

УДК 539.189.1

## СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В СУПЕРКРИТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ И ОБОБЩЕННАЯ КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА

*Р.Х. Гайнутдинов, А.А. Мутыгуллина, А.С. Петрова*

### Аннотация

В статье рассмотрена проблема связанных состояний в суперкритических полях. Получено решение обобщенного динамического уравнения, которое определяет энергетическое распределение электронного связанного состояния  $1s_{1/2}$ , погруженного в нижний континуум, с точностью до  $O((Z - Z_{cr})/Z_{cr})$ , где  $Z$  – полный заряд ядра,  $Z_{cr}$  – критический заряд.

**Ключевые слова:** сверхтяжелые ядра, электронные связанные состояния, нестабильный вакуум.

### Введение

При столкновениях очень тяжелых ионов (например, ионов урана:  $U + U$ ) с энергией, близкой к кулоновскому барьеру, и суммарным зарядом ядер  $Z \geq 173$  на время  $10^{-19}$  с формируется молекулородное сверхтяжелое ядро [1]. Такие ядра называются сверхкритическими. Энергия низшего связанного электронного состояния в поле такого ядра превышает по модулю удвоенную энергию покоя электрона, то есть это состояние присоединяется к состояниям отрицательного континуума уравнения Дирака. Если рассматриваемое связанное состояние не содержало ни одного электрона, то после «погружения» оно создает дополнительную вакансию в отрицательном континууме, которая спонтанно заполняется электроном из «дираковского моря». Образовавшаяся при этом «дырка» представляет собой позитрон, который удаляется от ядра, испытывая его отталкивающий потенциал. Таким образом, связанное состояние, погруженное в отрицательный непрерывный спектр, является нестабильным и распадается с рождением электрон-позитронной пары. В отличие от стабильных связанных состояний, рассматриваемых в квантовой электродинамике (КЭД), нестабильное состояние  $|\Psi_i, t = 0\rangle$  характеризуется некоторым энергетическим распределением  $a_i(E)$ , а не определенной энергией, а вектор нестабильного состояния можно представить в виде [2]:

$$|\Psi_i, t = 0\rangle = \int a_i(E) |\varphi_i, E\rangle dE, \quad (1)$$

где  $|\varphi_i, E\rangle$  – собственный вектор оператора энергии, отвечающий значению энергии  $E$ . Поэтому обычные методы КЭД, базирующиеся на определении собственных значений гамильтониана, непригодны для случая описания связанных состояний в поле сверхкритического ядра. Вместе с тем в работе [4] был разработан формализм обобщенной квантовой динамики (ОКД), базирующийся на наиболее общих принципах канонической и фейнмановской формулировок квантовой теории. В [5] было выведено обобщенное динамическое уравнение (ОДУ), позволяющее получить

оператор  $C(z)$ , описывающий энергетическое распределение нестабильного связанного состояния. Применение методов ОКД к решению задачи о нестабильных связанных состояниях в поле сверхкритических ядер было рассмотрено в работе [6] для заряда ядра, не сильно превышающего критический. Результаты, полученные в первом порядке итерационного решения, то есть в первом порядке по малому параметру  $\lambda = (Z - Z_{cr})/Z_{cr}$ , совпадают с результатами, выведенными на основе обычных методов КЭД. В данной работе мы рассмотрим решение задачи о связанных состояниях в поле сверхтяжелого ядра в следующем порядке по  $\lambda$ .

### 1. Связанные состояния в ОКД

Как хорошо известно, оператор Грина  $G(z)$ , связанный с оператором эволюции в шредингеровском представлении соотношением

$$U_s(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-izt) G(z), \quad z = x + iy, \quad (2)$$

