Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Действительный анализ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Работа завершена:

«____»________________2015 г. _________________Д.М. Ягнова

Работа проверена:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теории функций и приближений
«____»________________2015 г. _________________А.В. Ожегова

Заведующий кафедрой теории функций и приближений,
доктор физико-математических наук, профессор
«____»________________2015 г. _________________Ф.Г. Авхадиев

Казань – 2015 г.

Содержание

Введение

Данная дипломная работа посвящена исследованию метода дискретных вихрей, который часто используется при решении различных задач аэродинамики, электродинамики и теории упругости [1,4,6]. Математическими моделями этих задач часто выступают сингулярные интегральные уравнения с ядрами Гильберта и Коши, а также интегральное уравнение с логарифмической особенностью в ядре.

Впервые метод дискретных вихрей был сформулирован в докторской диссертации С.М. Белоцерковским применительно с сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши на отрезке $[-1, 1]$. После чего началось его активное применение в аэродинамике [2].

Идея метода дискретных вихрей состоит в следующем. Непрерывный вихревой слой, моделирующий несущую поверхность и след за нею, заменяется системой дискретных вихрей. На несущей поверхности выбираются точки называемые расчетными. Взаимное расположение множеств дискретных вихрей и расчетных точек определяется физическим содержанием задачи.

С математической точки зрения метод дискретных вихрей основан на вычислении сингулярного интеграла с помощью квадратурных сумм типа прямоугольников. В результате метод дискретных вих-рей сводит решение сингулярного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются циркуляции дискретных вихрей.

Первоначально этот метод подвергался критики, так как при выборе класса решения не использовалось явное выделение особенности на кромках. Однако после математического обоснования основных идей метода дискретных вихрей, проведенного И.К. Лифановым в докторской диссертации и ряде других работ, метод дискретных вихрей начал использоваться в электродинамике и теории упругости. Следует отметить, что И.К. Лифановым и его учениками проводилось математическое обоснование метода дискретных вихрей с помощью установления погрешности квадратурных формул данного метода.

Б.Г. Габдулхаемым был предложен операторный подход к обоснованию метода дискретных вихрей для ряда классов сингулярных и слабосингулярных интегральных уравнений [3]. В основу исследований брались пространства квадратично суммируемых функций. В результате чего были установлены среднеквадратичные оценки погрешности приближенных решений и равномерная сходимость, если и устанавливалась, то с помощью достаточно больших и громоздких выкладок, как следствие сходимости в среднем.

Целью дипломной работы являлось получение равномерных оценок погрешности приб-лиженных решение, полученных по методу дискретных вихрей для интегральных уравне-ний первого рода с логарифмической особенностью и сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта непосредственно. С этой целью уравнения рассматриваются на специально подобранных пространствах, являющихся некоторыми сужениями пространства непрерывных функций, предложенных в кандидатской диссертации А.В. Ожеговой [8].

Работа состоит из введения, пяти параграфов и заключения. Во введении указывается актуальность выбранной темы, приведен краткий обзор имеющихся результатов, сформулирована цель и задачи работы и описаны полученные результаты. В первом параграфе приводятся вспомогательные результаты из общей теории приближенных методов и конструктивной теории функций. Во втором рассматривается метод дискретных вихрей для сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта. Приводится вычислительная схема метода применительно к данному уравнению, а также формулируется и доказывается теорема о равномерной скорости сходимости приближенного решения к точному. Третий и четверый параграфы посвящены исследованию сходимости метода дискретных вихрей в равномерной метрике для уравнения с логарифмической особенностью в непериодическом и периодическом случае соответственно. В пятом параграфе метод дискретных вихрей, а так же другая модификация метода механимеских квадратур, реализуется численно для уравнений, у которых известно точное решение. Проводится анализ полученных результатов.

§1 Вспомогательные результаты

Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, а $\widetilde{X} \subset X$ и $\widetilde{Y} \subset Y$ -их произвольные подпространства. Рассмотрим два уравнения:

$$Kx = y, \qquad \widetilde{K}\widetilde{x} = \widetilde{y},$$

где $K : X \to Y$ и $\widetilde{K} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ - линейные операторы. Первое из них называется точным уравнением, а соответствующее первому второе - приближенным.

Пространства X и Y, $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ и операторы K и $\widetilde{K}$ являются связанными между собой некоторыми условиями близости, поэтому возможно за приближенное решение точного уравнения принять точное решение приближенного уравнения. Такой метод решения называется *приближенным.*

Определение 1.1. *Прямыми методами* решения операторных уравнений называются такие приближенные методы, которые приводят к решению конечных систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть X и Y - полные линейные нормированные пространства, а $X_n \subseteq X$ и $Y_n \subseteq Y$ (n=1,2,...) - произвольные последовательности их конечномерных подпространств. Рассмотрим два уравнения:

$$Kx = y, \qquad x \in X, y \in Y, \tag{1}$$

$$K_n x_n = y_n, \qquad x_n \in X_n, y_n \in Y_n,$$

где $K : X \to Y$ и $K_n : X_n \to Y_n$ - линейные операторы.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия:

а) $K : X \to Y$ - непрерывно обратимый опеатор;

б) $\varepsilon^{(n)} \equiv \| K - K_n \|_{X \to Y} \to 0$ при $n \to \infty$;

в) $\dim X_n = \dim Y_n = m(n) < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Тогда при всех натуральных n, удовлетворяющих неравенству

$$p_n = \| K^{-1} \| \| K - K_n \| < 1, \quad K - K_n : X_n \to Y,$$

приближенное уравнение (2) имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, причем

$$\| x_n^* \| \leq \| K_n^{-1} \| \| y_n \|, \| K_n^{-1} \| \leq \| K^{-1} \| (1 - p_n)^{-1}.$$

Если, кроме того, выполнено условие

г) $\delta^{(n)} \equiv \| y - y_n \| \to 0$ при $n \to \infty$,

то приближенные решения сходятся к точному решению $x^* \in X$ уравнения (1) по норме пространства X. При этом погрешность приближенного решения может быть оценена любым из неравенств

$$\| K \|^{-1} \alpha_n \leq \| x_n^* \| \leq \alpha_n \| K^{-1} \|, \alpha_n = \| (y - y_n) + (K_n - K) x_n^* \|,$$

$$\| x^* - x_n^* \| \leq \frac{\| K^{-1} \|}{1 - p_n} [\| y - y_n \| + p_n \| y \|] = O(\varepsilon^{(n)} + \delta^{(n)}).$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$.

Определение 1.2. *Наилучшим равномерным приближением* функции $f(x)$ полинома-ми порядка n называется величина

$$E_n(f) = \inf_{F_n \in H_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - F_n(x)|,$$

где H_n - подпространство полиномов степени не выше n.

