечисленные выше размерности обладают недостатками: верхняя метрическая размерность не вполне точно учитывает свойства неспрямляемой кривой, обеспечивающие разрешимость краевой задачи, а аппроксимационная размерность и уточненная метрическая размерность очень сложны для вычисления. В связи с этим возникает потребность в разработке новых метрических характеристик неспрямляемых кривых, в том числе и не являющихся размерностями.

1. Показатели Марцинкевича и их локализация

В работе [14] нами введена следующая характеристика.

Показатели Марцинкевича. Пусть, как и выше, Γ есть замкнутая жорданова кривая, разбивающая комплексную плоскость на конечную область D^+ и бесконечную область D^-. В дальнейшем мы предполагаем, что эта кривая неспрямляема, но имеет нулевую площадь, так что области D^+ и D^- измеримы. Рассмотрим интеграл

$$I_p(D^+) = \iint\limits_{D^+} \frac{dx\,dy}{\operatorname{dist}^p(z,\Gamma)}, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что при $p = 0$ этот интеграл конечен – он равен площади D^+, а при $p > 0$ он может оказаться бесконечным. В связи с этим введем величину

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = \sup\{p : I_p(D^+) < \infty\}.$$

Аналогично, рассмотрим область D^*, равную $D^- \bigcap \{z : |z| < r\}$, где r настолько велико, что Γ полностью содержится в круге $\{z : |z| < r\}$. Для области D^* также введем характеристику

$$\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \sup\{p : I_p(D^*) < \infty\}.$$

Наконец, положим

$$\mathfrak{m}(\Gamma) := \max\{\mathfrak{m}^+\,\Gamma, \mathfrak{m}^-\,\Gamma\}.$$

Характеризация свойств множества через поведение некоторых интегралов по дополнению этого множества, содержащих $\operatorname{dist}(z,\Gamma)$, восходит к работам польского математика Йозефа Марцинкевича (см. [15]). В связи с этим мы назвали величины $\mathfrak{m}^+\,\Gamma$ и $\mathfrak{m}^-\,\Gamma$ показателями Марцинкевича кривой Γ (внутренним и внешним). В [14] доказаны неравенства

$$1 \geq \mathfrak{m}^+\,\Gamma \geq 2 - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma, \quad 1 \geq \mathfrak{m}^-\,\Gamma \geq 2 - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma.$$

Кроме того, как установлено в [14], справедлива

Теорема 2. *Пусть Γ – простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Если*

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}(\Gamma), \tag{3}$$

то задача о скачке имеет решение.

Условия этой теоремы во многих случаях менее ограничительны, чем условия теоремы 1.

Локальные показатели Марцинкевича. Пусть Γ – замкнутая неспрямляемая кривая, r – достаточно малое положительное число, $t\in\Gamma$. Обозначим $D^+_r(t):= = D^+\cap\{z:|z-t|\le r\}$, а через $M^+_r(t)$ – множество значений показателя p, для которых интеграл
$$\iint\limits_{D^+_r(t)}\frac{dx\,dy}{\operatorname{dist}^p(z,\Gamma)}$$
сходится. При $r<r'$ имеем $M^+_{r'}(t)\subset M^+_r(t)$, а отсюда $\sup M^+_{r'}(t)\le\sup M^+_r(t)$, то есть $\sup M^+_r(t)$ монотонен как функция переменной r, и предел
$$\mathfrak{m}^+(\Gamma;t)=\lim_{r\to 0}\{\sup M^+_r(t)\}$$
существует. Назовем его внутренним локальным показателем Марцинкевича в точке t. Аналогично определяется внешний локальный показатель $\mathfrak{m}^-(\Gamma;t)$.

