УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 149, кн. 4 Физико-математические науки *2007*

УДК 519.6

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ОГРАНИЧЕНИИ И НЕОДНОРОДНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Л.Л. Глазырина, М.Ф. Павлова

Аннотация

Рассматриваемая задача относится к классу задач с двойным вырождением. Характерной особенностью является наличие нелокального краевого условия на разрезе области. Доказывается теорема единственности первой краевой задачи для вариационного неравенства при неоднородном ограничение на решение.

1. Постановка задачи.

Пусть Ω – ограниченная область R^2, Π – разрез, делящий Ω на две связные подобласти, Γ – граница Ω, $Q_T = \Omega\times(0,T]$, $\Pi_T = \Pi\times(0,T]$, $\Gamma_\Pi = \Pi\cap\Gamma$. Обозначим через V, $V(0,T)$, $W(0,T)$ банаховы пространства функций, полученные замыканием $C^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(0,T;C^\infty(\Omega))$ в следующих нормах

$$\|u\|_V = \|u\|_{W^1_{p_1}(\Omega)} + \|u\|_{W^1_{p_2}(\Pi)},$$

$$\|u\|_{V(0,T)} = \|u\|_{L_{p_1}(0,T;W^1_{p_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_{p_2}(0,T;W^1_{p_2}(\Pi))},$$

$$\|u\|_{W(0,T)} = \|u\|_{V(0,T)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))}.$$

Соответственно, $\overset{\circ}{V}$ $(\overset{\circ}{V}(0,T), \overset{\circ}{W}(0,T))$ – замыкание финитных функций в Ω (Q_T) в соответствующей норме.

Рассматривается следующая задача: найти функцию u из множества

$$K = \left\{ v - u^D \in \overset{\circ}{W}(0,T) \,\middle|\, v(x,t) \ge g(x) \text{ п.в. в } Q_T \text{ и на } \Pi_T \right\}$$

такую, что

$$\int\limits_0^T \langle J(u), \cdots\rangle_* \, dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{ п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi, \tag{2}$$

и для любой функции $v\in K$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^T \Big\{ \langle J(u), v-u\rangle_* + \langle Lu, v-u\rangle + \langle L_\Pi u, v-u\rangle_\Pi \Big\}\, dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^T \Big\{ \langle f_1, v-u\rangle + \langle f_2, v-u\rangle_\Pi \Big\}\, dt. \tag{3}$$

Здесь $J(z(t))$ – функционал, значение которого при $t \in [0,T]$ на элементах $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется по правилу

$$\langle J(z(t)), v\rangle_* = \frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_\Omega \varphi_1(z(t))v(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(z(t))v(s)\,ds\biggr),$$

$\langle F, v\rangle_*$ – значение функционала $F \in (\overset{\circ}{V})^*$ на элементе $v \in \overset{\circ}{V}$, $\langle f, v\rangle$ ($\langle f, v\rangle_\Pi$) – значение функционала $f \in L_{p_1'}(0,T;W_{p_1'}^{-1}(\Omega))$ ($f \in L_{p_2'}(0,T;W_{p_2'}^{-1}(\Pi))$) на элементе v из $\overset{\circ}{W}(0,T)$, u^D– заданная функция из $W(0,T)$[1]. Пространственные операторы

$$L: W_{p_1}^1(\Omega) \longrightarrow W_{p_1'}^{-1}(\Omega), \quad L_\Pi: W_{p_2}^1(\Pi) \longrightarrow W_{p_2'}^{-1}(\Pi)$$

определяются равенствами

$$Lu = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigl(a_i(x,u)\,k_i(x,\nabla u)\Bigr), \quad L_\Pi u = -\frac{\partial}{\partial s}\biggl(a_\Pi(x,u)k_\Pi\Bigl(\frac{\partial u}{\partial s}\Bigr)\biggr),$$

$\dfrac{\partial}{\partial s}$ – производная по направлению s.

Такого типа задачи возникают при моделировании процесса фильтрации подземных вод с учетом уровня воды в открытом русле (см. например, [1]). В этом случае Ω – область, в которой происходит процесс фильтрации подземных вод, Π соответствует руслу реки (канала), u определяет высоту свободной поверхности жидкости.

В работе [2] доказано существование решения задачи (1)–(3) при любых

$$f_1 \in L_{p'}(Q_T), \quad f_2 \in L_{p'}(\Pi_T), \quad p = \min(p_1,p_2), \quad g \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega), \tag{4}$$

$$u_0 - u^D(0) \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega), \quad u_0(x) \geq g(x) \ \text{ п.в. в } \Omega \ \text{ и на } \Pi, \tag{5}$$

если выполнены следующие условия:

• функции φ_i – строго возрастающие, $\varphi_i(0) = 0$, удовлетворяющие при любом $\xi \in R^1$ неравенствам

$$b_{0i}|\xi|^{\alpha_i} - b_{1i} \leq \Phi_i(\xi) = \int\limits_0^\xi \varphi_i'(\tau)\tau\,d\tau \leq b_{2i}\,|\xi|^{\alpha_i} + b_{3i},$$

$$b_{0i} > 0,\ b_{1i} \geq 0,\ b_{2i} > 0,\ b_{3i} \geq 0,\ \alpha_i > 1,$$

$$|\varphi_i(\xi)| \leq b_{4i}|\xi|^{\alpha_i - 1} + b_{5i},\ b_{4i} > 0,\ b_{5i} \geq 0,$$

• функции a_i, k_i, a_Π, k_Π таковы, что пространственные операторы L, L_Π являются непрерывными, ограниченными, коэрцитивными, и при любых $x \in \Omega$, $\xi_0, \xi_1 \in R^1$, $\xi, \xi^1, \xi^2 \in R^2$ выполнены соотношения

$$0 < \beta_{01} \leq a_i(x,\xi_0) \leq \beta_{11}, \quad 0 < \beta_{02} \leq a_\Pi(x,\xi_0) \leq \beta_{12}, \tag{6}$$

[1]Введение функции u^D обеспечивает выполнение краевого условия вида $u(x,t) = u^D(x,t)$ п.в. на $\Gamma \times (0,T]$ и на $\Gamma_\Pi \times (0,T]$.