Определение 1.3. *Многочленом наилучшего равномерного приближения* называется многочлен $Q_n(x)$ степени не выше n, такой что

$$E_n(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - Q_n(x)|.$$

Определение 1.4. Функция p(t) называется *весовой функцией* на конечном интервале (-1,1), если p(t) интегрируема, $p(t) \geq 0$ и выполняется условие

$$0 < \int_{-1}^{1} p(t) dt < \infty.$$

О п р е д е л е н и е 1.5. *Квадратурной формулой* называется приближенная формула для вычисления определенного интеграла вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k),$$

где C_k - некоторые вещественные числа, $p(x)$ - весовая функция, а $x_k \in [a,b], k = \overline{1,n}$ - узлы.

В частности *квадратурная формула Гаусса* имеет следующий вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\tau_k), \qquad \tau_k = \cos\frac{2k-1}{2N}.$$

Пусть M - некоторая положительно определенная постоянная.

О п р е д е л е н и е 1.6. *Класс* $W^rH_\alpha \equiv W^rH_\alpha(M;a,b)(0 < \alpha \leq 1, \quad r0)$ - класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a,b]$ производные r порядка, которые при всех x' и x'' из $[a,b]$ удовлетворяют условию

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha.$$

О п р е д е л е н и е 1.7. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ с шагом $\delta > 0$ называется величина

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|.$$

О п р е д е л е н и е 1.8. *Класс* $W^rH_\omega \equiv W^rH_\omega(\delta;a,b)(0 < \delta \leq 1)$ - класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a,b]$ производные r порядка, которые удовлетворяют условию

$$\omega(f^{(r)},\delta) \leq \omega(\delta),$$

где $\omega(\delta)$ заданный модуль непрерывности.

О п р е д е л е н и е 1.9. Задача определения решения x по y называется *корректно поставленной* на паре пространств (X,Y) если выполнены условия:

1) для любого $y \in Y$ существует решение $x \in X$;

2) решение $x \in X$ определено однозначно;

3) задача устойчива на пространствах (X, Y), то есть при малых изменениях $y \in Y$ мало изменяется $x \in X$.

§2 Метод дискретных вихрей для уравнений с ядром Гильберта

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (кратко: с.и.у.) первого рода с ядром Гильберта вида

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\sigma - s}{2} x(\sigma) d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s;\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \qquad s \in [0, 2\pi], \tag{2.1}$$

где $h(s, \sigma)$, $y(s)$ - известные непрерывные 2π-периодические функции, а $x(\sigma)$ - искомая функция, а сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$Jx \equiv J(x; s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\sigma - s}{2} x(\sigma) d\sigma \tag{2.2}$$

понимается в смысле главного значения по Коши.

За пространства искомых элементов и правых частей примем пространство $V = V[0, 2\pi]$ - линенейное пространство непрерывных 2π-периодических функций, для которых сингулярный интеграл (2.2), понимаемый в смысле главного значения по Коши, является также непрерывной функцией [8].

Норму пространства V определим соотношением

$$\|x\|_V = \|x\|_{\widetilde{C}} + \|Jx\|_{\widetilde{C}}, \qquad x \in V, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{C} = \widetilde{C}[0, 2\pi]$ - пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой вида

$$\|x\|_{\widetilde{C}} = \max_{0 \le s \le 2\pi} |x(s)|.$$

На отрезке $[0,2\pi]$ выберем две системы равноотстоящих узлов

$$\sigma_k = \frac{2(k-1)\pi}{N}, \qquad k = \overline{1,N}, \tag{2.5}$$

$$s_j = \frac{(2j-1)\pi}{N}, \qquad j = \overline{1,N} \tag{2.6}$$

и приближенные значения искомой функции в узлах $x_n(\sigma_k)$ будем искать из системы линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ)

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \cot\frac{\sigma_k - s_j}{2} x_n(\sigma_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k) = y(s_j), \qquad j = \overline{1,N}. \tag{2.7}$$

Обозначим $x_n^*(\sigma_k)$ - решение СЛАУ (2.7), $x^*(s)$- точное решение исходного уравнения (2.1). Тогда приближенное решение уравнения (2.1) $x_N^*(s) \approx x^*(s)$ может быть записано в виде

$$x_N^*(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} x_n^*(\sigma_k) D_n(s-\sigma_k), \tag{2.8}$$

где

$$D_n(s-\sigma_k) = \frac{\sin N(s-\sigma_k)/2}{2\sin(s-\sigma_k)/2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s-\sigma_k) \tag{2.9}$$

- ядро Дирихле при $N = 2n+1$.

Подставляя $x_n(\tau)$ вместо $x(\tau)$ в интеграл (2.2) и используя следующие известные форму-лы [1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\sigma - s}{2} \sin k\sigma d\sigma = \cos ks \qquad n = 1,2,..., \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\sigma - s}{2} \cos k\sigma d\sigma = -\sin ks \qquad n = 0,1,..., \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\sigma + i\sum_{k=1}^{n}\sin k\sigma =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \exp^{ik\sigma} = \frac{\sin N\sigma/2}{2\sin\sigma/2} + \frac{i}{2}[\cot\frac{\sigma}{2} - \frac{\cos N\sigma/2}{\sin\sigma/2}] \tag{2.12}$$

получаем

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{\sigma - s_j}{2} x_n(\sigma) d\sigma = \sum_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{N} x_n(\sigma_k)[\cot\frac{\sigma_k - s_j}{2} - \frac{\cos N(\sigma_k - s_j)/2}{\sin(\sigma_k - s_j)/2}].$$

В [1] показано, что

$$\sin\frac{(\sigma_k - s_j)}{2} = \sin\frac{2(k-j)\pm 1}{2}\pi \neq 0,$$

$$\cos\frac{N(\sigma_k - s_j)}{2} = \cos\frac{2N(k-j)\pm 1}{2N}\pi = 0.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{\sigma - s_j}{2}x_n(\sigma)d\sigma = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n(\sigma_k)\cot\frac{\sigma_k - s_j}{2}. \qquad (2.13)$$

Тогда вычислительная схема метода дискретных вихрей (2.7) получается из (2.13) следующим образом.

Подставляем $x_n(\tau)$ вместо искомой функции $x(\tau)$ в исходное уравнение (2.1).

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\sigma - s}{2}x_n(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s;\sigma)x_n(\sigma)d\sigma \approx y(s)$$

Приравниваем левые и правые части в узлах s_j (2.6).

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\sigma - s_j}{2}x_n(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s_j;\sigma)x_n(\sigma)d\sigma = y(s_j) \qquad j = \overline{1,N}$$

К первому интегралу применяем формулу (2.13), а второй вычисляем по квадратурной формуле прямоугольников.