можно представить в виде

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z), \quad (3)$$

где

$$G_0(z) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - H_0},$$

$|n\rangle$  – собственные векторы свободного гамильтониана  $H_0$ . В гамильтоновой динамике оператор Грина определяется как резольвента полного гамильтониана  $H$ :

$$G(z) = \frac{1}{z - H}. \quad (4)$$

Это связано с тем, что оператор эволюции  $U_s(t, 0)$  с оператором Грина в форме (4) является решением уравнения Шредингера  $idU_s(t, 0)/dt = HU_s(t, 0)$ . При этом соотношение (3) является определением  $T$ -матрицы, играющей важную роль в квантовой физике. Вместе с тем, как было показано в работе [4], уравнение (3) с оператором  $T(z)$ , определенным соотношением

$$T(z) = i \int d(t_2 - t_1) \exp(iz(t_2 - t_1)) \exp(-iH_0 t_2) \tilde{S}(t_2, t_1) \exp(iH_0 t_1), \quad (5)$$

где  $\tilde{S}(t_2, t_1)$  описывает вклад в оператор эволюции  $U(t_2, t_1)$  в представлении взаимодействия от процесса, при котором взаимодействие начинается в момент времени  $t_1$  и заканчивается в момент времени  $t_2$ , является следствием основного принципа квантовой теории. Действительно, уравнение (2) эквивалентно представлению

$$U(t_2, t_1) = 1 + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \tilde{S}(t_2, t_1), \quad (6)$$

выражающему принцип суперпозиции амплитуд вероятности, заключающийся в том, что амплитуда вероятности события, которое может произойти различными альтернативными способами, есть сумма амплитуд вероятности для каждого из этих способов. То, что этот принцип выражает явление квантовой интерференции и должен использоваться как основополагающий постулат теории, было показано

Фейнманом [7]. Для использования этого постулата необходимо выбрать класс альтернатив. В формализме ОКД в качестве альтернативных способов осуществления событий, связанных с эволюцией квантовых систем, предлагается использовать процесс с определенными временами начала и конца взаимодействия в системе. При этом соответствующие амплитуды  $\langle \Psi_2 | \tilde{S}(t_2, t_1) | \Psi_1 \rangle$  используются как основополагающие «строительные блоки» из которых строятся все амплитуды теории. Операторы  $\tilde{S}(t_2, t_1)$  удовлетворяют обобщенному динамическому уравнению [4]

$$(t_2 - t_1)\tilde{S}(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt_4 \int_{t_1}^{t_4} dt_3 (t_4 - t_3)\tilde{S}(t_2, t_4)\tilde{S}(t_3, t_1). \quad (7)$$

Это уравнение позволяет определить  $\tilde{S}(t_2, t_1)$  для всех  $t_1$  и  $t_2$ , то есть определить оператор эволюции, если этот оператор известен для бесконечно малых времен  $\tau = t_2 - t_1$  взаимодействия. Основной вклад должны давать процессы, связанные с фундаментальным взаимодействием в системе. Отсюда мы имеем следующее граничное условие для уравнения (7):

$$\tilde{S}(t_2, t_1) \xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} H_{\text{int}}(t_2, t_1), \quad (8)$$

где  $H_{\text{int}}(t_2, t_1)$  описывает фундаментальное взаимодействие в системе. Будучи эквивалентным уравнению Шредингера в случае, когда это взаимодействие является локальным во времени,  $H_{\text{int}}(t_2, t_1)$  имеет вид

$$H_{\text{int}}(t_2, t_1) = 2i\delta(t_2 - t_1)H_I(t_1), \quad (9)$$

где  $H_I(t)$  – гамильтониан взаимодействия. Обобщенное динамическое уравнение позволяет расширить квантовую динамику на случай нелокальных во времени взаимодействий.

Из сказанного выше следует, что соотношение (3), которое в гамильтоновой динамике определяет  $T$ -матрицу, в ОКД определяет оператор Грина через оператор  $T(z)$ , который, в свою очередь, определяется соотношением (5). В случае локальных во времени взаимодействий эти два подхода приводят к одинаковым результатам. Важным является то, что определение оператора Грина в ОКД является более общим и имеет силу даже в случае, когда в теории нельзя определить гамильтониан как оператор, генерирующий динамику системы. Это, например, имеет место в КЭД: после перенормировки матрицы рассеяния расходящиеся выражения появляются в гамильтониане. Поэтому теория перенормировок КЭД не позволяет описывать временную эволюцию систем. В частности, эта проблема проявляется себя при описании связанных состояний в КЭД.

