КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Ф.Г. ВАГИЗОВ, Е.Н. ДУЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКГО ХАРАКТЕРА РАСПАДА РАДИОАКТИВНЫХ ЯДЕР. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Казань

2013

УДК 539.164

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
ФГАУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Учебно-методической комиссии Института физики
Протокол №4 от 17 июня 2013 г.
Заседания кафедры физики твёрдого тела
Протокол №16 от 7 июня 2013 г.

Авторы:
канд. физ.-мат. наук, доцент Вагизов Ф.Г.
канд. физ.-мат. наук, асс. Дулов Е.Н.

Рецензент:
к.ф.-м.н., с.н.с КИББ КазНЦ РАН **Манапов Р.А.**

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА РАСПАДА РАДИОАКТИВНЫХ ЯДЕР, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА.
Учебно-методическое пособие / Ф.Г. Вагизов, Е.Н. Дулов // Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. – 32 с.

Аннотация
Учебно-методическое пособие предназначено для студентов института физики дневного и вечернего отделений, приступивших к изучению курсов «Ядерная физика», «Физика атомного ядра и частиц», «Физика атомов, атомных явлений, атомного ядра и частиц». Задачей настоящей лабораторной работы, предназначенной для общего физического практикума по ядерной физике, является знакомство со статистической природой погрешности, возникающей при измерениях интенсивности излучения путём подсчёта числа частиц. Предлагается пронаблюдать эту случайную погрешность в эксперименте по регистрации частиц источника ионизирующего излучения счётчиком Гейгера, а также пронаблюдать распределение Пуассона.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целью лабораторной работы является освоение методики обработки случайных чисел с использованием распределения Пуассона и критерия Пирсона. Экспериментальная часть включает ознакомление студентов с устройством, принципом работы счетчика Гейгера и методикой измерения радиоактивного излучения на примере регистрации интенсивности γ-квантов при радиоактивном распаде ядер препарата ^{137}Cs.

В данной лабораторной работе исследуется статистический характер распределения интенсивности γ-излучения при радиоактивном распаде ядер ^{137}Cs (измеряется количество зарегистрированных γ-квантов ***n***, испускаемых источником за фиксированный промежуток времени). Величина ***n*** является случайной, так как испускание γ-квантов происходит в результате спонтанного распада ядер (^{137}Cs). Радиоактивный нуклид ^{137}Cs претерпевает бета-распад (период полураспада 30,17 лет) с переходом в возбужденное состояние ($\frac{11}{2}^-$) нуклида ^{137m}Ba с энергией 0.6617 Мэв (94.6 %) и в ос-

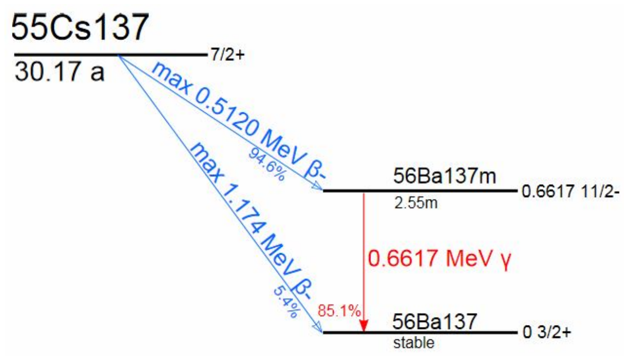

Рис. 1. Схема распада ^{137}Cs.

новное состояние ($\frac{3}{2}^+$) с вероятностью 5.4 %.

1. Статистический характер характера распада радиоактивных ядер

Случайная величина, в отличие от неслучайной, не имеет какого-то определенного значения. Поэтому результаты повторных измерений такой величины могут значительно различаться, т. е. будет наблюдаться «разброс» экспериментальных данных. Причем, любое из полученных значений будет правильным, в том смысле, что не будет являться экспериментальной погрешностью – просто на момент одного измерения исследуемая величина имела одно значение, а на момент другого измерения – другое. Конечно, одни значения $\boldsymbol{n}$ будут встречаться часто, другие – намного реже, но даже вероятность того, что в эксперименте будет получено огромное значение $\boldsymbol{n}$, соответствующее одновременному распаду всех ядер ^{137}Cs, не равна нулю.

Следует обратить внимание на принципиально разные причины «разброса» экспериментальных данных в сериях измерений при исследовании случайных и неслучайных величин. В первом случае меняется, как сказано выше, сама измеряемая величина, во втором – случайным образом меняются отклонения измеренных значений от истинного значения исследуемой величины. Вызываются эти отклонения множеством неконтролируемых малых внешних воздействий на прибор, меняющихся случайным образом, как по величине, так и по знаку. Например, если мы производим взвешивание какого-то образца, то из-за конечного трения в подвеске коромысла весов, присутствия пыли, воздействия конвективных потоков воздуха, вибраций самой различной природы и т. д. и т. п., результаты повторных взвешиваний не будут совпадать между собой, но сама измеряемая величина (масса) остается неизменной.