Таким образом, получаем СЛАУ

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cot\frac{\sigma_k - s_j}{2}x_n(\sigma_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k) = y(s_j), \qquad j = \overline{1,N}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть уравнение (2.1) однозначно разрешимо в пространстве V при любой правой части $y \in V$, ядро $h(s,\sigma) \in W^r H_\omega$ по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть $y(s) \in W^r H_\omega$,

$r \geq 0$. Тогда при всех $n \geq n_0$ СЛАУ (2.7) имеет единственное решение $x_n^*(\sigma_k)$, $k = \overline{1, N}$ и приближенное решение

$$x_N^*(s) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} x_n^*(\sigma_k) D_n(s - \sigma_k)$$

сходится к точному равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_{\widetilde{C}} = O(\frac{\ln n}{n^r} \omega(\delta)). \tag{2.14}$$

Доказательство. Пусть

$$\rho x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) d\sigma.$$

Тогда с.и.у. (1.1) можно записать в операторном виде следующим образом

$$Gx \equiv Jx + \rho(hx) = y, \quad x \in V, y \in V. \tag{2.15}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_n$ - оператор Лагранжа, который ставит в соответсвие функции $x \in \widetilde{C}$ ее тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа по узлам (2.5) или (2.6)

$$\mathcal{L}_n x \equiv \mathcal{L}_n(x, \sigma) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(\sigma_k) D_n(\sigma - \sigma_k). \tag{2.16}$$

Учитывая алгоритм построения вычислительной схемы метода дискретных вихрей, СЛАУ (2.7) можно записать в операторном виде

$$G_n x_n \equiv \mathcal{L}_n^s J x_n + \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (h x_n) =$$

$$= J x_n + \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (h x_n) = \mathcal{L}_n^s y, \tag{2.17}$$

где $x_n \in H_n^T \subset V, y \in H_n^T \subset V$, $H_n^T (\subset \widetilde{C})$ - подпространство тригонометрических полиномов степени не выше n, $\mathcal{L}_n^\sigma$ и $\mathcal{L}_n^s$ - тригонометрические интерполяционные полиномы Лагранжа по узлам (2.5) и (2.6) соответственно.

Для любого $x_n \in H_n^T \subset V$ с учетом (2.3) находим

$$\|Gx_n - G_n x_n\|_V = \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (hx_n)\|_V \leq$$

$$\leq \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho(hx_n)\|_V + \|\mathcal{L}_n^s \rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (hx_n)\|_V.$$

Оценим первое слагаемое

$$\|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho(hx_n)\|_V = \|\rho[(hx_n) - \mathcal{L}_n^s (hx_n)]\|_V =$$

$$= \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [h(s,\sigma) - \mathcal{L}_n^s (h; s, \sigma)] x_n(\sigma) d\sigma\|_V \leq \max_{0\leq\sigma\leq 2\pi} \|h - \mathcal{L}_n^s h\|_V \|x_n\|_V.$$

С учетом леммы 3.2 из [8] имеем

$$\|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho(hx_n)\|_V = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_V.$$

Второе слагаемое оценивается с помощью леммы 3.2 из [8] следующим образом

$$\|\mathcal{L}_n^s \rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (hx_n)\|_V \leq \|\mathcal{L}_n^s\|_{\widetilde{C}\to V} \|\rho[hx_n - \mathcal{L}_n^\sigma (hx_n)]\|_{\widetilde{C}} \leq$$

$$\leq (\frac{8}{\pi} + \frac{1}{n} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1)) \times \max_{0\leq s\leq 2\pi} |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [h(s,\sigma) - \mathcal{L}_n^\sigma (h; s, \sigma)] x_n(\sigma) d\sigma| \leq$$

$$\leq (\frac{8}{\pi} + \frac{1}{n} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1)) \times \max_{0\leq s\leq 2\pi} \|h - \mathcal{L}_n^\sigma h\|_{\widetilde{C}} \|x_n\|_{\widetilde{C}} = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_V.$$

Таким образом, получаем

$$\|Gx_n - G_n x_n\|_V = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_V.$$

Погрешность правых частей уравнений (2.15) и (2.17) также оценивается с помощью леммы 3.2 из [8]

$$\|y - \mathcal{L}_n^s y\|_V = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta)).$$

Из последних двух оценок и теоремы 1.1 следует утверждение доказываемой теоремы.

Т е о р е м а 2.2. Пусть уравнение (2.1) однозначно разрешимо в пространстве V при любой правой части $y \in V$, ядро $h(s,\sigma) \in V$ по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть $y(s) \in V$. Тогда при всех

$n \geq n_0$ СЛАУ (2.7) имеет единственное решение $x_n^*(\sigma_k)$, $k = \overline{1, N}$ и приближенное решение

$$x_N^*(s) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} x_n^*(\sigma_k) D_n(s - \sigma_k)$$

сходится к точному равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_V = O(\ln n)[E_n^s(h)_V + E_n^\sigma(h)_V + E_n(y)_V]. \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть $y_n(s)$ - полином наилучшего приближения функции $y(s)$, тогда

$$\|y - \mathcal{L}_n^s y\|_V \leq \|y - y_n\|_V + \|y_n - \mathcal{L}_n^s y\|_V =$$

$$= \|y - y_n\|_V + \|\mathcal{L}_n^s y_n - \mathcal{L}_n^s y\|_V = \|y - y_n\|_V + \|\mathcal{L}_n^s\|_{V \to V} \|y - y_n\|_V =$$

$$= [1 + (\frac{8}{\pi} + \frac{1}{n} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}(2n+1))] E_n(y)_V = O(\ln n) E_n(y)_V.$$

Теперь оценим

$$\|Gx_n - G_n x_n\|_V = \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (hx_n)\|_V \leq \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho(hx_n)\|_V +$$

$$+ \|\mathcal{L}_n^s \rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^\sigma (hx_n)\|_V = \|\rho[(h - \mathcal{L}_n^s h) x_n]\|_V +$$

$$+ \|\mathcal{L}_n^s\|_{V \to V} \|\rho(hx_n) - \rho(\mathcal{L}_n^\sigma h) x_n\|_V = \|\rho[(h - \mathcal{L}_n^\sigma h) x_n]\|_V +$$

$$+ \|\mathcal{L}_n^s\|_{V \to V} \|\rho[(h - \mathcal{L}_n^\sigma h) x_n]\|_V \leq \max_{0 \leq s \leq 2\pi} \|h - \mathcal{L}_n^\sigma h\|_V \|x_n\|_V +$$

$$+ \|\mathcal{L}_n^s\|_{V \to V} \max_{0 \leq s \leq 2\pi} \|h - \mathcal{L}_n^\sigma h\|_V \|x_n\|_V =$$

$$= [1 + (\frac{8}{\pi} + \frac{1}{n} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}(2n+1))] \max_{0 \leq s \leq 2\pi} \|h - \mathcal{L}_n^\sigma h\|_V \|x_n\|_V =$$

$$= O(\ln n)[E_n^s(h)_V + E_n^\sigma(h)_V] \|x_n\|_V.$$

С помощью получившихся оценок и теоремы 1.1 получаем утверждение доказываемой теоремы.

§3 Метод дискретных вихрей для уравнений с логарифмической особенностью на отрезке вещественной оси

Рассмотрим с.и.у. первого рода с логарифмической собобенностью на отрезке $[-1,1]$

$$x \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau-t|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t;\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau = y(t), \qquad t\in[-1,1], \tag{3.1}$$

где $h(t,\tau)$, $y(t)$ - известные непрерывные на отрезке $[-1,1]$ функции, а $x(\tau)$ - искомая функция, а сингулярный интеграл с логарифмической особенностью

$$Sx \equiv S(x;s) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau-t|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

понимается как несобственный интеграл.