Обобщенное динамическое уравнение (7) в терминах оператора Грина принимает вид

$$G(z_1) - G(z_2) = (z_2 - z_1)G(z_2)G(z_1). \quad (10)$$

Уравнение в этой форме является очень удобным для решения проблемы связанных состояний в КЭД и позволяет естественным образом учитывать, что в общем случае в КЭД связанные состояния характеризуются не определенными энергиями, а энергетическими распределениями. В работе [5] это было продемонстрировано на примере тяжелых многозарядных ионов. При описании связанных состояний электронов в поле ядер обычно используется картина Фарри, в которой «свободный» гриновский оператор имеет вид

$$G_0(z) = \sum_n \frac{|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|}{z - E_n^{(0)}}, \quad (11)$$

где  $|\Psi_n\rangle$  и  $E_n^{(0)}$  являются векторами и энергиями дираковского гамильтониана соответственно. Таким образом, в этой картине взаимодействие электрона с кулоновским полем ядра включается в «свободный» гриновский оператор, и проблема определения связанных состояний сводится к вычислению КЭД-поправок к  $E_n^{(0)}$ . Очевидно, эти поправки обусловлены взаимодействием связанных электронов с вакуумом, например, с собственным полем излучения. Такое взаимодействие приводит к тому, что во второй части выражения (3) для оператора Грина содержатся члены, имеющие такую же структуру, как и оператор  $G_0(z)$ . Поэтому их следует объединить, определив соответствующий новый «свободный» гриновский оператор  $\tilde{G}_0(z)$ . В результате такой редукции мы имеем:

$$G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z) = \tilde{G}_0(z) + \tilde{G}_0(z)M(z)\tilde{G}_0(z), \quad (12)$$

где оператор  $M(z)$  описывает именно взаимодействие между частицами, а не их самодействие. Поскольку  $\tilde{G}_0(z)$  описывает только процессы самодействия электронов, он имеет следующую структуру [3]:

$$\tilde{G}_0(z) = \sum_n \frac{|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|}{z - E_n^{(0)} - C_n(z)}. \quad (13)$$

Если связанное состояние является стабильным, то можно определить его энергию из условия  $z - E_n^{(0)} - C_n(z) = 0$ . Однако в общем случае, когда состояние является нестабильным, оно характеризуется поведением функции  $C_n(z)$  в окрестности точки  $z = E_n^{(0)}$ .

## 2. Результаты и их обсуждение

Для ядер с зарядом  $Z$  больше критического ( $Z > Z_{\text{cr}}$ ) естественно разделить кулоновский потенциал ядра  $V(Z, r) \equiv V(Z)$  на две части:  $V(Z) = V(Z_{\text{cr}}) + V(Z')$ , где  $Z_{\text{cr}}$  – критический заряд,  $Z' = Z - Z_{\text{cr}}$  – сверхкритический заряд. В качестве базисных векторов представления Фарри выберем собственные векторы критического дираковского гамильтониана с потенциалом равномерно заряженной сферы радиуса  $R_0$ :

$$H(Z) = i\gamma^\mu(\partial/\partial x_\mu) + m + V(Z_{\text{cr}}), \quad (14)$$

где

$$V(Z_{\text{cr}}) = \begin{cases} -Z_{\text{cr}}\alpha/r, & r > R_0, \\ -Z_{\text{cr}}\alpha/R_0 & r \leq R_0. \end{cases} \quad (15)$$

Для такой модели ядра  $Z_{\text{cr}} = 173$  [8, 10].

Оператор Грина, который описывает эволюцию в случае, когда взаимодействие в системе сводится только к взаимодействию электронов и позитронов с ядром, описываемому потенциалом  $V(Z_{\text{cr}})$ , и взаимодействию системы с вакуумом, то есть нет переходов между различными связанными состояниями, имеет следующий вид:

$$\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z) = \sum_n \frac{|\Psi_n^{(\text{cr})}\rangle\langle\Psi_n^{(\text{cr})}|}{z - E_n^0 - C_n(z)}, \quad (16)$$

где  $|\Psi_n^{(\text{cr})}\rangle$  – собственные векторы гамильтониана (14). При таком выборе свободного оператора Грина полный гриновский оператор можно записать в виде

$$G(z) = \tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z) + \tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z)M(z)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z), \quad (17)$$