Интуитивно ясно, что при усреднении результатов измерений неслучайной величины происходит взаимная компенсация отклонений и среднее значение дает хорошее приближение к истинному значению. Результат любого единичного измерения также дает приближенное значение этой величины, хотя и менее надежное, чем среднее значение. Среднее значение, вычисленное по результатам измерений случайной величины, является очень важным параметром, но само по себе случайную величину не характеризуют (как и результат любого конкретного измерения). Исчерпывающей характеристикой случайной величины является функция, описывающая вероятность появления того или иного ее значения. Таким образом, если цель эксперимента с неслучайной величиной состоит в определении ее истинного значения, то цель эксперимента со случайной величиной состоит в определении вида вероятностной функции и в расчете численных значений параметров этой функции.

2. Вероятностные функции распределения случайных событий – распределение Пуассона и Гаусса

Регистрация γ-кванта счетчиком является случайным событием. Поэтому, в течение равных интервалов времени счетчик может зарегистрировать разное число γ-квантов. Какова в этих условиях вероятность $P_k(t)$ того, что в течение этого времени счетчик зарегистрирует k фотонов? Такая постановка вопроса типична для громадного числа задач ядерной физики. Многие из них отличаются от изложенного только тем, что вместо числа фотонов/частиц, попавших в счетчик, рассматривается число каких-либо других событий (например, ядерных расщеплений, фотоэлектронов и т.д.). В целях сокращения изложения и использования терминов теории вероятности, в дальнейшем целесообразно просто говорить о числе тех или иных актов.

Рассмотрим очень малый (в пределе - бесконечно малый) интервал времени ***dt***; предположим, что вероятность осуществления в течение этого интервала одного акта $P_1(dt)$ пропорциональна ***dt***, то есть

$$P_1(dt) = ndt. \tag{1}$$

Величину ***n*** назовем интенсивностью. Вообще говоря, интенсивность может зависеть от времени, но для простоты будем полагать ее постоянной. Для того, чтобы за время dt произошло два акта, необходимо, чтобы после первого, в течение времени, оставшегося до конца интервала dt, осуществился второй акт. Вероятность каждого из этих событий является в соответствие с (1) бесконечно малой первого порядка относительно dt. Ввиду статистической независимости вероятность $P_2(dt)$ осуществления обоих событий равна произведению вероятностей, то есть является бесконечно малой второго порядка относительно dt. Аналогичным образом убеждаемся, что вероятности $P_3(dt)$, $P_4(dt)$ и т.д. являются бесконечно малыми величинами третьего, четвертого и т.д. порядка. Потому в равенстве

$$P_0(dt) + P_1(dt) + P_2(dt) + P_3(dt) + = 1$$

можно с точностью до членов первого порядка малости пренебречь $P_2(dt)$, $P_3(dt)$ и т.д. Откуда следует

$$P_0(dt) \cong 1 - P_1(dt),$$

и с учетом (1) получаем

$$P_0(dt) = 1 - ndt. \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$P_0(0) = 1. \tag{3}$$

Условие (3) означает, что в течение интервала нулевой длительности не может произойти ни одного акта, откуда вытекают также равенства

$$P_1(0) = P_2(0) = ... = 0. \tag{3*}$$

Используя вышеприведенные соотношения, вычислим $P_k(t)$. Начнем с самого простого: какова вероятность $P_0(t)$ того, что в течение времени t не произойдет ни одного акта? Рассмотрим сначала несколько бóльший интервал $t + dt$ и вычислим $P_0(t+dt)$. Для того, чтобы в интервале $t + dt$ не было ни одного акта, необходимо и достаточно отсутствие актов в интервале t и в интервале dt. С учетом статистической независимости событий в любых неперекрывающихся интервалах это дает равенство

$$P_0(t + dt) = P_0(t) \cdot P_0(dt) = P_0(t) \cdot (1 - ndt).$$

С другой стороны, с точностью до членов порядка $(dt)^2$ имеем

$$P_0(t + dt) = P_0(t) + \frac{dP_0(t)}{dt} \cdot dt.$$

Сравнивая два выражения для $P_0(t+dt)$ и производя очевидные сокращения, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_0}{dt} + nP_0 = 0. \tag{4}$$

Решая (4) при начальном условии (3), получаем

$$P_0 = e^{-nt}. \tag{5}$$

Вычислим теперь $P_k(t)$, полагая $k >> 1$. Как и раньше, начнем с $P_k(t+dt)$. Для того, чтобы в интервале $t+dt$ произошло k актов, необходимо и достаточно осуществления одного из следующих событий:

в интервале t произошло k актов, в dt - ни одного, в интервале t произошло k–1 актов, в dt - один акт,

в интервале t произошло k–2 актов, в dt - два акта,

………………. ,

в интервале t не произошло ни одного акта, в dt - k актов.