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x,\xi_0)(k_i(x,\xi^1)-k_i(x,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2) \ \geq\ 0, \tag{7}$$
$$(k_\Pi(\xi_0)-k_\Pi(\xi_1))(\xi_0-\xi_1)\geq 0,$$
$$|k_i(x,\xi)|\leq \beta_{21}+\beta_{31}\sum_{i=1}^{2}|\xi_i|^{p_1-1}, \quad \beta_{21}\geq 0,\ \ \beta_{31}>0, \tag{8}$$
$$|k_\Pi(\xi_0)|\leq \beta_{22}+\beta_{32}|\xi_0|^{p_2-1},\ \ \beta_{22}\geq 0,\ \ \beta_{32}>0.$$

В данной работе доказывается единственность решения задачи (1)–(3). При этом используется методика, разработанная немецким математиком Ф.Отто (см. [3, 4]).

2. Вспомогательные результаты

В этом пункте приведен ряд вспомогательных результатов, необходимых в дальнейшем. Доказательства первых четырех лемм имеются в [5].

Лемма 1. *Пусть функции φ_i удовлетворяют перечисленным выше условиям, функция η и функционалы Φ_η^i определены равенствами*

$$\begin{cases} 0, & z\leq 0,\\ z^2/2, & 0<z\leq 1,\\ z-1/2, & z>1,\end{cases}$$

$$\Phi_\eta^i(u,v)\ =\ \int\limits_v^u \eta'(\xi-v)\,\varphi_i{}'(\xi)\,d\xi \quad \forall u,v\in R^1, \quad i=1,2.$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\Phi_\eta^i(u,v)-\Phi_\eta^i(\tilde u,v)\ \geq\ \eta'(\tilde u-v)(\varphi_i(u)-\varphi_i(\tilde u)),$$

$$\Phi_\eta^i(u,v)-\Phi_\eta^i(\tilde u,v)\ \leq\ \eta'(u-v)(\varphi_i(u)-\varphi_i(\tilde u)).$$

Лемма 2. *Пусть $\eta_\delta(z)\ =\ \delta\eta(\delta^{-1}z)$, $\overline{\eta}_\delta(z)\ =\ \delta\eta(-\delta^{-1}z)$.*
Тогда при $\delta\to 0$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\Phi_{\eta_\delta}^i(u,v)\ \to\ (\varphi_i(u)\ -\ \varphi_i(v))^+,$$

$$\Phi_{\overline{\eta}_\delta}^i(u,v)\ \to\ (\varphi_i(u)\ -\ \varphi_i(v))^+, \quad i=1,2,$$

где $w^+=(|w|+w)/2$.

Лемма 3. *Пусть u – решение задачи (1)–(3), v – гладкая неотрицательная функция. Тогда при $\varepsilon\to 0$ справедливо предельное соотношение*

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{t'}\int\limits_{\Omega_i}(\varphi_i(u(\varepsilon t))-\varphi(u_0))^+\,v\,dx\,dt\longrightarrow 0 \quad \forall t'\in[0,T].$$

Здесь $\Omega_1=\Omega$, $\Omega_2=\Pi$.

Лемма 4. *Пусть для функции $u \in W(0,T)$ выполнено условие* (1), *кроме того, $u(x,0) \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, v – произвольная функция из $V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$.*

Тогда для любой неотрицательной функции $\gamma(x,t) \in C_0^\infty(-\infty, T;\ C_0^\infty(\Omega))$ имеет место равенство

$$\int_0^T \langle\, J(u)\,,\ \eta'(u-v)\,\gamma\,\rangle_*\,dt = \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \left(\Phi_\eta^i(u_0,v) - \Phi_\eta^i(u,v)\right) \frac{\partial\,\gamma}{\partial\,t}\,dx\,dt.$$

Лемма 5. *Пусть u – решение задачи* (1)–(3), *функция γ удовлетворяет условиям леммы 4.*

Тогда для любой функции $v \in V \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, $v \geq g$ п. в. в Ω и на Π, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \left(\Phi_\eta^i(u_0,v) - \Phi_\eta^i(u,v)\right) \frac{\partial\,\gamma}{\partial\,t}\,dx\,dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta'(u-v)\gamma)\,dx\,dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Pi a_\Pi(x,u)k_\Pi(\frac{\partial u}{\partial s})\frac{\partial}{\partial s}(\eta'(u-v)\gamma)\,ds\,dt \leq$$
$$\leq \int_0^T \langle f_1, \eta'(u-v)\gamma\rangle\,dt + \int_0^T \langle f_2, \eta'(u-v)\gamma\rangle_\Pi\,dt. \quad (9)$$

Доказательство. Положим $z = u - \varepsilon\gamma\eta'(u-v)$, где $\varepsilon < 1$ – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию

$$\varepsilon\gamma(x,t) \leq 1 \quad \forall (x,t) \in Q_T. \quad (10)$$

Докажем, что $z \in K$. Принадлежность $z - u^D$ пространству $\overset{\circ}{W}(0,T)$ очевидна. Убедимся в том, что

$$z(x,t) \geq g(x) \quad (11)$$

почти всюду в Q_T и на Π_T. Учитывая, что $\eta'(0) = 0$, оценим функцию z следующем образом

$$z \geq u + \varepsilon\gamma\eta''(\theta(v-u))(v-u), \quad \theta \in (0,1). \quad (12)$$

Если в точке (x,t) $v - u \geq 0$, то из (12) следует, что $z \geq u \geq g$. В противном случае из неравенства (10) и условия леммы получим

$$z \geq u + (v-u) \geq v \geq g.$$

Таким образом, неравенство (11) имеет место для почти всех (x,t) из Q_T и Π_T, то есть $z \in K$.