где оператор  $M(z)$  описывает кулоновское взаимодействие электронов и позитронов с ядром и электромагнитным полем, исключая взаимодействие, описываемое потенциалом  $V(Z_{\text{cr}})$ , и не включает в себя взаимодействие системы с вакуумом. Важным здесь является то, что операторы  $\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z)$  и  $M(z)$ , описывающие нестабильное состояние, несут ту же информацию, что и вектор (1). По сути функцию Грина основного  $|1s\rangle$  состояния можно представить в виде [6]:

$$\langle 1s | \tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z) | 1s \rangle = \int \frac{|a_{1s}(E)|^2}{z - E} dE. \quad (18)$$

В отличие от стандартного подхода к описанию нестабильных состояний, задача описания нестабильного состояния в ОКД изначально сводится к нахождению его энергетического распределения  $C(z)$ , а не собственных векторов какого-либо гамильтониана. Уравнения для операторов  $C(z)$  и  $M(z)$  были выведены в работе [5]:

$$\begin{aligned} M(z_1) - M(z_2) &= (z_2 - z_1)M(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_1)M(z_1) - \\ &- (z_2 - z_1)M(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_2)M(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_1)M(z_1) - \\ &- (z_2 - z_1)M(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_1)M(z_1)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_1)M(z_1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$C(z_1) - C(z_2) = (z_2 - z_1)M(z_2)\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z_2)G_0^{(\text{cr})}(z_1)M(z_1) \quad (20)$$

со следующими граничными условиями:

$$\langle \psi_m^{(\text{cr})} | M(z) | \psi_n^{(\text{cr})} \rangle \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \langle \psi_m^{(\text{cr})} | B(z) | \psi_n^{(\text{cr})} \rangle - \langle \psi_m^{(\text{cr})} | V(Z_{\text{cr}}) | \psi_n^{(\text{cr})} \rangle, \quad n \neq m, \quad (21)$$

$$C_n(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \langle \psi_n^{(\text{cr})} | B(z) | \psi_n^{(\text{cr})} \rangle - \langle \psi_n^{(\text{cr})} | V(Z_{\text{cr}}) | \psi_n^{(\text{cr})} \rangle. \quad (22)$$

При малых  $Z'$  ( $Z' \sim 7$ ) только основное связанное состояние  $|1s\rangle$  присоединяется к состояниям непрерывного спектра, и нужно рассматривать лишь энергетическое распределение этого состояния. Кроме того, при малых  $Z'$  можно также пренебречь КЭД-эффектами, такими, как поляризация вакуума и лэмбовский сдвиг, и свести все взаимодействие в системе к кулоновскому взаимодействию  $V(Z')$ .

В данной задаче существует малый параметр  $\lambda = Z'/Z_{\text{cr}}$ , равный отношению сверхкритического заряда  $Z'$  к критическому заряду  $Z_{\text{cr}}$ . С точностью до первого порядка по  $\lambda$  уравнение (19) с граничным условием (21) имеет следующее решение:

$$M^{(1)}(z) = V(Z') + O(\lambda). \quad (23)$$

Подставляя оператор (23) в выражение (20) для  $C(z)$  и используя граничное условие (22), получим с точностью до  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned} C_n^{(2)}(z) &\equiv \langle \Psi_n^{(\text{cr})} | C(z) | \Psi_n^{(\text{cr})} \rangle = \\ &= \langle \Psi_n^{(\text{cr})} | V(Z') | \Psi_n^{(\text{cr})} \rangle + \langle \Psi_n^{(\text{cr})} | V(Z')\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z)V(Z') | \Psi_n^{(\text{cr})} \rangle + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (24)$$

В лидирующем порядке можно пренебречь  $C_n(z)$  по отношению к  $E_n$  в операторе  $\tilde{G}_0^{(\text{cr})}(z)$  и представить  $C_{1s}^{(2)}(z)$  в виде [6]:

$$C_{1s}^{(2)}(z) = \int_{E < -mc^2} \frac{|V_E|^2}{z - E} dE + \Delta E_{1s}, \quad (25)$$