На основании статистической независимости событий в неперекрывающихся интервалах имеем

$$P_k(t+dt) = P_k(t)P_0(dt) + P_{k-1}(t)P_1(dt) + ... + P_0(t)P_k(dt).$$

Пренебрегая бесконечно малыми второго и старшего порядков, можно также записать

$$P_k(t+dt) = P_k(t)P_0(dt) + P_{k-1}(t)P_1(dt),$$

то есть

$$P_k(t+dt) = P_k(t)\cdot(1-ndt) + P_{k-1}(t)ndt.$$

С другой стороны,

$$P_k(t+dt) = P_k(t) + \frac{dP_k}{dt}dt.$$

Сравнивая оба выражения для P_k, получаем после соответствующих сокращений так называемое кинетическое уравнение

$$\frac{dP_k}{dt} + nP_k = nP_{k-1}, \qquad (4^*)$$

которое следует решать, учитывая начальное условие (3*). Полагая k = 1 и подставляя $P_0(t)$ из (5), получаем

$$\frac{dP_1}{dt} + nP_1 = ne^{-nt}. \qquad (4^{**})$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение вида

$$P_1(t) = C_1 e^{-nt}\cdot t.$$

Подставляя в (4**) и сокращая на e^{-nt}, получим

$$C_1 - nC_1 t + nC_1 t = n.$$

Отсюда $C_1 = n$. Тогда $P_1(t) = nte^{-nt}$.

Полагая k =2, получаем уравнение

$$\frac{dP_2}{dt} + nP_2 = nP_1 = n^2te^{-nt},$$

которое имеет решение вида

$$P_2(t) = C_2e^{-nt} \cdot t^2.$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, и снова сокращая на e^{-nt}, получаем

$$-C_2nt^2 + 2C_2t + C_2nt^2 = n^2t,$$

то есть $C_2 = n^2/2$. Тогда $P_2(t) = \frac{(nt)^2}{2}e^{-nt}$.

Продолжая аналогичным образом, можно получить выражения для $P_3(t)$, $P_4(t)$ и т.д. Общая формула будет иметь вид:

$$P_k(t) = \frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt}. \qquad (5^*)$$

Распределение (5*) называется ***распределением или законом Пуассона***.

2.1. Распределение Пуассона

Определим среднее число отсчетов за время t. Среднее число актов определяется равенством

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k.$$

Тогда

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt} \cdot k = e^{-nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nt)^k}{(k-1)!} = nte^{-nt}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(nt)^l}{l!} = nte^{-nt} \cdot e^{nt} = nt$$

Здесь $l = k - 1$, а также используется как тождество разложение экспоненты в ряд Тейлора в окрестности нуля $e^x = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!}$. Таким образом, можно записать

$$P_k(t) = \frac{\bar{k}^k}{k!}e^{-\bar{k}}, \text{ где } \bar{k} = nt. \qquad (6)$$

Как видно из (6), распределение Пуассона полностью определяется заданием только одного параметра - среднего числа актов k.

Рассмотрим некоторые свойства закона Пуассона. В теоретических рассмотрениях величина k может быть определена при учете конкретных особенностей той или иной задачи. Экспериментальное определение k является, как правило, основной целью общей задачи измерений, проводимых в ядерной физике.

Из (6) следует, что

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{\bar{k}}{k+1}.$$

Поэтому, если $\bar{k} \leq 1$, то P_k монотонно убывает с ростом k. Иная картина имеет место, когда $k > 1$. В этом случае P_k сначала возрастает, достигая своего максимального значениями при $k \approx \bar{k}$ после чего начинает монотонно убывать. Зависимость P_k от k при разных $\bar{k}$ - изображена на рис. 2.

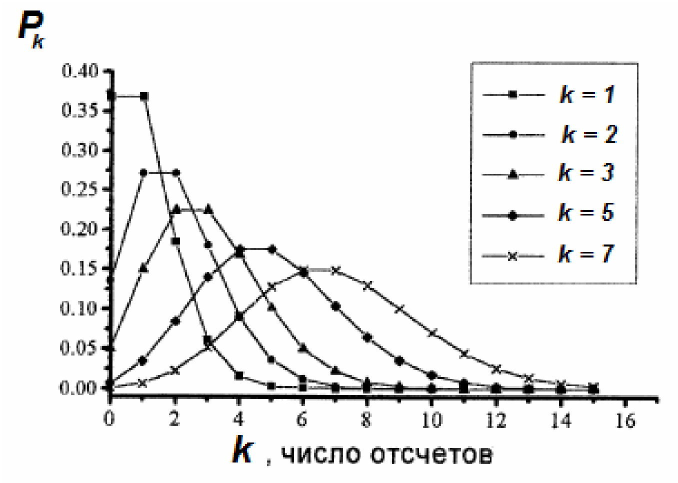

Рис. 2. Зависимость P_k от k при разных $\bar{k}$.

По мере роста $\bar{k}$ максимум становится относительно все менее острым, а график - все более симметричным относительно $k = \bar{k}$. Если k - очень велико, то график практически вполне симметричен, напротив – при малых k наблюдается резкая асимметрия.