Выбирая z в качестве пробной функции в неравенстве (3), будем иметь

$$-\int_0^T \langle\, J(u)\,,\ \varepsilon\gamma\eta'(u-v)\ \rangle_*\,dt - \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x,u)k_i(x,\nabla u)\frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon\gamma\eta'(u-v))\,dx\,dt -$$

$$
-\int_0^T\int_\Pi a_\Pi(x,u)k_\Pi(\frac{\partial u}{\partial s})\frac{\partial}{\partial s}(\varepsilon\gamma\eta'(u-v))\,ds\,dt \geq
$$

$$
\geq -\int_0^T\langle f_1,\varepsilon\gamma\eta'(u-v)\rangle\,dt-\int_0^T\langle f_2,\varepsilon\gamma\eta'(u-v)\rangle_\Pi\,dt.
$$

Из последнего неравенства после деления его на $-\varepsilon$ и леммы 4 следует неравенство (9). Лемма доказана. □

3. Теорема единственности

Теорема 1. *Пусть функции φ_i, a_i, k_i, a_Π, k_Π удовлетворяют перечисленным в п. 1 условиям, кроме того, для любых ξ_1, $\xi_2 \in R^1$ имеют место неравенства*

$$
|a_i(x,\xi_1)-a_i(x,\xi_2)| \leq c_1|\xi_1-\xi_2|, \tag{13}
$$

$$
|a_\Pi(x,\xi_1)-a_\Pi(x,\xi_2)| \leq c_2|\xi_1-\xi_2|. \tag{14}
$$

Тогда при любых f_i, u_0, g таких, что выполнены (5), (5), *решение задачи* (1)–(3) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что u_1, u_2 – два решения задачи (1)–(3). В силу леммы 5 для каждого из них справедливо неравенство (9). Пусть $\widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)$ – произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty((-\infty,T]^2;C_0^\infty(\Omega))$. Запишем (9) для $u_1(x,t_1)$, полагая $\gamma(x,t_1)=\widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)$, $\eta(\xi)=\eta_\delta(\xi)$, $v=u_2(x,t_2)$. Полученное неравенство проинтегрируем по параметру t_2. Затем запишем (9) для $u_2(x,t_2)$, выбирая $\gamma(x,t_2)=\widetilde{\gamma}(x,t_1,t_2)$, $\eta(\xi)=\overline{\eta}_\delta(\xi)$, $v=u_1(x,t_1)$, и проинтегрируем по переменной t_1. Складывая полученные неравенства и учитывая, что $\overline{\eta}_\delta{}'(\xi) = -\eta_\delta{}'(-\xi)$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^2\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Big(\Phi^i_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))-\Phi^i_{\eta_\delta}(u_1(t_1),u_2(t_2))\Big)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1dt_2+\\
&\qquad+\sum_{i=1}^2\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Big(\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_0,u_1(t_1))-\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_2(t_2),u_1(t_1))\Big)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}\,dx\,dt_1\,dt_2+\\
&+\int_0^T\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^2\Big(\mathbf{ak_i}(u_1(t_1))-\mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\Big)\,dx\,dt_1\,dt_2+\\
&+\int_0^T\int_0^T\int_\Pi\Big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1))-\mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2))\Big)\frac{\partial}{\partial s}\Big(\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\Big)\,ds\,dt_1dt_2 \leq\\
&\qquad\leq\int_0^T\int_0^T\langle f_1(t_1)-f_1(t_2),\eta_\delta{}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\rangle\,dt_1\,dt_2+\\
&\qquad\qquad+\int_0^T\int_0^T\langle f_2(t_1)-f_2(t_2),\overline{\eta}'_\delta(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\rangle_\Pi\,dt_1\,dt_2.
\end{aligned}\tag{15}
$$

Здесь

$$\mathbf{ak_i}(z(t)) = a_i(x, z(t))k_i(x, \nabla z(t)), \quad \mathbf{ak_\Pi}(z(t)) = a_\Pi(s, z(t))k_\Pi\left(\frac{\partial z(t)}{\partial s}\right).$$

Далее рассмотрим слагаемое, содержащее пространственный оператор. Имеем

$$I = \int_0^T\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big(\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\eta_\delta{}'(u_1(t_1) - u_2(t_2)\widetilde{\gamma}\Big)\,dx\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \int_0^T\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^2 a_i(x, u_1(t_1))\Big(k_i(x, \nabla u_1(t_1)) -$$

$$- k_i(x, \nabla u_2(t_2))\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1(t_1) - u_2(t_2))\eta_\delta{}''(u_1(t_1) - u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1\,dt_2 +$$

$$+ \int_0^T\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big(a_i(x, u_1(t_1)) - a_i(x, u_2(t_2))\Big)k_i(x, \nabla u_2(t_2))\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_1(t_1) -$$

$$- u_2(t_2)\Big)\eta_\delta{}''(u_1(t_1) - u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\,dx\,dt_1\,dt_2 +$$

$$+ \int_0^T\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big(\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\Big)\eta_\delta{}'(u_1(t_1) - u_2(t_2))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\,dx\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Из условия (7) на функции k_i, неотрицательности $\eta_\delta{}''$ и $\widetilde{\gamma}$ следует, что $I_1 \geq 0$. Следовательно,

$$I \geq I_2 + I_3. \tag{16}$$

Аналогично доказывается, что

$$\widetilde{I} = \int_0^T\int_0^T\int_\Pi (\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2))) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial s}\left(\eta_\delta{}'(u_1(t_1) - u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\right)\,ds\,dt_1 dt_2 \geq \widetilde{I}_2 + \widetilde{I}_3, \tag{17}$$