Пусть

$$Ix \equiv I(x;s) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{3.3}$$

- сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемый в смысле главного значения по Коши.

В качестве пространства искомых элементов возьмем [8] линейное пространство $V_\rho = V_\rho[-1,1]$ непрерывных функций $x(t)$, для которых сингулярный интеграл $\frac{1}{\rho}I(\rho x)$ является также непрерывной функцией, где $\rho(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}$.

Норму пространства V_ρ определим соотношением

$$\|x\|_{V_\rho} = \|x\|_C + \|\frac{1}{\rho}I(\rho x)\|_C, \qquad x\in V_\rho, \tag{3.4}$$

где $C=C[-1,1]$ - пространство непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$ с обычной нормой вида

$$\|x\|_C = \max_{-1\le t\le 1}|x(t)|.$$

В качестве пространства правых частей возьмем [8] линейное пространство $V_q^1 = V_q^1[-1,1]$ непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$, для которых сингулярный интеграл $I(qy')$, является также непрерывной функцией, где $q(\tau) = \frac{1}{\rho(\tau)} = \sqrt{1-\tau^2}$.

Норму пространства V_q определим соотношением

$$\|y\|_{V_q^1} = \|y\|_C + \|I(qy')\|_{V_\rho}, \qquad y \in V_q^1. \tag{3.5}$$

Метод дискретных вихрей для уравнения (3.1) заключается в следующем. На отрезке $[-1, 1]$ выберем две системы равноотстоящих узлов [4]

$$\tau_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2N}, \qquad k = \overline{1, N}, \tag{3.6}$$

$$t_j = \cos(j - \frac{1}{3})\frac{\pi}{N}, \qquad j = \overline{1, N} \tag{3.7}$$

и приближенные значения искомой функции в узлах $x_n(\tau_{k)}$ будем искать из СЛАУ

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln|\tau_k - t_j| x_n(\tau_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(t_j;\tau_k)x_n(\tau_k) = y(t_j), \qquad j = \overline{1, N}. \tag{3.9}$$

Обозначим $x_n^*(\tau_k)$ - решение СЛАУ (3.9), $x^*(s)$- точное решение исходного уравнения (3.1). Тогда приближенное решение уравнения (3.1)$x_N^*(t) \approx x^*(t)$ может быть записано в виде

$$x_N^*(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k T_{k-1}(t) = \frac{T_n(t)}{N}\sum_{k=1}^{N} x_n^*(\tau_k)\frac{(-1)^{k-1}}{\tau - \tau_k}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2N}, \tag{3.10}$$

где $T_k(t) = \cos k \arccos t$ - полином Чебышева первого рода.

Вычислительная схема метода дискретных вихрей (3.9) получается следующим образом.

В уравнении (3.1) $x(\tau)$ заменяется на $x_n(\tau)$ - тригонометрический полином порядка не выше n

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau - t|}{\sqrt{1-\tau^2}}x_n(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t;\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}x_n(\tau)d\tau = y(t)$$

и к интегралам применяется квадратурная формула Гаусса

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\tau_k - t|x_n(\tau_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h(t;\tau_k)x_n(\tau_k) \approx y(t).$$

В монографии [7] показано, что квадратурная формула (3.11) точна в выбранных узлах, то есть

$$S(x;t_j) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau - t_j|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n(\tau_k)\ln|\tau_k - t_j| = S_n(x;t_j) \qquad x \in C[-1,1], j = \overline{1,N} \qquad (3.11)$$

Тогда, приравнивая левые и правые части в узлах t_j (3.7), получаем СЛАУ (3.9)

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\tau_k - t_j|x_n(\tau_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h(t_j;\tau_k)x_n(\tau_k) = y(t_j), \qquad j = \overline{1,N}.$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. Пусть уравнение (3.1) однозначно разрешимо в пространстве V_q^1 при любой правой части $y \in V_q^1$, ядро $h(t,\tau) \in W^{r+1}H_\omega$ по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть $y(t) \in W^{r+1}H_\omega$, $r \geq 0$. Тогда при всех $n \geq n_0$ СЛАУ (3.9) имеет единственное решение $x_n^*(\tau_k)$, $k = \overline{1,N}$ и приближенное решение

$$x_N^*(t) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k T_{k-1}(t) = \frac{T_n(t)}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n^*(\tau_k)\frac{(-1)^{k-1}}{\tau - \tau_k}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2N}$$

сходится к точному равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_C = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta)). \qquad (3.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\varrho x = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}x(\tau)d\tau.$$

Тогда с.и.у. (3.1) можно записать в следующем операторном виде

$$Kx \equiv Sx + \varrho(hx) = y, \quad x \in V_\rho, y \in V_q^1. \tag{3.13}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_n$ - оператор Лагранжа, который ставит в соответсвие функции $x \in C$ ее алгебраический интерполяционный полином Лагранжа по узлам (3.6) или (3.7)

$$\mathcal{L}_n x \equiv \mathcal{L}_n(x, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(\tau_k) l_k(\tau), \tag{3.14}$$

где

$$l_k(\tau) = \prod_{k=1 k\neq i}^{N} \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k}.$$

Из формулы (3.12) следует, что СЛАУ (3.9) можно представить в виде

$$K_n x_n \equiv \mathcal{L}_n^t S x_n + \mathcal{L}_n^t \varrho \mathcal{L}_n^\tau (h x_n) =$$

$$= S x_n + \mathcal{L}_n^t \varrho \mathcal{L}_n^\tau (h x_n) = \mathcal{L}_n^t y, \tag{3.15}$$

где $x_n \in H_n \subset V_\rho, y \in H_n \subset V_q^1$, $\mathcal{L}_n^\tau$ и $\mathcal{L}_n^t$ - алгебраические интерполяционные полиномы Лагранжа по узлам (3.6) и (3.7) соответственно.

Для любого $x_n \in H_n \subset V_\rho$ с учетом (3.5) находим

$$\|K x_n - K_n x_n\|_{V_q^1} = \|\varrho(h x_n) - \mathcal{L}_n^t \varrho \mathcal{L}_n^\tau (h x_n)\|_{V_q^1} \leq$$

$$\|\varrho(h x_n) - \mathcal{L}_n^t \varrho(h x_n)\|_{V_q^1} + \|\mathcal{L}_n^t \varrho(h x_n) - \mathcal{L}_n^t \varrho \mathcal{L}_n^\tau (h x_n)\|_{V_q^1}.$$

Оценим первое слагаемое

$$\|\varrho(h x_n) - \mathcal{L}_n^t \varrho(h x_n)\|_{V_q^1} = \|\varrho[(h x_n) - \mathcal{L}_n^t (h x_n)]\|_{V_q^1} =$$

$$= \|\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} [h(t,\tau) - \mathcal{L}_n^t (h; t, \tau) x_n(\tau) d\tau]\|_{V_q^1} \leq \max_{-1 \leq \tau \leq 1} \|h - \mathcal{L}_n^t h\|_{V_q^1} \|x_n\|_{V_\rho}.$$