Следует отметить, что распределение Пуассона (6) может выступать не как асимптотическое, а как совершенно точное. Поэтому необходимо четко сформулировать условия его возникновения.

1. Случайная величина (число отсчетов) может принимать только целые положительные значения, включая 0.

2. Распределение Пуассона описывает редкие события – вероятность двух (и более) событий на достаточно малом временном или пространственном интервале бесконечно мала по сравнению с вероятностью одного события. Это свойство называется ординарностью.

3. События должны быть статистически независимыми (во времени или пространстве).

4. Время (или пространство) должно быть однородным для изучаемых событий. В этом случае поток событий можно считать стационарным, т. е. не зависящим от начала отсчета временной или пространственной координаты.

Можно доказать, что если все эти условия выполняются, что встречается довольно часто, то распределение соответствующих вероятностей оказывается пуассоновским (6).

Приведем некоторые примеры, в которых нарушаются условия формирования распределения (6). Например, парное рождение частиц нарушает все условия (1–4); влияние мертвого времени системы регистрации нарушает условия 3 и 4.

Закон Пуассона в форме (6) не содержит в явном виде информацию о том, какое именно распределение (временно́е или пространственное) изучается. Число $\bar{k}$ может быть средним числом событий за время *t*, тогда $\bar{k} = nt$, где *n* – среднее число событий за единицу времени, т. е., их интенсивность. Но $\bar{k}$ может быть и средним числом событий в данном элементе пространства, тогда *n* будет иметь смысл пространственной интенсивности.

Также отметим, что любое статистическое распределение должно быть нормировано согласно требованию, чтобы вероятность достоверного события равнялась единице. В нашем случае условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{k}^k e^{-\bar{k}} \Big/ k! = 1 \qquad (7)$$

выполняется в силу известного тождества:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! = e^x .$$

Графически условие (7) означает, что сумма длин всех ординат распределения на рис. 2 должна равняться единице.

Важнейшими характеристиками статистического распределения являются среднее значение и дисперсия. Среднее значение $\bar{k}$ определяет положение распределения на оси абсцисс, а дисперсия D – разброс случайных значений относительно этого среднего. Для дискретных законов распределения P_k среднее значение и дисперсия случайной величины k определяются соответственно:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k , \tag{8}$$

$$D_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \bar{k})^2 \cdot P_k . \tag{9}$$

Суммирование в выражениях (8) и (9) проводится по всем k; P_k – вероятность соответствующего значения k.

Если использовать распределение Пуассона (6), то из (9) получается

$$D_k = \bar{k}. \tag{10}$$

Такая связь между дисперсией и средним значением случайной величины характерна только для пуассоновского распределения и является его отличительным признаком.

Введем также понятие среднеквадратической (стандартной) ошибки σ, связанной с дисперсией соотношением

$$\sigma_k = \sqrt{D_k} = \sqrt{\bar{k}} . \tag{11}$$

Из выражений (10) и (11) следует, что относительная статистическая ошибка измерения случайной величины k, распределенной по закону Пуассона,

$$\delta_k = 1 / \sqrt{\bar{k}} . \tag{12}$$

Как правило, основными целями многих экспериментальных задач ядерной физики являются измерения среднего значения случайной величины $\bar{k}$ и оценка погрешности этого измерения. Так, из выражения (12) следует, что погрешности в 1 %

соответствует $\bar{k}$ = 10 000. И если для получения такого количества импульсов затрачено время t, то никакое дробление во времени уже не увеличит эту ошибку. Например, интенсивность отсчетов, т. е. скорость счета $n = k/t$, будет известна с той же относительной ошибкой (1 %), что и $\bar{k}$.

Формулы (11) и (12) играют основную роль во всех приложениях закона Пуассона. Их смысл, в общих чертах, состоит в следующем: если регистрировать отсчеты счетчика в очень большом числе равных интервалов, то в большей части интервалов число отсчетов k будет отличаться от $\bar{k}$ не более чем на $\sqrt{\bar{k}}$.

2.2. Нормальное распределение – распределение Гаусса

Анализ выражения (6) показывает, что по мере роста $\bar{k}$ распределение становится симметричным. При малых $\bar{k}$ оно резко асимметрично из-за отсутствия хвоста слева (отрицательные значения k запрещены), при выполнении неравенства $\sqrt{\bar{k}} >> 1$ становится полностью симметричным. Однако условие $\sqrt{\bar{k}} >> 1$ означает, что вероятности близких значений k будут почти одинаковы, и в этом случае целесообразно изменить саму постановку задачи, т. е. рассматривать вероятность не отдельного возможного значения k, а вероятность попадания k в заданный интервал значений Δk вблизи некоторого фиксированного значения k. Тем самым совершается переход от дискретного распределения к непрерывному.