где

$$\widetilde{I}_2 = \int_0^T\int_0^T\int_\Omega \left(a_\Pi(s, u_1(t_1)) - a_\Pi(s, u_2(t_2))\right)k_\Pi\left(\frac{\partial u(t_2)}{\partial s}\right) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial s}\left(u_1(t_1) - u_2(t_2)\right)\eta_\delta{}''(u_1(t_1) - u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\,ds\,dt_1\,dt_2,$$

$$\widetilde{I}_3 = \int_0^T\int_0^T\int_\Omega \left(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2))\right)\eta_\delta{}'(u_1(t_1) - u_2(t_2))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\,ds\,dt_1\,dt_2.$$

Учитывая (16) и (17), из (15) получим

$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Big(\Phi^i_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))-\Phi^i_{\eta_\delta}(u_1(t_1),u_2(t_2))\Big)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1\,dt_2+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Big(\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_0,u_1(t_1))-\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_2(t_2),u_1(t_1))\Big)\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_2}\,dx\,dt_1\,dt_2+$$
$$+\,I_2+I_3+\widetilde{I}_2+\widetilde{I}_3\ \le\ \int_0^T\int_0^T\langle f_1(t_1)-f_1(t_2),{\eta_\delta}'(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\rangle\,dt_1dt_2+$$
$$+\int_0^T\int_0^T\langle f_2(t_1)-f_2(t_2),\overline{\eta}'_\delta(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\rangle_{\Pi}\,dt_1\,dt_2. \quad (18)$$

В полученном неравенстве совершим предельный переход при $\delta\to0$. При обосновании предельного перехода в слагаемых, содержащих функционалы $\Phi^i_{\eta_\delta}$ или $\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}$ воспользуемся леммой 2 и теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В результате получим

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Phi^i_{\eta_\delta}(u_0,u_2(t_2))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1\,dt_2\to\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(t_2)))^+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1\,dt_2,$$

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}\Phi^i_{\overline{\eta}_\delta}(u_0,u_2(t_2))\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1\,dt_2\ \to\ \int_0^T\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_0)-\varphi_i(u_2(t_2)))^+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t_1}\,dx\,dt_1\,dt_2,$$

где $i=1,2$.

Используя условие (13) и неравенство (8), оценим I_2 следующим образом:

$$|\,I_2\,|\le c_1\beta\int_0^T\int_0^T\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}|\,u_1(t_1)-u_2(t_2)\,|\,{\eta_\delta}''(u_1(t_1)-u_2(t_2))\times$$
$$\times\left(1+\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial u_2(t_2)}{\partial x_i}\right|^{p_1-1}\right)\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1(t_1)-u_2(t_2))\widetilde{\gamma}\right|\,dx\,dt_1dt_2, \quad (19)$$

где $\beta=\max\{\beta_{21},\beta_{31}\}$. Нетрудно видеть, что

$$|z|\,{\eta_\delta}''(z)=\frac{|z|}{\delta}\eta''\left(\frac{z}{\delta}\right)\le1\quad\forall z\in R^1.$$

Поэтому подынтегральная функция в правой части неравенства (19) ограничена интегрируемой функцией. Кроме того, при $\delta\to0$

$$\frac{z}{\delta}\,\eta''\left(\frac{z}{\delta}\right)\to0\quad\text{п. в. в } R^1.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{\delta\to0}I_2=0.$$

Для I_3, учитывая, что при $\delta \to 0$

$$\eta'_\delta(\xi) \to H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \le 0, \end{cases}$$

будем иметь

$$\lim_{\delta \to 0} I_3 = \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^2 (\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t_2)))\, H(u_1(t_1) - u_2(t_2)) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\, dx\, dt_1\, dt_2.$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \widetilde{I}_2 = 0$, а

$$\lim_{\delta \to 0} \widetilde{I}_3 = \int_0^T \int_0^T \int_\Pi (\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2)))\, H(u_1(t_1) - u_2(t_2)) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial s}\, ds\, dt_1\, dt_2.$$

Таким образом, из (18) при $\delta \to 0$ получим

$$\begin{gathered} -\sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(t_2)))^+\, \widetilde{\gamma}(x, 0, t_2)\, dx\, dt_2 - \\ -\sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_1(t_1)))^+\, \widetilde{\gamma}(x, t_1, 0)\, dx\, dt_1 - \\ -\sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t_1)) - \varphi_i(u_2(t_2)))^+ \left(\frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial t_1} + \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial t_2} \right) dx\, dt_1\, dt_2 + \\ + \int_0^T \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \big(\mathbf{ak_i}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t_2))\big) H(u_1(t_1) - u_2(t_2)) \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial x_i}\, dx\, dt_1\, dt_2 + \\ + \int_0^T \int_0^T \int_\Pi \big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t_1)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t_2))\big) H(u_1(t_1) - u_2(t_2))\, \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial s}\, ds\, dt_1\, dt_2 \le \\ \le \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega_i} (f_i(t_1) - f_i(t_2)) H(u_1(t_1) - u_2(t_2))\, \widetilde{\gamma}\, dx\, dt_1\, dt_2. \end{gathered} \tag{20}$$