где  $V_E = \langle 1s|V(Z')|\varphi_E^{(cr)}\rangle$ ,  $\Delta E_{1s} = \langle 1s|V(Z')|1s\rangle$  и  $|\varphi_E^{(cr)}\rangle$  – собственные векторы критического гамильтониана, принадлежащие отрицательному непрерывному спектру. Функция  $C_{1s}^{(2)}(z)$  определяет энергетическое распределение основного состояния после погружения в отрицательный континуум. Для наглядности запишем ее в виде:

$$C_{1s}^{(2)}(z) = F(z) - i\Gamma/2 + \Delta E_{1s}, \quad (26)$$

где  $F(z)$  – интеграл в смысле главного значения:

$$F(z) = P.V. \int_{E < -mc^2} \frac{|V_E|^2}{z - E} dE, \quad \Gamma = 2\pi|V_E|^2.$$

Энергетическое распределение  $|a_{1s}(E)|^2$ , входящее в матричный элемент (18), в этом порядке по  $\lambda$  определяется следующим образом:

$$|a_{1s}(E)|^2 = \frac{\Gamma^2}{[E - E_{1s} - \Delta E_{1s} - F(z)]^2 + \Gamma^2/4}. \quad (27)$$

Тогда вектор состояния  $|1s\rangle$  определяется выражением:

$$|1s\rangle = \int a_{1s}(E)|\varphi_E^{(cr)}\rangle dE, \quad (28)$$

свидетельствующим о перемешивании этого связанного состояния с состояниями, принадлежащими непрерывному отрицательному спектру.

Распределение (27) является брейт-вигнеровским (лоренцевым) энергетическим распределением с максимумом вблизи энергии  $E = E_{1s} + \Delta E_{1s} + F(z)$  и шириной  $\Gamma/2$ . Эти результаты совпадают с результатами, полученными стандартными методами [9]. Отметим, что распределение (27) выведено нами в лидирующем порядке решения обобщенного динамического уравнения.

Используя метод последовательных итераций, мы можем решить обобщенное динамическое уравнение (19) с любой точностью. Например, в следующем порядке по  $\lambda$  имеем:

$$M^{(3)}(z) = V(Z') + V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z') - V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z') + O(\lambda^3). \quad (29)$$

Подстановка (29) в (20) приводит к разложению  $C_{1s}(z)$  с точностью до  $\lambda^4$ :

$$C_{1s}^{(4)}(z) = \langle 1s|V(Z')|1s\rangle + \langle 1s|V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')|1s\rangle + \langle 1s|V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')|1s\rangle - \langle 1s|V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')\tilde{G}_0^{(cr)}(z)V(Z')|1s\rangle + O(\lambda^4), \quad (30)$$

или, если снова пренебречь  $C_n(z)$  по отношению к  $E_n$  в операторе  $\tilde{G}_0^{(cr)}(z)$ :

$$C_{1s}^{(4)}(z) = C_{1s}^{(2)}(z) + \int_{E, E' < -m_e} \frac{\langle 1s|V(Z')|\varphi_E^{(cr)}\rangle \langle \varphi_E^{(cr)}|V(Z')|\varphi_{E'}^{(cr)}\rangle \langle \varphi_{E'}^{(cr)}|V(Z')|1s\rangle}{(z - E)(z - E')} dE dE' -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{E, E', E'' < -m_e} dE dE' dE'' \times \\
& \times \frac{\langle 1s | V(Z') | \varphi_E^{(cr)} \rangle \langle \varphi_E^{(cr)} | V(Z') | \varphi_{E'}^{(cr)} \rangle \langle \varphi_{E'}^{(cr)} | V(Z') | \varphi_{E''}^{(cr)} \rangle \langle \varphi_{E''}^{(cr)} | V(Z') | 1s \rangle}{(z - E)(z - E')(z - E'')} + \\
& + O(\lambda^4). \quad (31)
\end{aligned}$$

Это выражение – более сложное, чем (24), и оно может не совпадать с брейт-винеровским энергетическим распределением.