Отметим ряд свойств локальных показателей Марцинкевича. Прежде всего они сохраняют свои значения при параллельном переносе и повороте кривой Γ, а также при применении к ней преобразований подобия и симметрии, что легко доказывается с помощью соответствующих замен переменных в рассматриваемых интегралах. Далее, для любого $t\in\Gamma$ справедливы неравенства
$$1\ge\mathfrak{m}^+(\Gamma,t)\ge 2-\overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma,\quad 1\ge\mathfrak{m}^-(\Gamma,t)\ge 2-\overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma;$$
их справедливость доказывается так же, как аналогичные неравенства для нелокальных показателей в [14]. Отметим также следующее свойство.

Теорема 3. *Справедливы равенства*
$$\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma;t):t\in\Gamma\}=\mathfrak{m}^+\,\Gamma,\quad\inf\{\mathfrak{m}^-(\Gamma;t):t\in\Gamma\}=\mathfrak{m}^-\,\Gamma.$$

Доказательство. Докажем первое из соотношений; второе доказывается аналогично. Зафиксируем любое $p<\mathfrak{m}^+\,\Gamma$. По определению показателя Марцинкевича $I_p(D^+)<\infty$. Но тогда для любых $t\in\Gamma$ и $r>0$ мы имеем $I_p(D^+_r(t))< < I_p(D^+)<\infty$, и отсюда $p\in M^+_r(t)$. Значит, при любом $t\in\Gamma$ справедливо неравенство $\mathfrak{m}^+(\Gamma;t)\ge p$, а поскольку p можно выбрать сколь угодно близким к $\mathfrak{m}^+\,\Gamma$, то $\mathfrak{m}^+(\Gamma;t)\ge\mathfrak{m}^+\,\Gamma$, и $\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma;t):t\in\Gamma\}\ge\mathfrak{m}^+\,\Gamma$. Допустим, что $\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma;t): t\in\Gamma\}>\mathfrak{m}^+\,\Gamma$; тогда найдется число p такое, что $\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma;t):t\in\Gamma\}>p> >\mathfrak{m}^+\,\Gamma$. Из левой части последнего неравенства следует, что для любой точки $t\in\Gamma$ существует радиус $r(t)>0$ такой, что интеграл $I_p(D^+_{r(t)}(t))$ сходится. Круги $|z-t|<r(t)$ образуют покрытие компакта Γ. Выберем из него конечное подпокрытие, состоящее из кругов $K_j=\{z:|z-t_j|<r_(t_j)\}$, $j=1,2,\dots,n$, и обозначим $\Delta=D^+\bigcap(\bigcup\limits_{j=1}^{n}K_j)$. Очевидно, интеграл $I_p(\Delta)$ сходится. Но сходится и интеграл $I_p(D^+\setminus\Delta)$, потому что расстояние от $D^+\setminus\Delta$ до Γ положительно. Значит, сходится и интеграл $I_p(D^+)$, что делает неравенство $p>\mathfrak{m}^+\,\Gamma$ невозможным. Теорема доказана. □

Приведем два примера вычисления локальных показателей Марцинкевича.

Пример 1. Сначала рассмотрим кривую, построенную в [14]. Возьмем квадрат $Q=\{x,y:0\le x\le 1,-1\le y\le 0\}$. Разобьем его сторону $\{0\le x\le 1,y= =0\}$ на участки I_n от 2^{-n} до 2^{-n+1}, где n меняется от 1 до $+\infty$, зафиксируем положительные числа α и $\beta\ge 1$ и разобьем каждый из этих участков на $2^{[n\beta]}$ равных частей, где $[n\beta]$ означает целую часть числа $n\beta$. Обозначим точки деления участка I_n через x_{nj}, j – номер в порядке убывания. Присоединим к квадрату Q прямоугольники $p_{nj} = \{x, y : x_{nj} - C_n \leq x \leq x_{nj}, 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$. Величину C_n определим равенством $C_n = \frac{1}{2}a_n^{\alpha}$, где a_n – расстояние между точками деления на отрезке I_n, то есть $2^{-n-[n\beta]}$. Границу полученной области D^+ обозначим Γ.