Далее, пусть $\gamma(x,t) \in C_0^\infty(-\infty, T/2; C_0^\infty(\Omega))$, $q \in C_0^\infty(R^1)$ – неотрицательные функции. Кроме того, q – четная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) d\xi = 1. \tag{21}$$

В неравенстве (20) выберем

$$\widetilde{\gamma}(x, t_1, t_2) = \frac{1}{\varepsilon}\, q\bigg(\frac{t_1 - t_2}{\varepsilon}\bigg)\, \gamma\bigg(x, \frac{t_1 + t_2}{2}\bigg)$$

и введем новые переменные

$$t = t_1, \ \ \tau = \frac{t_1 - t_2}{\varepsilon}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial t_1} + \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial t_2} = \frac{1}{\varepsilon} q\left(\frac{t_1 - t_2}{\varepsilon}\right) \left.\frac{\partial \gamma(x,\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=(t_1+t_2)/2},$$

неравенство (20) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{5} Y_i \le \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega_i} (f_i(t) - f_i(t-\varepsilon\tau))\times$$
$$\times H(u_1(t) - u_2(t-\varepsilon\tau))\, q(\tau)\, \gamma(x, t - \varepsilon\tau/2)\, dx\, dt\, d\tau, \quad (22)$$

где

$$Y_1 = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{0}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^{+}\, q(\tau)\, \gamma(x, \varepsilon\tau/2)\, dx\, d\tau,$$

$$Y_2 = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{0}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_1(\varepsilon\tau)))^{+}\, q(\tau)\, \gamma(x, \varepsilon\tau/2)\, dx\, d\tau,$$

$$Y_3 = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) -$$
$$-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^{+}\, q(\tau)\, \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t - \varepsilon\tau/2)\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$Y_4 = \int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \big(\mathbf{ak_i}(u_1(t)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t-\varepsilon\tau))\big) H(u_1(t) -$$
$$- u_2(t-\varepsilon\tau))\, q(\tau) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x, t - \varepsilon\tau/2)\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$Y_5 = \int\limits_{-T/\varepsilon}^{T/\varepsilon} \int\limits_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)} \int\limits_{\Pi} \big(\mathbf{ak_{\Pi}}(u_1(t)) - \mathbf{ak_{\Pi}}(u_2(t-\varepsilon\tau))\big) H(u_1(t) -$$
$$- u_2(t-\varepsilon\tau))\, q(\tau) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x, t - \varepsilon\tau/2)\, ds\, dt\, d\tau.$$

В неравенстве (22) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Докажем, что

$$Y_1 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть $M \in [0, T/\varepsilon]$, представим Y_1 в виде

$$Y_1 = -\sum_{i=1}^{2} \int_0^M q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \gamma(x, \varepsilon\tau/2)\, dx\, d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{2} \int_M^{T/\varepsilon} q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \gamma(x, \varepsilon\tau/2)\, dx\, d\tau \equiv -Y_{1,1} - Y_{1,2}.$$

Покажем, что каждое $Y_{1,i}$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора M и ε. Учитывая, что $(\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \in L_\infty(0, T/\varepsilon; L_{\alpha_i}(\Omega_i))$, а функция $\gamma(x, \varepsilon\tau/2)$ ограничена, для $Y_{1,2}$ получим оценку

$$Y_{1,2} \leq c \int_M^{T/\varepsilon} q(\tau)\, d\tau. \tag{23}$$

Условие (21) позволяет выбрать M так, чтобы правая часть (23) была не больше наперед заданной малой величины ρ. Записав $Y_{1,1}$ в виде

$$Y_{1,1} = \sum_{i=1}^{2} \int_0^M q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ (\gamma(x, \varepsilon\tau/2) - \gamma(x, 0))\, dx\, d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} \int_0^M q(\tau) \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_0) - \varphi_i(u_2(\varepsilon\tau)))^+ \gamma(x, 0)\, dx\, d\tau$$

и учитывая непрерывность функций γ, q и лемму 3, нетрудно доказать существование такого ε_0, что

$$Y_{1,1} \leq \rho \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Из вышесказанного следует, что $Y_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогичный результат имеет место и для Y_2.

Докажем, далее, что при $\varepsilon \to 0$

$$Y_3 + \sum_{i=1}^{2} \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t)\, dx\, dt \to 0. \tag{24}$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t)\, dx\, dt\, d\tau,$$

представим левую часть предельного соотношения (24) в виде суммы следующих слагаемых

$$A_1 = \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{-M} q(\tau) \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t)))^+ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t)\, dx\, dt\, d\tau,$$

$$A_2=\sum_{i=1}^{2}\int_{M}^{\infty}q(\tau)\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t)))^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt\,d\tau,$$

$$A_3=-\sum_{i=1}^{2}\int_{-T/\varepsilon}^{-M}q(\tau)\int_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t-\varepsilon\tau/2)\,dx\,dt\,d\tau,$$

$$A_4=-\sum_{i=1}^{2}\int_{M}^{T/\varepsilon}q(\tau)\int_{\max(0,\varepsilon\tau)}^{\min(T,T+\varepsilon\tau)}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t-\varepsilon\tau/2)\,dx\,dt\,d\tau,$$

$$A_5=-\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{M}q(\tau)\int_0^{\max(0,\varepsilon\tau)}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t-\varepsilon\tau/2)\,dx\,dt\,d\tau,$$

$$A_6=-\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{M}q(\tau)\int_{\min(T,T+\varepsilon\tau)}^{T}\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\;dx\,dt\,d\tau,$$

$$A_7=-\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{M}q(\tau)\int_0^T\int_{\Omega_i}\Big\{(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t-\varepsilon\tau/2)-$$
$$-(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t)))^+\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\Big\}\,dx\,dt\,d\tau.$$

