

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2024

Казань, 7 апреля 2024 г.

5 класс

Вариант № 1

1. Три мальчика и три девочки съели вместе двадцать конфет. При этом Рамиль съел больше всех, а Владимир - не меньше всех. Может ли так быть, что девочки съели не меньше, чем мальчики?

Ответ. Может.

Решение. Пусть Рамиль съел 5 конфет, Владимир – 2 конфеты, а третий мальчик съел 1 конфету; и пусть каждая из девочек съела по 4 конфеты. Тогда девочки съели 12 конфет, а мальчики – 8 конфет.

2. На острове выбирали вожака. На голосование пришли все дикари с запада, и столько же с востока. После подведения итогов выяснилось, что за первого кандидата проголосовало на 23 дикаря больше, чем за второго. После чего мудрец воскликнул: "Произошла ужасная ошибка!" Как он это понял?

Решение. Предположим, итоги были подведены верно. Поскольку с запада и с востока пришло одинаковое число дикарей, то общее число голосовавших дикарей чётно. С другой стороны, количества голосов за первого и второго кандидатов отличаются на нечётное число, следовательно, это числа разной чётности и потому общее число проголосовавших нечётно. Противоречие.

3. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 4 получить 85?

Ответ. Может.

Решение. Например, можно последовательно получить следующую цепочку чисел: $4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 46 \rightarrow 92 \rightarrow 29 \rightarrow 58 \rightarrow 85$.

4. На Турнир юных математиков приехали участники из 30 школ. Докажите, что есть школа, из которой приехало не менее 22 учеников, если всего было 632 участника.

Решение. Предположим противное: из каждой школы приехало не более 21 ученика. Тогда общее число участников не превосходит $21 \cdot 30 = 630 < 632$, что противоречит условию.

5. Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Каша варится 15 минут. Как Алие с помощью этих часов сварить кашу?

Решение. *Первый способ.* Запускаем одновременно и те, и другие часы. По истечении 7 минут начинаем варить кашу. По прошествии ещё 4 минут песок в 11-минутных часах закончится, и, перевернув 11-минутные часы, мы сможем отмерить ещё 11 минут. В итоге получим требуемые 15 минут.

Второй способ. Запускаем одновременно и те, и другие часы, а также начинаем варить кашу. По истечении 7 минут переворачиваем часы на 7 минут. По прошествии ещё 4 минут песок в 11-минутных часах закончится, а в 7-минутных часах истечёт 4 минуты. Следовательно, перевернув в очередной раз часы на 7 минут, мы сможем отмерить ещё 4 минуты. В итоге получим требуемые 15 минут.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2024

Казань, 7 апреля 2024 г.

5 класс

Вариант № 2

1. Три мальчика и три девочки съели вместе двадцать две конфеты. При этом Рамиль съел больше всех, а Владимир - не меньше всех. Может ли так быть, что девочки съели не меньше, чем мальчики?

Ответ. Может.

Решение. Пусть Рамиль съел 6 конфет, Владимир – 2 конфеты, а третий мальчик съел 1 конфету; пусть девочки съели соответственно 4, 4 и 5 конфет. Тогда девочки съели 13 конфет, а мальчики – 9 конфет.

2. На острове выбирали вожака. На голосование пришли все дикари с запада, и столько же с востока. После подведения итогов выяснилось, что за первого кандидата проголосовало на 25 дикарей больше, чем за второго. После чего мудрец воскликнул: "Произошла ужасная ошибка!" Как он это понял?

Решение. Предположим, итоги были подведены верно. Поскольку с запада и с востока пришло одинаковое число дикарей, то общее число голосовавших дикарей чётно. С другой стороны, количества голосов за первого и второго кандидатов отличаются на нечётное число, следовательно, это числа разной чётности и потому общее число проголосовавших нечётно. Противоречие.

3. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 8 получить 85?

Ответ. Может.

Решение. Например, можно последовательно получить следующую цепочку чисел: $8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 46 \rightarrow 92 \rightarrow 29 \rightarrow 58 \rightarrow 85$.

4. На Турнир юных математиков приехали участники из 30 школ. Докажите, что есть школа, из которой приехало не менее 23 учеников, если всего

было 663 участника.

Решение. Предположим противное: из каждой школы приехало не более 22 учеников. Тогда общее число участников не превосходит $22 \cdot 30 = 660 < 663$, что противоречит условию.

5. Есть двое песочных часов: на 8 мин и на 10 мин. Каша варится 12 минут. Как Алие с помощью этих часов сварить кашу?

Решение. *Первый способ.* Запускаем одновременно и те, и другие часы. По истечении 8 минут начинаем варить кашу. По прошествии ещё 2 минут песок в 10-минутных часах закончится, и, перевернув 10-минутные часы, мы сможем отмерить ещё 10 минут. В итоге получим требуемые 12 минут.

Второй способ. Запускаем одновременно и те, и другие часы, а также начинаем варить кашу. По истечении 8 минут переворачиваем часы на 8 минут. По прошествии ещё 2 минут песок в 10-минутных часах закончится, а в 8-минутных часах истечёт 2 минуты. Следовательно, перевернув в очередной раз часы на 8 минут, мы сможем отмерить ещё 2 минуты. В итоге получим требуемые 12 минут.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2024

Казань, 7 апреля 2024 г.