В работах [3, 4] доказано, что $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma = \dfrac{2\beta}{\beta+1}$ при $\alpha = 1$. Точно так же вычисляется $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ при $\alpha > 1$, причем и в этом случае она равна $\dfrac{2\beta}{\beta+1}$. Интеграл $\displaystyle\iint\limits_{D^+} \frac{dx\,dy}{\mathrm{dist}^p(z,\Gamma)}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]} \cdot 2^{-n} \cdot (C_n)^{1-p} \asymp 2^{n\beta-n-n(1+\beta)\alpha(1-p)},$$

то есть при условии $\beta - 1 - (1+\beta)\alpha(1-p) < 0$, откуда $1 - p > \dfrac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$, то есть $p < 1 - \dfrac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$. Отсюда

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}.$$

Аналогично, $\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \dfrac{2}{\beta+1}$ при любом α.

Но в окрестности любой точки $t \in \Gamma$, кроме нуля, кривая Γ спрямляема. Поэтому локальные показатели Марцинкевича $\mathfrak{m}^{\pm}(\Gamma; t)$ равны 1 при $t \neq 0$, а в точке $t = 0$ имеем

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma; 0) = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} > 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \quad \mathfrak{m}^-(\Gamma; 0) = \frac{2}{\beta+1} = 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma.$$

Пример 2. Пусть заданы k пар положительных чисел $\alpha_j \geq 1$, $\beta_j \geq 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Для каждой из них построим область D_j^+, как в предыдущем примере, и положим $D = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \{D_j^+ + j - 1\}$ (имеются ввиду параллельные переносы на $j-1$ единиц вдоль вещественной оси). Тогда для каждой точки t границы Γ области D, за исключением точек $0, 1, \ldots, k-1$ вещественной оси, имеем $\mathfrak{m}^+(\Gamma, t) = \mathfrak{m}^-(\Gamma, t) = 1$, а в этих исключительных точках

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma, j-1) = 1 - \frac{\beta_j - 1}{(\beta_j+1)\alpha_j}, \quad \mathfrak{m}^-(\Gamma, j-1) = \frac{2}{\beta_j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma = \max\left\{\frac{2\beta_j}{\beta_j+1} : j = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = \min\left\{1 - \frac{\beta_j-1}{(\beta_j+1)\alpha_j} : j = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

$$\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \min\left\{\frac{2}{\beta_j+1} : j = 1, 2, \ldots, k\right\} = 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma.$$

Приведенные примеры показывают, в частности, что существуют кривые, для которых $\mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$ строго больше $2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. Аналогичные примеры можно построить и для внешнего показателя Марцинкевича.

2. Локальный критерий разрешимости задачи о скачке

Перейдем теперь к приложению введенных характеристик в теории краевых задач. Продолжим функцию $f \in H_\nu(\Gamma)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ по Уитни (см. [15]). Получится функция $u(z)$ такая, что $u|_\Gamma = f$. В $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ эта функция имеет частные производные любого порядка. Если $f \in H_\nu(\Gamma)$, то

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{C}{\mathrm{dist}^{1-\nu}(z,\Gamma)},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{C}{\mathrm{dist}^{1-\nu}(z,\Gamma)}$$

(см. [15]). Далее, рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \chi(z)u(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D^+} \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{4}$$

где $\chi(z)$ – характеристическая функция области D^+.