Нетрудно показать по аналогии с предыдущим случаем, что $|A_i|,\ i=1,2,3,4$ могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора M. Что касается $|A_5|$, $|A_6|$, то их значения малы при малом ε в силу малости меры множества, по которому проводится интегрирование. Распишем A_7 следующим образом:

$$A_7=\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{M}q(\tau)\int_0^T\int_{\Omega_i}(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+\Big(\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t-\varepsilon\tau/2)-$$
$$-\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\Big)\,dx\,dt\,d\tau+\sum_{i=1}^{2}\int_{-M}^{M}q(\tau)\int_0^T\int_{\Omega_i}\Big((\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t-\varepsilon\tau)))^+-$$
$$-(\varphi_i(u_1(t))-\varphi_i(u_2(t)))^+\Big)\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt\,d\tau.$$

Первый интеграл правой части последнего равенства стремится к нулю, поскольку функция γ – гладкая, а функции $\varphi_i(u_1)$ и $\varphi_i(u_2)$ принадлежат пространствам $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$. Второй интеграл также стремится к нулю в силу непрерывности в целом интегрируемых по Лебегу функций. Таким образом, соотношение (24) доказано.

Аналогично доказывается, что при $\varepsilon\to 0$

$$Y_4\ \to\int_0^T\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\big(\mathbf{ak_i}(u_1(t))-\mathbf{ak_i}(u_2(t))\big)H(u_1(t)-u_2(t))\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t)\,dx\,dt,$$

$$Y_5 \ \rightarrow \ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial s}(x,t)\, ds\, dt,$$

а слагаемые, содержащие функции f_i, стремятся к нулю. В результате при $\varepsilon \rightarrow 0$ из (22) получим

$$-\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t)))^+ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t)\, dx\, dt+$$
$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \big(\mathbf{ak_i}(u_1(t)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,t)\, dx\, dt+$$
$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial s}(x,t)\, ds\, dt \le 0. \tag{25}$$

Докажем, что неравенство (25) имеет место для любой функции $\gamma(x,t)$ из пространства $C_0^\infty(-\infty, T/2; C^\infty(\Omega))$. С этой целью введем гладкую неотрицательную функцию $\chi(\xi)$ такую, что $\chi(0) = 0$ и $\chi(\xi) = 1$ при $\xi \ge 1$. Обозначим через Ω_ρ приграничную полосу области Ω ширины ρ. В каждой точке $x \in \Omega_\rho$ определим вектор $r(x)$ такой, что $|r(x)| = \mathrm{dist}\,(x, \Gamma)$, а $x - r(x) \in \Gamma$. Определим функцию

$$\chi_\rho(x_1, x_2) = \chi\left(\frac{|r|}{\rho}\right).$$

Очевидно, что

$$\gamma(x,t) = \chi_\rho \gamma(x,t) + (1 - \chi_\rho)\gamma(x,t).$$

Для краткости записи в дальнейшем обозначим через $B(\gamma)$ левую часть неравенства (25). Поскольку $\chi_\rho \gamma \in C_0^\infty(-\infty, T/2; C_0^\infty(\Omega))$, то согласно (25) имеет место неравенство

$$B(\chi_\rho \gamma) \le 0. \tag{26}$$

Докажем далее, что

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} B((1 - \chi_\rho)\gamma) \le 0. \tag{27}$$

Имеем

$$B((1 - \chi_\rho)\gamma) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \tag{28}$$

где

$$I_1 = -\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1(t)) - \varphi_i(u_2(t)))^+ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(1 - \chi_\rho)\, dx\, dt,$$

$$I_2 = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \big(\mathbf{ak_i}(u_1(t)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(1 - \chi_\rho)\, dx\, dt,$$

$$I_3 = \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial s}(1 - \chi_\rho)\, ds\, dt,$$

$$I_4 = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \big(\mathbf{ak_i}(u_1(t)) - \mathbf{ak_i}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t))\, \gamma \, \frac{\partial}{\partial x_i}(1-\chi_\rho)\, dx\, dt,$$

$$I_5 = \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \big(\mathbf{ak_\Pi}(u_1(t)) - \mathbf{ak_\Pi}(u_2(t))\big) H(u_1(t) - u_2(t))\, \gamma \, \frac{\partial}{\partial s}(1-\chi_\rho)\, ds\, dt.$$

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и определение функции χ_ρ, нетрудно показать, что

$$\lim_{\rho\to 0} I_i = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{29}$$

Докажем далее, что

$$\limsup_{\rho\to 0} I_4 \le 0. \tag{30}$$

Имеем

$$I_4 = -\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^2 (a_i(x,u_1(t)) - a_i(x,u_2(t))) \times$$
$$\times\, k_i(x,\nabla u_1(t)) H(u_1(t)-u_2(t))\, \gamma\, \chi'\left(\frac{|r|}{\rho}\right) \frac{\partial |r|}{\partial x_i}\, dx\, dt -$$
$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^2 a_i(x,u_2(t))\, (k_i(x,\nabla u_1(t)) - k_i(x,\nabla u_2(t))) \times$$
$$\times\, H(u_1(t)-u_2(t))\, \gamma\, \chi'\left(\frac{|r|}{\rho}\right) \frac{\partial |r|}{\partial x_i}\, dx\, dt \equiv I_{4,1} + I_{4,2}.$$