### Заключение

Рождение электрон-позитронных пар в сверхкритических полях было предсказано еще в [10]. Спонтанная эмиссия позитронов из области столкновения очень тяжелых ядер является экспериментальным признаком образования суперкритического молекулоподобного ядра, одно или несколько связанных состояний которого «погружены» в отрицательный непрерывный спектр. Изучение энергетических спектров позитронов эмиссии – определение формы, ширины и распределения интенсивности спектральных линий – представляет интерес не только с точки зрения фундаментальной науки, но также позволяет получить детальную информацию о ядерной реакции между очень тяжелыми ядрами, такую, как время жизни молекулоподобного сверхтяжелого ядра, расстояние между составляющими ядрами, поперечное сечение реакции и др. Для теоретического исследования спектров необходимо знание связанных состояний в поле сверхкритических ядер. В настоящей статье эта задача была рассмотрена с точки зрения формализма ОКД. Мы получили выражение для оператора эволюции, описывающего эволюцию состояния  $|1s\rangle$ , погружающегося в континуум. Это состояние характеризуется в лидирующем порядке энергетическим распределением, описываемым амплитудой (27). Важно, что результаты, полученные в рамках ОКД, в лидирующем порядке воспроизводят результаты, полученные стандартными методами. Но при решении вопросов погружения состояний и структуры вакуума в поле супертяжелых ядер не обязательно ограничиваться решением обобщенного динамического уравнения только в лидирующем порядке: это уравнение позволяет решить данную задачу с любой точностью. Если заряд ядра существенно превышает критический заряд, в континуум опускаются следующие за  $1s$  связанные состояния ( $2p$ ,  $2s$  и т. д.). В этом случае уже нельзя ограничиваться лишь кулоновским взаимодействием в системе и задача сильно усложняется. В то же время у нас есть надежда, что эта задача может быть корректно описана в рамках формализма ОКД, и это откроет новые возможности для решения многих проблем электродинамики в сильных полях.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-2965.2008.2.

### Summary

*R.Kh. Gainutdinov, A.A. Mutygullina, A.S. Petrova.* Bound States in Supercritical Fields and the Generalized Quantum Dynamics.

The problem of the bound states in supercritical fields is investigated. A solution of the generalized dynamical equation is obtained, which determines the energy distribution of the electronic bound state  $1s_{1/2}$ , which is imbedded in the lower continuum, up to accuracy of  $O((Z - Z_{cr})/Z_{cr})$ , where  $Z$  stays for the whole nuclear charge and  $Z_{cr}$  is the critical charge.

**Key words:** superheavy nuclei, electronic bound states, unstable vacuum.

## Литература

1. Müller U., Soff G., de Reus T., Reinhardt J., Greiner W. Positrons from Supercritical Fields of Giant Nuclear systems // Zeitschrift für Physik A. Atoms and Nuclei. – 1983. – Bd. 313. – S. 263–279.
2. Фок В.А., Крылов Н.С. О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // ЖЭТФ. – 1947. – Т. 17. – Р. 93–100.
3. Gainutdinov R.Kh. The decay and energy of unstable bound states // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – V. 22. – P. 269–286.
4. Gainutdinov R.Kh. Nonlocal interactions and quantum dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 5657–5677.
5. Гайнутдинов Р.Х. Расщепление энергетических уровней многозарядных ионов, обусловленное взаимодействием с собственным полем излучения // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 100. – С. 133–144.
6. Гайнутдинов Р.Х., Мутыгуллина А.А., Петрова А.С. Энергетические распределения электронных связанных состояний в поле сверхтяжелого ядра // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 2. – С. 104–111.
7. Feynman R.P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. – 1948. – V. 20. – P. 367–387.
8. Greiner W., Reinhardt J. Quantenelektrodynamik. – Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 1995. – 520 S.
9. Greiner W., Müller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. – 594 p.
10. Зельдович Я.Б., Попов В.С. Электронная структура сверхтяжелых атомов // Усп. физ. наук. – 1971. – Т. 105. – С. 403–440.

Поступила в редакцию  
27.01.09

---

**Гайнутдинов Ренат Хамитович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.

E-mail: *Renat.Gainutdinov@ksu.ru*

**Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Казанского государственного университета.

E-mail: *Aigul.Mutygullina@ksu.ru*

**Петрова Александра Сергеевна** – студент кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.