С учетом леммы 3.2 из [8] имеем

$$\|\varrho(h x_n) - \mathcal{L}_n^t \varrho(h x_n)\|_{V_q^1} = O(\frac{\ln n}{n^r} \omega(\delta)) \|x_n\|_{V_\rho}.$$

Второе слагаемое оценивается с помощью леммы 3.2 из [8] следующим образом

$$\|\mathcal{L}_n^t\varrho(hx_n) - \mathcal{L}_n^t\varrho\mathcal{L}_n^\tau(hx_n)\|_{V_q^1} = \|\mathcal{L}_n^t\varrho[hx_n - (\mathcal{L}_n^\tau(h)x_n]\|_{V_q^1} =$$

$$= \|\mathcal{L}_n^t\|_{V_q^1}\|\varrho[hx_n - (\mathcal{L}_n^\tau(h)x_n]\|_C =$$

$$= O(n\ln n)\cdot \max_{-1\le t\le 1}\|h - \mathcal{L}_n^\tau h\|_C\|x_n\|_C = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_C.$$

Таким образом, получаем

$$\|Kx_n - K_nx_n\|_{V_q^1} = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_C.$$

Погрешность правых частей уравнений (3.13) и (3.14) также оценивается с помощью леммы 3.2 из [1]

$$\|y - \mathcal{L}_n^s y\|_{V_q^1} = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta)).$$

Из последних двух оценок и теоремы 1.1 следует утверждение доказываемой теоремы.

Т е о р е м а 3.2. Пусть уравнение (3.1) однозначно разрешимо в пространстве V_q^1 при любой правой части $y \in V_q^1$, ядро $h(t,\tau) \in V_\rho$ по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть $y(t) \in V_q^1$. Тогда при всех $n \ge n_0$ СЛАУ (3.8) имеет единственное решение $x_n^*(\tau_k)$, $k = \overline{1,N}$ и приближенное решение

$$x_N^*(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k T_{k-1}(t) = \frac{T_n(t)}{N}\sum_{k=1}^N x_n^*(\tau_k)\frac{(-1)^{k-1}}{\tau - \tau_k}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2N}$$

сходится к точному равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_{V_q^1} = O(\ln n)[E_n^t(h)_{V_\rho} + E_n^\tau(h)_{V_\rho} + E_n(y)_{V_q^1}]. \qquad (3.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y_n(t)$ - полином наилучшего приближения функции $y(t)$, тогда

$$\|y - \mathcal{L}_n^t y\|_{V_q^1} \le \|y - y_n\|_{V_q^1} + \|y_n - \mathcal{L}_n^t y\|_{V_q^1} = \|y - y_n\|_{V_q^1} + \|\mathcal{L}_n^t y_n - \mathcal{L}_n^t y\|_{V_q^1} =$$

$$= \|y - y_n\|_{V_q^1} + \|\mathcal{L}_n^t\|_{V_q^1}\|y - y_n\|_{V_q^1} = (1 + O(\ln n))E_n(y)_{V_q^1} = O(\ln n)E_n(y)_{V_q^1}.$$

Оценим

$$\|Kx_n - K_nx_n\|_{V_q^1} = \|\varrho(hx_n) - \mathcal{L}_n^t\varrho\mathcal{L}_n^\tau(hx_n)\|_{V_q^1} \le \|\varrho(hx_n) - \mathcal{L}_n^t\varrho(hx_n)\|_{V_q^1} +$$

$$+ \|\mathcal{L}_n^t\varrho(hx_n) - \mathcal{L}_n^t\varrho\mathcal{L}_n^\tau(hx_n)\|_{V_q^1} = \|\varrho[(h - \mathcal{L}_n^\tau h)x_n]\|_{V_q^1} +$$

$$+ \|\mathcal{L}_n^t\|_{V_q^1}\|\varrho(hx_n) - \varrho(\mathcal{L}_n^\tau h)x_n\|_{V_q^1} =$$

$$= \|\varrho[(h - \mathcal{L}_n^\tau h)x_n]\|_{V_q^1} + \|\mathcal{L}_n^t\|_{V_q^1}\|\varrho[(h - \mathcal{L}_n^\tau h)x_n]\|_{V_q^1} \le$$

$$\le \max_{-1\le t\le 1}\|h - \mathcal{L}_n^\tau h\|_{V_\rho}\|x_n\|_{V_\rho} + \|\mathcal{L}_n^t\|_{V_q^1}\max_{-1\le t\le 1}\|h - \mathcal{L}_n^\tau h\|_{V_\rho}\|x_n\|_{V_\rho} =$$

$$= (1 + O(\ln n))\max_{-1\le t\le 1}\|h - \mathcal{L}_n^\tau h\|_{V_\rho}\|x_n\|_{V_\rho} = O(\ln n)[E_n^t(h)_V + E_n^\tau(h)_V]\|x_n\|_{V_\rho}.$$

С помощью получившихся оценок и теоремы 1.1 получаем утверждение доказываемой теоремы.

§4 Метод дискретных вихрей для уравнений с логарифмической особенностью. Периодический случай

Рассмотрим с.и.у. первого рода с логарифмической особенностью на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\widetilde{K}x \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\sin\frac{s-\sigma}{2}|x(\sigma)d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s;\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \qquad s \in [0, 2\pi], \tag{4.1}$$

где $h(s,\sigma)$, $y(s)$ - известные непрерывные 2π-периодические функции, а $x(\sigma)$ - искомая функция, а сингулярный интеграл с логарифмической особенностью

$$\widetilde{S}x \equiv \widetilde{S}(x;s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\sin\frac{s-\sigma}{2}|x(\sigma)d\sigma \tag{4.2}$$

понимается как несобственный интеграл.

Введем линейные нормированные пространства искомых элеменотов и правых частей [8].

За пространство искомых элементов примем пространство $V = V[0, 2\pi]$ - линенейное пространство непрерывных 2π-периодических функций, для которых сингулярный интеграл (2.2), понимаемый в смысле главного значения по Коши, является также непрерывной функцией.

Норму пространства V определим соотношением

$$\|x\|_V = \|x\|_{\widetilde{C}} + \|Jx\|_{\widetilde{C}}, \qquad x \in V, \tag{4.3}$$

где $\widetilde{C} = \widetilde{C}[0, 2\pi]$ - пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой вида

$$\|x\|_{\widetilde{C}} = \max_{0 \le s \le 2\pi} |x(s)|.$$

За пространства правых частей примем пространство $V^1 = V^1[0, 2\pi]$ - линенейное пространство непрерывных 2π-периодических функций, имеющих первые производные из пространства $V[0, 2\pi]$.