Воспользовавшись (13) и неравенством (8), нетрудно показать, что

$$I_{4,1} \le \frac{c}{\rho}\Bigg(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} |u_1 - u_2|^{p_1}\, dx\, dt\Bigg)^{1/p_1}.$$

Представим Ω_ρ в виде объединения конечного числа подмножеств Ω_ρ^k, в каждом из которых можно задать локальную декартову систему координат с осями σ^k, ξ^k, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $|(\sigma^k, x)_{R^2}| \le \lambda\rho \quad \forall x \in \Omega_\rho$, $\lambda > 0$ – константа, определяемая областью Ω;

2) для любой точки $x \in \Omega_\rho$ найдется точка $x^* \in \Gamma \cap \overline{\Omega}_\rho$ такая, что $(\xi^k, x) = (\xi^k, x^*)$.

Тогда, продолжая функцию $(u_1 - u_2)$ нулем вне Ω, будем иметь

$$|(u_1-u_2)(x)| = |(u_1-u_2)(x) - (u_1-u_2)(x^*)| =$$
$$= \left|\int\limits_0^{\alpha(x)} \frac{\partial (u_1-u_2)(x - \nu\,\sigma_k)}{\partial \nu}\, d\nu\right| \le \int\limits_0^{2\lambda\rho} \left|\frac{\partial (u_1-u_2)(x-\nu\,\sigma_k)}{\partial\nu}\right| d\nu, \tag{31}$$

где $\alpha(x) = -(\xi^k, x) + (\xi^k, x^*)$.

Используя неравенства Гельдера и (31), нетрудно получить оценку

$$I_{4,1} \le \frac{c(\lambda)\rho^{1+1/p_1'}}{\rho}\Big(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^2\Big|\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\Big|^{p_1}dx\,dt\Big)^{1/p_1}, \quad p_1'=\frac{p_1}{p_1-1}.$$

Из последнего неравенства и включения $(u_1-u_2)\in\overset{\circ}{W}(0,T)$ следует, что

$$\lim_{\rho\to0} I_{4,1}=0. \tag{32}$$

Рассмотрим $I_{4,2}$. Представим $\Omega_\rho=\Omega_\rho^1\cup\Omega_\rho^2\cup\Omega_\rho^3$, где

$$\Omega_\rho^1=\Big\{x\in\Omega_\rho:\ u_1(x)-u_2(x)\le0\Big\},$$
$$\Omega_\rho^2=\Big\{x\in\Omega_\rho:\ u_1(x)-u_2(x)>0,\ \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial|r|}\ge0\Big\},$$
$$\Omega_\rho^3=\Big\{x\in\Omega_\rho:\ u_1(x)-u_2(x)>0,\ \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial|r|}<0\Big\}.$$

Измеримость множеств Ω_ρ^k следует из включения $u_1-u_2\in\overset{\circ}{W}(0,T)$. В дальнейшем для краткости изложения обозначим

$$F(x,t)=\sum_{i=1}^2 a_i(x,u_2(t))\big(k_i(x,\nabla u_1(t))-k_i(x,\nabla u_2(t))\big)\gamma(x,t)\chi'\left(\frac{|r|}{\rho}\right)\frac{\partial|r|}{\partial x_i}.$$

Заметим, что $H(u_1(x,t)-u_2(x,t))=0$ для любого $x\in\Omega_\rho^1$, поэтому

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho^1}F(x,t)H(u_1-u_2)\,dx\,dt=0\quad\forall\rho. \tag{33}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^2 a_i(x,u_2(t))\big(k_i(x,\nabla u_1(t))-k_i(x,\nabla u_2(t))\big)\frac{\partial(u_1(t)-u_2(t))}{\partial x_i}=$$
$$=\frac{\partial(u_1(t)-u_2(t))}{\partial|r(x)|}\sum_{i=1}^2 a_i(x,u_2(t))\big(k_i(x,\nabla u_1(t))-k_i(x,\nabla u_2(t))\big)\frac{\partial|r(x)|}{\partial x_i},$$

то из условия (7) следует, что в точках Ω_ρ^2

$$\sum_{i=1}^2 a_i(x,u_2(t))\big(k_i(x,\nabla u_1(t))-k_i(x,\nabla u_2(t))\big)\frac{\partial|r(x)|}{\partial x_i}\ge0.$$

Учитывая, что $H(u_1(x,t)-u_2(x,t))=1$ для любого $x\in\Omega_\rho^2$, будем иметь

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho^2}F(x,t)\,dx\,dt\le0,\quad\forall\rho. \tag{34}$$

Докажем далее, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho^3}F(x,t)\,dx\,dt=0. \tag{35}$$

Пусть $\Gamma_\rho^3=\left(\Gamma\cap\partial\Omega_\rho^3\right)$. Если $\Gamma_\rho^3=\varnothing$, то справедливость (35) очевидна. Предположим поэтому, что Γ_ρ^3 не пусто. Докажем, что $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3)=0$. Предположим обратное. Пусть $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3)\neq 0$. Так как $\Gamma_\rho^3\subset\Gamma$ и $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3)\neq 0$, то найдется хотя бы одна точка $x^\star\in\Gamma_\rho^3$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$U_\varepsilon(x^\star)\cap\Omega_\rho\subset\Omega_\rho^3,$$