Можно сказать, что при больших $\bar{k}$ распределение Пуассона переходит в распределение Гаусса. Поскольку для распределения Пуассона всегда $\sigma_k^2 = \bar{k}$, то при выполнении условия ($\sqrt{\bar{k}} >> 1$) распределение Пуассона переходит в такое распределение Гаусса, для которого дисперсия равна среднему, то есть

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\bar{k}}} k. \tag{13}$$

Этот закон распределения встречается очень часто и играет исключительно важную роль в статистике многих физических процессов. Более того, это самый широко распространенный статистический закон в природе. Центральная предельная теорема дает условия его формирования: если случайную величину k можно предста-

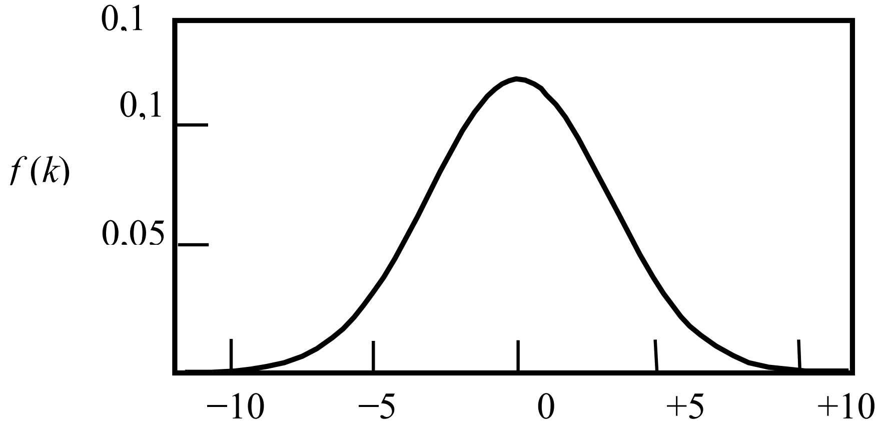

Рис. 3. Нормальное распределение для $\bar{k} = 0$ и $\sigma = 3.2$

вить как сумму очень большого числа независимых случайных величин k_i с любыми законами распределения, но входящими в k с примерно одинаковыми статистическими весами α_i ($k = \sum \alpha_i k_i$), то k оказывается распределенной нормально. На рис. 3 показана плотность вероятности нормального закона (13) для $\bar{k} = 0$ и $\sigma = 3.2$.

Закон (13) определяет вероятность отклонения случайной величины от среднего значения на величину ($k - \bar{k}$) в интервале dk. Квадрат стандартного отклонения σ является дисперсией, и если равенство (13) получено при условии $\sqrt{\bar{k}} >> 1$ из (6), то $\sigma^2 = \bar{k}$ и $f(k)dk$ определяется выражением:

$$f(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} \exp\left[-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\bar{k}}\right] dk. \tag{14}$$

Нормировка $f(k)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k)dk = 1$$

графически представляет собой площадь под кривой распределения.

Как и в случае дискретного распределения, среднее значение $\bar{k}$ характеризует положение кривой на оси абсцисс:

$$\bar{k} = \int_{-\infty}^{\infty} k\, f(k)\, dk,$$

а дисперсия – форму кривой:

$$D_k = \int_{-\infty}^{\infty} (k-\bar{k})^2\, f(k)\, dk.$$

В общем случае, для нормального (Гауссова) закона $D_k \neq \bar{k}$, но средняя квадратичная погрешность $\sigma_k = \sqrt{D_k}$ и относительная погрешность в измерении среднего значения нормальной случайной величины определяются стандартным образом:

$$\delta_k = \sqrt{D_k}\big/\bar{k}.$$

Из выражения (13) следует, что вероятность попадания случайной величины в интервал значений от k_1 до k_2 определится интегралом

$$f(k_1 \le k \le k_2)dk = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} \exp\left[-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\sigma^2}\right] dk. \tag{15}$$

Для вычисления интеграла (15) в конечных пределах следует воспользоваться функциями Лапласа (или Гаусса):

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\, dt.$$

Используя выражение (14), легко убедиться, что нормальная случайная величина отклоняется от своего среднего значения по модулю не более чем на σ, 2σ и 3σ соответственно со следующими вероятностями:

$$f\left(\left|k-\bar{k}\right| \le \sigma\right) = \Phi(1/\sqrt{2}) = 0{,}682; \tag{16}$$

$$f\left(\left|k-\bar{k}\right| \le 2\sigma\right) = \Phi\left(\sqrt{2}\right) = 0{,}954; \tag{17}$$

$$f\left(\left|k-\bar{k}\right| \le 3\sigma\right) = \Phi(3/\sqrt{2}) = 0{,}997. \tag{18}$$

В применении к задаче о временно́м распределении регистрируемых частиц неравенства (16)-(18) означают следующее: если выполняется условие $\sqrt{\bar{k}} >> 1$, то при регистрации частиц в большом числе равных временны́х интервалов показания счетчика в 68,2 % случаев будут отличаться от $\bar{k}$ не более чем на $\pm$ σ, в 95,4 % − не более чем на ± 2σ и в 99,7 % − не более чем на ± 3σ. Соотношения (16)-(18) носят название ***«правила* 3σ »** и являются характерным свойством нормального закона.