Норму пространства V^1 определим соотношением

$$\|y\|_{V^1} = \|y\|_{\widetilde{C}} + \|y'\|_V, \qquad y \in V^1. \tag{4.4}$$

На отрезке $[0, 2\pi]$ выберем две системы равноотстоящих узлов

$$\sigma_k = \frac{2(k-1)\pi}{N}, \qquad k = \overline{1, N}, \tag{4.5}$$

$$s_j = \frac{(2j-1)\pi}{N}, \qquad j = \overline{1, N} \tag{4.6}$$

и приближенные значения искомой функции в узлах $x_n(\sigma_k)$ будем искать из системы линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ)

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln|\sin\frac{s_j - \sigma_k}{2}|x_n(\sigma_k) +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k) = y(s_j), \qquad j=\overline{1,N}, \tag{4.7}$$

Обозначим $x_n^*(\sigma_k)$ - решение СЛАУ (4.7), $x^*(s)$- точное решение исходного уравнения (4.1). Тогда приближенное решение уравнения (4.1) $x_N^*(s) \approx x^*(s)$ может быть записано в виде

$$x_N^*(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} x_n^*(\sigma_k)D_n(s-\sigma_k), \tag{4.8}$$

где

$$D_n(s-\sigma_k) = \frac{\sin N(s-\sigma_k)/2}{2\sin(s-\sigma_k)/2} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(s-\sigma_k) \tag{4.9}$$

- ядро Дирихле при $N = 2n+1$.

Вычислительная схема метода дискретных вихрей (4.7) получается следующим образом.

В уравнении

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\sin\frac{s-\sigma}{2}|x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s;\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s)$$

заменяем подинтегральную функцию полиномом Лагранжа по узлам σ_k.

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\sin\frac{s-\sigma_k}{2}|x_n(\sigma_k)D_n(\sigma-\sigma_k)d\sigma)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s;\sigma_k)x_n(\sigma_k)D_n(\sigma-\sigma_k)) \approx y(s)$$

$$-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\sin\frac{s-\sigma_k}{2}|x_n(\sigma_k)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(\sigma-\sigma_k)d\sigma)+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s;\sigma_k)x_n(\sigma_k)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(\sigma-\sigma_k))d\sigma) \approx y(s)$$

Приравниваем левые и правые части в узлах s_j (4.6).

$$-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\sin\frac{s_j-\sigma_k}{2}|x_n(\sigma_k)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(\sigma-\sigma_k)d\sigma)+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k)(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(\sigma-\sigma_k))d\sigma)=y(s_j), \qquad j=\overline{1,N}$$

В силу свойства ядра Дирихле

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(\sigma)d\sigma=1$$

получаем, что тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(\sigma-\sigma_k)d\sigma=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, получаем СЛАУ

$$-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\sin\frac{s_j-\sigma_k}{2}|x_n(\sigma_k)\frac{1}{2}+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k)\frac{1}{2}=y(s_j), \qquad j=\overline{1,N}$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln|\sin\frac{s_j-\sigma_k}{2}|x_n(\sigma_k)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k)=y(s_j), \qquad j=\overline{1,N}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 4.1. Пусть уравнение (4.1) однозначно разрешимо в пространстве V^1 при любой правой части $y\in V^1$, ядро $h(s,\sigma)\in W^{r+1}H_\omega$ по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть $y(s)\in W^{r+1}H_\omega$, $r\geq 0$. Тогда при всех $n\geq n_0$ СЛАУ (4.7) имеет единственное решение $x_n^*(\sigma_k)$, $k=\overline{1,N}$ и приближенное решение

$$x_N^*(s)=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n^*(\sigma_k)D_n(s-\sigma_k)$$

сходится к точному равномерно со скоростью

$$\|x^*-x_N^*\|_{\widetilde{C}}=O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta)). \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\rho x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\sigma)d\sigma.$$

Тогда с.и.у. (4.1) можно записать в следующем операторном виде

$$\widetilde{K}x \equiv \widetilde{S}x + \rho(hx) = y, \quad x \in V, y \in V^1. \tag{4.11}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_n$ - оператор Лагранжа, который ставит в соответсвие функции $x \in \widetilde{C}$ ее тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа по узлам (4.5) или (4.6)

$$\mathcal{L}_n x \equiv \mathcal{L}_n(x, \sigma) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(\sigma_k) D_n(\sigma - \sigma_k). \tag{4.12}$$

Делая замену переменных $\tau = \cos\sigma$ и $t_j = \cos s_j$ в интеграле (3.11), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau - t_j|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\frac{\ln|\cos\sigma - \cos s_j|}{\sqrt{1-\cos^2\sigma}}x(\cos\sigma)d(\cos\sigma) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln|2\sin\frac{\sigma + s_j}{2}\sin\frac{s_j - \sigma}{2}|x(\cos\sigma)d\sigma = \frac{\ln 2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\cos\sigma)d\sigma +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln|\sin\frac{\sigma + s_j}{2}|x(\cos\sigma)d\sigma + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln|\sin\frac{s_j - \sigma}{2}|x(\cos\sigma)d\sigma.$$

При $\sigma = -\sigma$ во втором интеграле и объединяя второй и третий интегралы получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau - t_j|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{\ln 2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\cos\sigma)d\sigma + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin\frac{s_j - \sigma}{2}|x(\cos\sigma)d\sigma.$$

Выполняя аналогичные преобразования для выражения, стоящего в правой части формулы (3.11) имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n(\tau_k)\ln|\tau_k - t_j| = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k)\ln|\cos\sigma_k - \cos s_j| =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k)|(\ln 2 + \ln|\sin\frac{\sigma_k + s_j}{2}| + \ln|\sin\frac{s_j - \sigma_k}{2}|) =$$

$$= \frac{\ln 2}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k)\ln|\sin\frac{\sigma_k + s_j}{2}|+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k)\ln|\sin\frac{s_j-\sigma_k}{2}| = \frac{\ln 2}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k)+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma)\ln|\sin\frac{s_j-\sigma_k}{2}|.$$

Таким образом,

$$\widetilde{S}(x;t_j) = \frac{\ln 2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\cos\sigma)d\sigma + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin\frac{s_j-\sigma}{2}|x(\cos\sigma)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\tau-t_j|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)d\tau = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n(\tau_k)\ln|\tau_k-t_j| =$$

$$= \frac{\ln 2}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma_k) + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}x(\cos\sigma)\ln|\sin\frac{s_j-\sigma_k}{2}| = \widetilde{S}_n(x;t_j). \tag{4.13}$$

Тогда СЛАУ (4.7) можно представить в виде

$$\widetilde{K}_n x_n \equiv \mathcal{L}_n^s\widetilde{S}x_n + \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n) =$$

$$= \widetilde{S}x_n + \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n) = \mathcal{L}_n^s y, \tag{4.14}$$

где $x_n \in H_n^T \subset V, y \in H_n^T \subset V^1$, $H_n^T(\subset \widetilde{C})$ - подпространство тригонометрических полиномов степени не выше n, $\mathcal{L}_n^\sigma$ и $\mathcal{L}_n^s$ - тригонометрические интерполяционные полиномы Лагранжа по узлам (4.5) и (4.6) соответственно.