Теорема 4. *Если $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$ в любой точке кривой, то функция Φ корректно определена и интегрируема в некоторой степени, большей двух, в окрестности Γ. Она удовлетворяет краевому условию задачи о скачке в тех точках $t \in \Gamma$, где $\nu > 1 - \dfrac{1}{2}\mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$.*

Теорема 5. *Согласно теореме 3 из справедливости неравенства $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$ в любой точке кривой следует, что $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+\Gamma$. Значит, производная $\partial u/\partial\overline{\zeta}$ интегрируема в D^+ в некоторой степени, большей единицы. Поэтому функция Φ корректно определена и интегрируема в некоторой степени, большей двух (см. [16]). Далее, обозначим через E множество тех точек $t \in \Gamma$, где $\nu \le 1 - \dfrac{1}{2}\mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$. Тогда для каждой точки $t \in \Gamma\backslash E$ найдется радиус $r = r(t)$ такой, что в $D_r^+(t)$ производная $\partial u/\partial\overline{\zeta}$ интегрируема в степени, большей двух. Записывая интегральный член формулы (4) как сумму интегралов по $D_r^+(t)$ и по $D^+ \setminus D_r^+(t)$, убеждаемся, что (см. [16]) интегральное слагаемое (4) непрерывно в точке t. Полученное утверждение завершает доказательство.*

Приведем одно простое следствие из этой теоремы. Предположим, что на кривой Γ зафиксировано несколько (конечное число) точек, составляющих множество E. Рассмотрим задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции Φ по краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma \setminus E, \tag{5}$$

условию $\Phi(\infty) = 0$ и ограничению $\Phi \in L_p(N)$, $p > 2$, в любой окрестности N исключительного множества E (здесь имеются в виду окрестности в топологии комплексной плоскости). Такую постановку задачи о скачке называют полунепрерывной.

Следствие 1. *Если $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+(t)$ в любой точке кривой Γ и $\nu > 1 - \dfrac{\mathfrak{m}^+(t)}{2}$ при $t \in \Gamma \setminus E$, то задача о скачке в полунепрерывной постановке разрешима.*

Доказательство основано на том, что при условиях следствия искомым решением является функция (4).

Тем самым мы перенесли основной результат [14] на случай полунепрерывной постановки задачи.

Аналогичные результаты можно получить с использованием внешних локальных показателей Марцинкевича.

Единственность решений можно исследовать в терминах размерности Хаусдорфа (см. [14]).

Summary

D.B. Kats. New Metric Characteristics of Non-Rectifiable Curves with Applications.

In this paper, the author summarizes the concept of Marcinkiewicz exponents, introduced earlier. These exponents are in fact new metric characteristics for non-rectifiable flat curves. The generalization that is presented here is used to solve boundary-value problems for holomorphic functions in domains whose boundaries are non-rectifiable.

Keywords: metric characteristics, fractals, non-rectifiable curves, Marcinkiewicz exponents.

Литература

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1962. – 600 с.
3. *Кац Б.А.* Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 4. – С. 789–792.
4. *Кац Б.А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Известия вузов. Матем. – 1983. – № 4. – С. 68–80.
5. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Усп. матем. наук. – 1959. – Т. 14, Вып. 2. — С. 3–86.
6. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
7. *Tricot C.* Curves and Fractal Dimension. – N. Y.: Springer-Verlag, 1995. – 338 p.
8. *Falconer K.J.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – Wiley & Sons, 2014. – 400 p.
9. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A.* Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – V. 380, No 1. – P. 177–187.
10. *Кац Б.А.* Метрические характеристики неспрямляемых дуг и задача о скачке // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 56–64.
11. *Kats B.A.* The refined metric dimension with applications // Comput. Meth. Funct. Th. – 2007. – V. 7, No 1. – P. 77–89.
12. *Kats B.A.* The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – V. 59, No 8. – P. 1053–1069. – doi: 10.1080/17476933.2013.809574.
13. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A.* The Cauchy type integral and singular integral operator over closed Jordan curves // Monatsh. Math. – 2014. – V. 1‘76. – P. 1–15. – doi: 10.1007/s00605-014-0656-9.
14. *Кац Д.Б.* Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 3. – С. 68–71.

15. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойств функций. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

16. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Поступила в редакцию
06.10.14

Кац Давид Борисович – аспирант кафедры математического анализа, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *random000@rambler.ru*