Дополнительные признаки нормального распределения – нулевые асимметрия и эксцесс. В общем случае асимметрия (As) любого распределения определяется через третий центральный момент и характеризует симметрию кривой распределения:

$$\mathrm{As} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(k - \bar{k}\right)^3 f(k)dk \Big/ \sigma^3 \cdot \tag{19}$$

Эксцесс (Exc) определяется через четвертый центральный момент и описывает крутизну кривой распределения:

$$\mathrm{Exc} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(k - \bar{k}\right)^4 f(k)dk \Big/ \sigma^4 \right] - 3 \cdot \tag{20}$$

Если в выражениях (19) и (20) провести вычисления с $f(k)$ из (13), то получится As = 0 и Exc = 0. В выражении (20) вводят «−3», чтобы сделать Exc нормального распределения равным нулю: так удобнее проверять на «нормальность» другие распределения.

Приведем некоторые примеры из различных разделов физики, где используется нормальный закон. Во-первых, максвелловское распределение молекул по скоростям есть ничто иное, как трехмерный нормальный закон. Далее, пробеги частиц в веществе, разброс углов многократного рассеяния частиц и, наконец, разброс по энергиям в пике полного поглощения – все это примеры нормального распределения.

3. Расчет параметров функций распределения Гаусса и Пуассона, погрешность расчета математического ожидания

Пусть x – случайная гауссовская величина, а $f(x)$ – некоторая функция от этой величины. Тогда среднее значение, согласно общему правилу вычисления средних величин, определяется интегралом:

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(\mu,\sigma,x)dx\,. \tag{21}$$

При $f(x) = x$ и $f(x) = (\mu - x)^2$ прямым интегрированием выражения (21) мы можем найти, что для нормального распределения (13):

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xG(\mu,\sigma,x)dx = \mu, \tag{22}$$

$$\overline{(\mu - x)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu - x)^2 G(\mu,\sigma,x)dx = \sigma^2, \tag{23}$$

где μ - математическое ожидание случайной величины. Таким образом, математическое ожидание μ случайной гауссовской величины x равно среднему значению этой величины $\overline{x}$, а σ^2 – квадрату среднеквадратичного отклонения $\overline{(\mu - x)}^2$ x от μ.

Формула усреднения для пуассоновских случайных величин аналогична формуле (21) с той разницей, что функция Гаусса заменяется функцией Пуассона, а интегрирование заменяется суммированием бесконечного ряда, так как в отличие от распределения Гаусса, распределение Пуассона является дискретным. Особенность распределения Пуассона состоит в том, что математическое ожидание численно равно дисперсии:

$$\mu = \overline{k}; \quad \sigma^2 = \mu. \tag{24}$$

Множество всех возможных значений случайной величины называется *генеральной совокупностью*. Согласно соотношениям (22-24), среднеарифметическое по генеральной совокупности дает нам точное значение математического ожидания μ, а средний квадрат отклонений от найденного среднего – дисперсию. Однако, в результате экспериментальных измерений мы никогда не сможем получить полный набор всех возможных значений случайной величины, так как для этого нам пришлось бы выполнить бесконечное количество измерений. В эксперименте мы можем получить лишь ограниченное множество значений исследуемой случайной величины – выборку из генеральной совокупности, или просто *выборку*. Среднее по выборке не дает точного значения математического ожидания, но является наилучшей оценкой μ:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \approx \mu. \tag{25}$$

В выражении (25) N – количество измерений, x_i – результат i-го измерения. Выражение (25) носит название «среднее арифметическое значение» измеряемой величины. Наилучшей оценкой σ является среднеквадратичное отклонение S_x от среднего:

$$\sigma \approx S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)^2}. \qquad (26)$$

Когда мы рассчитываем математическое ожидание по формуле (25), мы допускаем некоторую ошибку, связанную, как отмечено выше, с тем, что усреднение производится не по генеральной совокупности, а по конечной выборке длиной N. Если еще раз проделать N измерений и вновь рассчитать математическое ожидание, то новое значение μ не совпадет с первоначальным. Естественно, возникает вопрос о значимости этого расхождения. Для ответа на него необходимо оценить погрешность определения μ по результатам экспериментальных измерений (заметьте, речь идет о погрешности μ, а не о погрешности $\overline{x}$!).

Понятие «погрешность» не столь очевидно, как это может показаться. С одной стороны, погрешность – это то, насколько измеренное значение величины отличается от истинного. С другой стороны, сделать численную оценку, основываясь на таком определении погрешности, мы не сможем, так как истинное значение измеряемой величины нам никогда не известно.