Оценим близость точного и аппроксимирующего оператора на элементе $x_n \in H_n^T \subset V$

$$\|\widetilde{K}x_n - \widetilde{K}_n x_n\|_{V^1} = \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n)\|_{V^1} \le$$

$$\le \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho(hx_n)\|_{V^1} + \|\mathcal{L}_n^s\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n)\|_{V^1}.$$

Первое слагаемое оценим, используя оценки леммы 3.2 из [8]

$$\|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho(hx_n)\|_{V^1} = \|\rho[(hx_n) - \mathcal{L}_n^s(hx_n)]\|_{V^1} = \|\rho[(hx_n) - \mathcal{L}_n^\sigma)hx_n]\|_{V^1} =$$

$$= \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(s,\sigma) - \mathcal{L}_n^\sigma(h;s,\sigma)]x_n(\sigma)d\sigma\|_{V^1} \le$$

$$\le \max_{0\le\sigma\le 2\pi}\|h - \mathcal{L}_n^\sigma h\|_V\|x_n\|_V = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_V.$$

Второе слагаемое оценивается с помощью леммы 3.2 и неравенства Бернштейна из [8] следующим образом

$$\|\mathcal{L}_n^s\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n)\|_{V^1} \leq (1+n)(\frac{8}{\pi} + \frac{1}{n} + \frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1))\times$$

$$\times \max_{0\leq s\leq 2\pi}|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(s,\sigma) - \mathcal{L}_n^\sigma(h;s,\sigma)]x_n(\sigma)d\sigma| \leq$$

$$\leq (1+n)(\frac{8}{\pi}+\frac{1}{n}+\frac{4}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}(2n+1))\times\max_{0\leq s\leq 2\pi}\|h-\mathcal{L}_n^\sigma h\|_{\widetilde{C}}\|x_n\|_{\widetilde{C}} = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_V.$$

Таким образом, получаем

$$\|\widetilde{K}x_n - \widetilde{K}_n x_n\|_{V^1} = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta))\|x_n\|_V.$$

Погрешность правых частей уравнений (4.11) и (4.14) также оценивается с помощью леммы 3.2 из [8]

$$\|y - \mathcal{L}_n^s y\|_{V^1} = O(\frac{\ln n}{n^r}\omega(\delta)).$$

Из последних двух оценок и теоремы 1.1 следует утверждение доказываемой теоремы.

Т е о р е м а 4.2. Пусть уравнение (4.1) однозначно разрешимо в пространстве V^1 при любой правой части $y \in V^1$, ядро $h(s,\sigma) \in V$ по каждой из переменных равномерно относительно другой и правая часть $y(s) \in V^1$. Тогда при всех $n \geq n_0$ СЛАУ (4.7) имеет единственное решение $x_n^*(\sigma_k)$, $k = \overline{1,N}$ и приближенное решение

$$x_N^*(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} x_n^*(\sigma_k)D_n(s-\sigma_k)$$

сходится к точному равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_V = O(\ln n)[E_n^t(h)_V + E_n^\tau(h)_V + E_n(y)_{V^1}]. \tag{4.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y_n(s)$ - полином наилучшего равномерного приближения функции $y(s)$, тогда

$$\|y-\mathcal{L}_n^s y\|_{V^1} \le \|y-y_n\|_{V^1} + \|y_n-\mathcal{L}_n^s y\|_{V^1} = \|y-y_n\|_{V^1} + \|\mathcal{L}_n^s y_n - \mathcal{L}_n^s y\|_{V^1} =$$

$$= \|y-y_n\|_{V^1} + \|\mathcal{L}_n^s\|_{V^1\to V^1}\|y-y_n\|_{V^1} = (1+O(\ln n))E_n(y)_{V^1} = O(\ln n)E_n(y)_{V^1}.$$

Оценим

$$\|\widetilde{K}x_n - \widetilde{K}_n x_n\|_{V^1} = \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n)\|_{V^1} =\le \|\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho(hx_n)\|_{V^1} +$$

$$+\|\mathcal{L}_n^s\rho(hx_n) - \mathcal{L}_n^s\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n)\|_{V^1} = \|\rho[(h-\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n]\|_{V^1} +$$

$$+\|\mathcal{L}_n^s\|_{V^1\to V^1}\|\rho(hx_n) - \rho(\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{V^1} = \|\rho[(h-\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n]\|_{V^1} +$$

$$+\|\mathcal{L}_n^s\|_{V^1\to V^1}\|\rho[(h-\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n]\|_{V^1} \le \max_{0\le s\le 2\pi}\|h-\mathcal{L}_n^\sigma h\|_V\|x_n\|_V +$$

$$+\|\mathcal{L}_n^s\|_{V^1\to V^1}\max_{0\le s\le 2\pi}\|h-\mathcal{L}_n^\sigma h\|_V\|x_n\|_V = (1+O(\ln n))\max_{0\le s\le 2\pi}\|h-\mathcal{L}_n^\sigma h\|_V\|x_n\|_V =$$

$$= O(\ln n)[E_n^t(h)_V + E_n^\tau(h)_V + E_n(y)_{V^1}]\|x_n\|_V.$$

С помощью получившихся оценок и теоремы 1.1 получаем утверждение доказываемой теоремы.

§5 Численный эксперимент

Для сингулярного интегрального уравнения с логарифмической особенностью вида

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\sin\frac{s-\sigma}{2}|x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma = \frac{\sin s}{2}, \qquad s\in[0,2\pi]$$

с известным точным решением $x(\sigma)=\sin\sigma$ были применены метод дискретных вихрей и метод механических квадратур с пятью, одинадцатью и двадцати пятью узлами. Результаты приведены ниже в таблице.

при $N = 5$

Узлы	Метод дискр. вихрей	Метод мех. квадратур	Точное значение
0	$-4.47811 \cdot 10^{-16}$	$-1.80108 \cdot 10^{-16}$	0
$\frac{2\pi}{5}$	1.11387	0.951057	0.951057
$\frac{4\pi}{5}$	0.688407	0.587785	0.587785
$\frac{6\pi}{5}$	-0.688407	-0.587785	-0.587785
$\frac{8\pi}{5}$	-1.11387	-0.951057	-0.951057

при $N = 11$

Узлы	Метод дискр. вихрей	Метод мех. квадратур	Точное значение
0	$-1.5265 \cdot 10^{-16}$	$-3.28142 \cdot 10^{-16}$	0
$\frac{2\pi}{11}$	0.577421	0.540641	0.540641
$\frac{4\pi}{11}$	0.971514	0.909632	0.909632
$\frac{6\pi}{11}$	1.05716	0.989821	0.989821
$\frac{8\pi}{11}$	0.807163	0.75575	0.75575
$\frac{10\pi}{11}$	0.300899	0.281733	0.281733
$\frac{12\pi}{11}$	-0.300899	-0.281733	-0.281733
$\frac{14\pi}{11}$	-0.807163	-0.75575	-0.75575
$\frac{16\pi}{11}$	-1.05716	-0.989821	-0.989821
$\frac{18\pi}{11}$	-0.971514	-0.909632	-0.909632
$\frac{20\pi}{11}$	-0.577421	-0.540641	-0.540641