5 класс

Вариант № 3

1. Три мальчика и три девочки съели вместе двадцать четыре конфеты. При этом Рамиль съел больше всех, а Владимир - не меньше всех. Может ли так быть, что девочки съели не меньше, чем мальчики?

Ответ. Может.

Решение. Пусть Рамиль съел 6 конфет, Владимир – 2 конфеты, а третий мальчик съел 1 конфету; и пусть каждая из девочек съела по 5 конфет. Тогда девочки съели 15 конфет, а мальчики – 9 конфет.

2. На острове выбирали вожака. На голосование пришли все дикари с запада, и столько же с востока. После подведения итогов выяснилось, что за первого кандидата проголосовало на 27 дикарей больше, чем за второго. После чего мудрец воскликнул: "Произошла ужасная ошибка!" Как он это понял?

Решение. Предположим, итоги были подведены верно. Поскольку с запада и с востока пришло одинаковое число дикарей, то общее число голосовавших дикарей чётно. С другой стороны, количества голосов за первого и второго кандидатов отличаются на нечётное число, следовательно, это числа разной чётности и потому общее число проголосовавших нечётно. Противоречие.

3. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 2 получить 58?

Ответ. Может.

Решение. Например, можно последовательно получить следующую цепочку чисел: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 46 \rightarrow 92 \rightarrow 29 \rightarrow 58$.

4. На Турнир юных математиков приехали участники из 30 школ. Докажите, что есть школа, из которой приехало не менее 21 ученика, если всего

было 602 участника.

Решение. Предположим противное: из каждой школы приехало не более 20 учеников. Тогда общее число участников не превосходит $20 \cdot 30 = 600 < 602$, что противоречит условию.

5. Есть двое песочных часов: на 6 мин и на 10 мин. Каша варится 14 минут. Как Алие с помощью этих часов сварить кашу?

Решение. *Первый способ.* Запускаем одновременно и те, и другие часы. По истечении 6 минут начинаем варить кашу. По прошествии ещё 4 минут песок в 10-минутных часах закончится, и, перевернув 10-минутные часы, мы сможем отмерить ещё 10 минут. В итоге получим требуемые 14 минут.

Второй способ. Запускаем одновременно и те, и другие часы, а также начинаем варить кашу. По истечении 6 минут переворачиваем часы на 6 минут. По прошествии ещё 4 минут песок в 10-минутных часах закончится, а в 6-минутных часах истечёт 4 минуты. Следовательно, перевернув в очередной раз часы на 6 минут, мы сможем отмерить ещё 4 минуты. В итоге получим требуемые 14 минут.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 7 апреля 2024 г.

5 класс

Вариант № 4

1. Три мальчика и три девочки съели вместе восемнадцать конфет. При этом Рамиль съел больше всех, а Владимир - не меньше всех. Может ли так быть, что девочки съели не меньше, чем мальчики?

Ответ. Может.

Решение. Пусть Рамиль съел 5 конфет, Владимир – 2 конфеты, а третий мальчик съел 1 конфету; пусть девочки съели соответственно 3, 3 и 4 конфеты. Тогда девочки съели 10 конфет, а мальчики – 8 конфет.

2. На острове выбирали вожака. На голосование пришли все дикари с запада, и столько же с востока. После подведения итогов выяснилось, что за первого кандидата проголосовало на 29 дикарей больше, чем за второго. После чего мудрец воскликнул: "Произошла ужасная ошибка!" Как он это понял?

Решение. Предположим, итоги были подведены верно. Поскольку с запада и с востока пришло одинаковое число дикарей, то общее число голосовавших дикарей чётно. С другой стороны, количества голосов за первого и второго кандидатов отличаются на нечётное число, следовательно, это числа разной чётности и потому общее число проголосовавших нечётно. Противоречие.

3. Алина умеет умножать число на два, или менять цифры в числе произвольным образом (главное, чтобы не начиналось на 0). Может ли она из 4 получить 58?

Ответ. Может.

Решение. Например, можно последовательно получить следующую цепочку чисел: $4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 46 \rightarrow 92 \rightarrow 29 \rightarrow 58$.

4. На Турнир юных математиков приехали участники из 30 школ. Докажите, что есть школа, из которой приехало не менее 24 учеников, если всего

был 691 участник.

Решение. Предположим противное: из каждой школы приехало не более 23 учеников. Тогда общее число участников не превосходит $23 \cdot 30 = 690 < 691$, что противоречит условию.

5. Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 12 мин. Каша варится 17 минут. Как Алие с помощью этих часов сварить кашу?

Решение. *Первый способ.* Запускаем одновременно и те, и другие часы. По истечении 7 минут начинаем варить кашу. По прошествии ещё 5 минут песок в 12-минутных часах закончится, и, перевернув 12-минутные часы, мы сможем отмерить ещё 12 минут. В итоге получим требуемые 17 минут.

Второй способ. Запускаем одновременно и те, и другие часы, а также начинаем варить кашу. По истечении 7 минут переворачиваем часы на 7 минут. По прошествии ещё 5 минут песок в 12-минутных часах закончится, а в 7-минутных часах истечёт 5 минут. Следовательно, перевернув в очередной раз часы на 7 минут, мы сможем отмерить ещё 5 минут. В итоге получим требуемые 17 минут.