где $U_\varepsilon(x^\star)$ – окрестность точки $x^\star$ радиуса ε. Пусть $x'\in U_\varepsilon(x^\star)\cap\Omega_\rho$ такова, что $x'-r(x')=x^\star$. Рассмотрим поведение функции

$$w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

на множестве $\{x'-\zeta r(x'),\,0\le\zeta\le 1\}$. Обозначим $x_\alpha=x^\star+\alpha\,r(x')$. Имеем

$$w(x_\alpha,t)=w(x_\alpha,t)-w(x^\star,t)=\int\limits_0^\alpha\frac{\partial w(x_\xi,t)}{\partial\xi}\,d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\alpha\frac{\partial w(x_\xi,t)}{\partial|r(x_\xi)|}\,\frac{\partial|r(x_\xi)|}{\partial\xi}\,d\xi=\int\limits_0^\alpha\frac{\partial w(x_\xi,t)}{\partial|r(x_\xi)|}\,|r(x')|\,d\xi, \tag{36}$$

так как для любого $\xi\in[0,1]$, очевидно, имеет место равенство

$$|r(x^\star+\xi r(x'))|=\xi|r(x')|.$$

Поскольку $(x^\star+\xi r(x'))\in\Omega_\rho^3$ для всех $\xi\in(0,1]$, то правая часть (36) отрицательна в то время, как левая больше нуля. Полученное противоречие означает, что $\operatorname{mes}(\Gamma_\rho^3)=0$.

Обозначим

$$S(\tau)=\left\{x\in\Omega_\rho^3:\ \operatorname{dist}(x,\Gamma)=\tau\right\}.$$

Ясно, что $\operatorname{mes}S(\tau)\to\operatorname{mes}\Gamma_\rho^3$ при $\tau\to 0$. Имеем

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\rho^3}|F(x,t)|\,dx\,dt=\frac{1}{\rho}\int\limits_0^T\int\limits_0^\rho d\tau\int\limits_{S(\tau)}|F(x,t)|\,d\xi\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^1 d\tau'\int\limits_{S(\rho\tau')}|F(x,t)|\,d\xi\,dt. \tag{37}$$

Правая часть в (37) стремится к нулю, поскольку $\operatorname{mes}(S(\rho\tau))\to 0$ при $\rho\to 0$.

Таким образом, (35) имеет место, из (32)–(35) следует справедливость (30). Аналогично доказывается, что

$$\limsup_{\rho\to 0}I_5\le 0.$$

Из (29), (30) и последнего неравенства следует (27). Неравенства (26), (27) обеспечивают справедливость неравенства (25) для любой неотрицательной функции $\gamma(x,t)$ из $C_0^\infty(-\infty, T/2; C^\infty(\Omega))$. Выбирая в (25) $\gamma(x,t) = \gamma(t)$, получим

$$-\sum_{i=1}^{2} \int_0^T \int_{\Omega_i} (\varphi_i(u_1) - \varphi_i(u_2))^+ \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dx\, dt \le 0. \tag{38}$$

Ясно, что (38) будет иметь место и для любой неотрицательной функции $\gamma(t) \in W_\infty^1(0, T/2)$, $\gamma(T/2) = 0$. Выберем в (38)

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^* - t, & 0 \le t < t^*, \\ 0, & t \ge t^*, \end{cases}$$

где $t^* \in [0, T/2]$. В результате будем иметь

$$\int_0^{t^*} \int_{\Omega} (\varphi_1(u_1) - \varphi_1(u_2))^+ \, dx\, dt + \int_0^{t^*} \int_{\Pi} (\varphi_2(u_1) - \varphi_2(u_2))^+ \, ds\, dt \le 0.$$

Из последнего неравенства в силу монотонности φ_i и произвольности t^* следует, что $u_1 \le u_2$ почти всюду в $Q_{T/2}$. Поскольку функции u_1, u_2 во всех рассуждениях можно поменять местами, то из последнего неравенства следует единственность решения задачи (1)–(3) на $[0, T/2]$.

Чтобы получить единственность решения на $[0, T]$, нужно задачу (1)–(3) рассмотреть на $[0, 2T]$, полагая $f_i(t) = 0$ при $t > T$. Теорема доказана. □

Summary

L.L. Glazyrina, M.F. Pavlova. On uniqueness of the solution of a variational inequality of the coupled movement of the underground and surface waters theory with nonhomogeneous bounds and nonhomogeneous boundary conditions.

The considered problem is a double degenerate problem. The special feature of the investigated problem is also the nonlocal boundary condition on the inner slit of the domain. The uniqueness theorem for the first boundary value problem for variational inequality with nonhomogeneous bound on the solution is proved.

Литература

1. *Антонцев С.Н., Мейерманов А.М.* Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод. – Новосибирск, 1979. – 80 с.
2. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* О разрешимости одного нелинейного эволюционного неравенства теории совместного движения поверхностных и подземных вод // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4 – С. 20–31.
3. *Otto F.* L-Contraction and Uniqueness for Quasilinear Elliptic-Parabolic Equation // Reprinted for Journal of J. Different. Equat. – New York-London: Academic Press, 1996. – V. 131, No 1. – P. 20–38.
4. *Otto F.* L-Contraction and Uniqueness for unstationarisaturated-unsaturated porous media flow. // Adv. Math. Sci. Appl. – 1997. – V. 7, No 2. – P. 537–553.
5. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* Теорема о единственности решения одной задачи теории совместного движения русловых и подземных вод // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 11. – С. 12–25.

Поступила в редакцию
26.10.07

Глазырина Людмила Леонидовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *glazyrina-ludmila@yandex.ru*

Павлова Мария Филипповна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *E-mail Maria.Pavlova@ksu.ru*