Современная теория, позволяющая дать четкое определение погрешности и способ ее численной оценки, базируется на анализе статистических распределений. Эта теория строго разработана для гауссовских случайных величин. Однако, как отмечалось выше, при больших μ (больших средних значениях случайной величины) распределения Гаусса и Пуассона практически не различаются (речь идет, конечно, о совпадении в точках $x = n$, где n – целое). Из рис. 4 видно, что уже при $x = 9$ различие становится весьма малым. Поэтому теория, разработанная для гауссовских величин, в большинстве случаев применима и для пуассоновских. Сколько-нибудь полное рассмотрение теории погрешностей выходит за рамки данного пособия. Поэтому, ниже приводится лишь конспективное изложение ее результатов.

Пусть мы произвели N измерений случайной гауссовской величины x. По полученным экспериментальным данным мы можем построить кривую распределения (способ построения такой кривой по результатам эксперимента описан ниже), а по

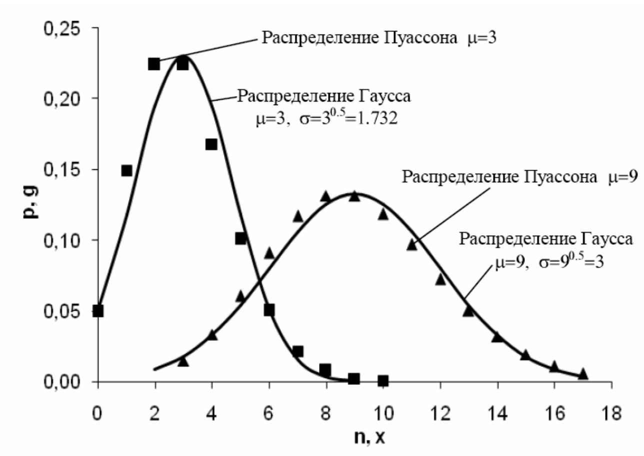

Рис. 4. Распределения Гаусса и Пуассона при одинаковых значениях математического ожидания и дисперсии.

формулам (25–26) рассчитать среднее значение $\bar{x}_1$ и среднеквадратичное отклонение S_x. Заметим, что $\bar{x}_1$ представляет собой сумму из N случайных величин (с точностью до множителя $1/N$) и, следовательно, $\bar{x}_1$ тоже случайная величина. Иными словами, если бы мы выполнили новую серию из N измерений и вычислили среднее по этой серии, то получили бы значение отличное от $\bar{x}_1$. При дальнейшем повторении измерений - $\bar{x}_2$, затем - $\bar{x}_3$ и $\bar{x}_4$ … В результате мы получим бесконечный ряд средних значений: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, .. \bar{x}_j, \ldots$ Теперь мы можем построить кривую – кривую распределения средних $\bar{x}_j$. Осью симметрии этой кривой будет $x = \mu$, так как в соответствии с нашими рассуждениями множество средних представляет собой генеральную совокупность, а среднее по генеральной совокупности точно равняется μ. Стандартное отклонение этого распределения оценивается величиной

$$\bar{\sigma} \approx \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2} = S_{\bar{x}}. \qquad (27)$$

$S_{\bar{x}}$ называется среднеквадратичным отклонением среднего арифметического значения. Вспомним теперь, что вероятность обнаружить случайную величину внутри конечного интервала ($\bar{x}_1, \bar{x}_2$) определяется интегрированием выражения (13) в пределах от $\bar{x}_1$ до $\bar{x}_2$. Прямым интегрированием можно найти, что вероятность обнаружить полученное нами значение $\bar{x}_1$ в интервале $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ равна 0,68 (или 68 %). В интервал $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$ значение $\bar{x}_1$ попадет с вероятностью 95 % и т. д. Очевидно, что справедливо и обратное: с вероятностью P = 68 % значение μ будет обнаружено в интервале $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ и т. д. Вероятность P называется *доверительной вероятностью*, а интервал $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ - *доверительным интервалом*. Все точки доверительного интервала рассматриваются равноправными, т. е. позиция μ внутри доверительного интервала никак не фиксирована: с одной и той же вероятностью μ может оказаться в середине, на краю или в любой другой точке доверительного интервала. Шириной доверительного интервала и определяется численное значение погрешности (с заданной доверительной вероятностью).

В предыдущих выражениях ширина доверительного интервала указана в стандартных отклонениях $\bar{\sigma}$. Однако, по результатам измерений мы можем рассчитать только величину $S_{\bar{x}}$ (по формуле (27)), которая не равна в точности $\bar{\sigma}$. Через $S_{\bar{x}}$ границы доверительного интервала $\pm\Delta x$ выражаются следующим образом:

$$\Delta x = t_{N,P} \cdot S_{\bar{x}}, \tag{28}$$

где $t_{N,P}$ - коэффициент Стьюдента.