при $N = 25$

Узлы	Метод дискр. вихрей	Метод мех. квадратур	Точное значение
0	$7.73599 \cdot 10^{-15}$	$1.18039 \cdot 10^{-16}$	0
$\frac{2\pi}{25}$	0.255797	0.24869	0.24869
$\frac{4\pi}{25}$	0.495521	0.481754	0.481754
$\frac{6\pi}{25}$	0.70411	0.684547	0.684547
$\frac{8\pi}{25}$	0.868457	0.844328	0.844328
$\frac{10\pi}{25}$	0.978236	0.951057	0.951057
$\frac{12\pi}{25}$	1.02655	0.998027	0.998027
$\frac{14\pi}{25}$	1.01036	0.982287	0.982287
$\frac{16\pi}{25}$	0.930685	0.904827	0.904827
$\frac{18\pi}{25}$	0.792533	0.770513	0.770513
$\frac{20\pi}{25}$	0.604583	0.587785	0.587785
$\frac{22\pi}{25}$	0.378645	0.368125	0.368125
$\frac{24\pi}{25}$	0.128915	0.125333	0.125333
$\frac{26\pi}{25}$	-0.128915	-0.125333	-0.125333
$\frac{28\pi}{25}$	-0.378645	-0.368125	-0.368125
$\frac{30\pi}{25}$	-0.604583	-0.587785	-0.587785
$\frac{32\pi}{25}$	-0.792533	-0.770513	-0.770513
$\frac{34\pi}{25}$	-0.903685	-0.904827	-0.904827
$\frac{36\pi}{25}$	-0.01036	-0.982287	-0.982287
$\frac{38\pi}{25}$	-1.02655	-0.998027	-0.998027
$\frac{40\pi}{25}$	-0.978236	-0.951057	-0.951057
$\frac{42\pi}{25}$	-0.868457	-0.844328	-0.844328
$\frac{44\pi}{25}$	-0.70411	-0.684547	-0.684547
$\frac{46\pi}{25}$	-0.495521	-0.481754	-0.481754
$\frac{48\pi}{25}$	-0.255797	-0.24869	-0.24869

Для сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта вида

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cot\frac{\sigma-s}{2}x_n(\sigma_k)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h(s_j;\sigma_k)x_n(\sigma_k)=\cos s+\frac{\sin s}{2},\qquad j=\overline{1,N}$$

с известным точным решением $x(\sigma)=\sin\sigma$ были применены метод дискретных вихрей и метод механических квадратур с пятью, одинадцатью и двадцати пятью узлами. Результаты приведены ниже в таблице.

при $N=5$

Узлы	Метод дискр. вихрей	Метод мех. квадратур	Точное значение
0	0.161583	0.012654	0
$\frac{2\pi}{5}$	1.11264	0.951057	0.951057
$\frac{4\pi}{5}$	0.749368	0.587785	0.587785
$\frac{6\pi}{5}$	-0.426202	-0.587785	-0.587785
$\frac{8\pi}{5}$	-0.789474	-0.951057	-0.951057

при $N=11$

Узлы	Метод дискр. вихрей	Метод мех. квадратур	Точное значение
0	0.540641	0.001123	0
$\frac{2\pi}{11}$	1.08128	0.540641	0.540641
$\frac{4\pi}{11}$	1.45027	0.909632	0.909632
$\frac{6\pi}{11}$	1.53046	0.989821	0.989821
$\frac{8\pi}{11}$	1.29639	0.75575	0.75575
$\frac{10\pi}{11}$	0.822373	0.281733	0.281733
$\frac{12\pi}{11}$	0.258908	-0.281733	-0.281733
$\frac{14\pi}{11}$	-0.215109	-0.75575	-0.75575
$\frac{16\pi}{11}$	-0.449181	-0.989821	-0.989821
$\frac{18\pi}{11}$	-0.368991	-0.909632	-0.909632
$\frac{20\pi}{11}$	-0.171648	-0.540641	-0.540641

при $N = 25$

Узлы	Метод дискр. вихрей	Метод мех. квадратур	Точное значение
0	0.343606	0.015897	0
$\frac{2\pi}{25}$	0.592296	0.24869	0.24869
$\frac{4\pi}{25}$	0.82536	0.481754	0.481754
$\frac{6\pi}{25}$	1.02815	0.684547	0.684547
$\frac{8\pi}{25}$	1.18793	0.844328	0.844328
$\frac{10\pi}{25}$	1.29466	0.951057	0.951057
$\frac{12\pi}{25}$	1.34163	0.998027	0.998027
$\frac{14\pi}{25}$	1.32589	0.982287	0.982287
$\frac{16\pi}{25}$	1.24843	0.904827	0.904827
$\frac{18\pi}{25}$	1.11412	0.770513	0.770513
$\frac{20\pi}{25}$	0.931391	0.587785	0.587785
$\frac{22\pi}{25}$	0.71173	0.368125	0.368125
$\frac{24\pi}{25}$	0.468939	0.125333	0.125333
$\frac{26\pi}{25}$	0.218273	-0.12533	-0.125333
$\frac{28\pi}{25}$	-0.0245186	-0.368125	-0.368125
$\frac{30\pi}{25}$	-0.244179	-0.587785	-0.587785
$\frac{32\pi}{25}$	-0.426907	-0.770513	-0.770513
$\frac{34\pi}{25}$	-0.561221	-0.904827	-0.904827
$\frac{36\pi}{25}$	-0.638681	-0.982287	-0.982287
$\frac{38\pi}{25}$	-0.654421	-0.998027	-0.998027
$\frac{40\pi}{25}$	-0.607451	-0.951057	-0.951057
$\frac{42\pi}{25}$	-0.500722	-0.844328	-0.844328
$\frac{44\pi}{25}$	-0.340941	-0.684547	-0.684547
$\frac{46\pi}{25}$	-0.138148	-0.481754	-0.481754
$\frac{48\pi}{25}$	0.94916	-0.24869	-0.24869

Заключение

В данной работе получены следующие результаты. Проведено теоретическое обоснование метода дискретных вихрей в специальным образом выбранных пространствах искомых элементов и правых частей, являющихся сужениями пространства непрерывных функций для:

1) сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта;

2) интегрального уравнения с логарифмической особенностью на отрезке вещественной оси;

3) интегрального уравнения с логарифмической особенностью в периодическом случае.

При этом оценки погрешности приближенных решений, учитывающие структурные свойства исходных данных, получены в равномерной метрике.

Список используемой литературы

1. Апаринов А.А. Быстрые матричные вычисления в методе дискретных вихрей. - Москва: Изд-во Московского ун-та, 2010.

2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. - 256 с.

3. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. - Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. - 287 с.

4. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений (избранные главы). - Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1995. - 232 с.

5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - Москва: Физматгиз, 2007. - 684 с.

6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и чесленный эксперимент (в математи-ческой физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). - М.: ТОО "Янус 1995. - 520 с.

7. Лифанов И.К. Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. - М.: МаксПресс, 2006. - 71 с.

8. Ожегова А.В. Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: Дисс. канд. физ.-матем. наук. - Казань, 1996.