Коэффициенты Стьюдента являются двухпараметрическими величинами. Их значения зависят от количества измерений (длины выборки) и доверительной вероятности. Численные значения коэффициентов Стьюдента приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициент Стьюдента, $t_{N,P}$

Длина выборки N	Доверительная вероятность, P			
	0,683	0,95	0,99	0,683
3	1,32	4,70	9,9	19,2

4	1,20	3,18	5,8	9,2
5	1,15	2,78	4,6	6,6
7	1,09	2,45	3,7	4,9
10	1,06	2,26	3,2	4,1
20	1,03	2,09	2,8	3.4
50	1,01	2,01	2,7	3,2
100	1,0	2,0	2,6	3,1
200	1,0	2,0	2,6	3,0

Традиционно, результат эксперимента записывается в виде

$$\mu = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t_{N,P} \cdot S_{\bar{x}}, \tag{29}$$

с обязательным указанием доверительной вероятности *P*.

Несмотря на такую форму записи, смысл выражения остается прежним: μ лежит в интервале $\bar{x} \pm \Delta x$ с вероятностью *P*.

Следствие из теории интервального оценивания погрешности. С позиций интервального метода оценивания погрешности, результатом эксперимента является не число, измеренное с какой-то погрешностью, а интервал, внутри которого с заданной вероятностью лежит истинное значение исследуемой величины. Поэтому результаты двух экспериментов, $Z_1 = \bar{a} \pm \Delta a$ и $Z_2 = \bar{b} \pm \Delta b$, будут одинаковыми (совпадают в пределах погрешности), если отрезки $\bar{a} \pm \Delta a$ и $\bar{b} \pm \Delta b$ пересекаются.

4. Проверка гипотез о законе распределения. Критерий согласия χ^2

Целью многих экспериментов является оценка закона распределения некоторой физической величины. В ядерной физике это может быть, например: число распавшихся ядер, закон углового распределения нейтронов, рассеянных на ядрах определенного элемента, и.т.д.. Точный закон распределения случайной величины в эксперименте определить невозможно, поскольку для этого понадобилось бы бесконечное число измерений для получения генеральной совокупности, а из конечного числа измерений определяется лишь конечная выборка. Из этого сразу следует важный вывод о том, что эксперимент не доказывает правильность гипотезы, а лишь позволяет сделать заключение о непротиворечивости ее с данными эксперимента.

Обычно, перед проведением опыта уже сформулирована одна или несколько априорных гипотез, полученных из теории или в результате предыдущих экспериментов, часто косвенных. Поскольку измеряемая величина случайная, то, даже если закон ее распределения точно известен, ввиду ограниченности выборки будут наблюдаться отклонения результатов наблюдения от вычисленных по распределению. Возникает вопрос: случайны ли наблюдаемые отклонения измеренных величин от предсказанных теорией, или имеются систематические расхождения, т. е. теория неверна?

Критерием согласья называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом распределении. С его помощью можно установить, задавшись так называемой *доверительной вероятностью,* согласуются экспериментальные данные с априорной гипотезой или нет. Доверительная вероятность определяется условиями задачи и обычно принимается близкой к единице, например, 0,95.

На практике, наиболее часто используется критерий согласия χ^2. Рассмотрим этот критерий. Пусть требуется проверить гипотезу о том, что случайная величина x распределена по закону $p(x)$. Рассмотрим опыт, в котором получено n независимых измерений x. Разобьем всю область изменений x на l интервалов и подсчитаем количество n_i измеренных значений x, попавших в каждый из интервалов. Поскольку теоретическое распределение $p(x)$ предполагается известным, можно рассчитать теоретическое число значений x в i-м интервале np_i, где p_i - вероятность попадания случайной величины в i-й интервал. Если экспериментальные частоты n_i сильно отличаются от теоретических np_i, то гипотезу о согласии теории и эксперимента следует отвергнуть. Критерий χ^2 дает возможность количественно выразить эту степень согласия.

В качестве меры расхождения между теорией (np_i) и экспериментом (n_i) используют критерий

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \tag{30}$$

Ясно, что чем меньше различаются теоретические и экспериментальные частоты, тем меньше значение χ^2. Поскольку распределение (30) при $n \to \infty$ стремится к распределению χ^2, этот критерий и назван критерием согласия χ^2. Применяют его следующим образом: рассчитав значение χ^2 и задавшись доверительной вероятностью α (или уровнем статистической значимости $1-\alpha$), находят по таблицам значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$ для $\nu = l - 1 - t$, где t - количество дополнительных соотношений для оценки параметров распределения $p(x)$. Если при данном α $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}$, то теория и эксперимент расходятся, если $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,\nu}$ - согласуются. Также из таблиц можно определить доверительную вероятность α, при которой $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,\nu}$.

Рассмотрим пример. Проведено $n = 200$ измерений случайной величины - в табл. 2 приведены значения k и частоты их появления n_k.

Таблица 2. Экспериментальные n_k и ожидаемые по Пуассону np_k частоты.

k	0	1	2	3	4	5	6	Всего
n_k	109	65	22	3	1	0	0	200
$m_k = np_k$	108,7	66,3	20,2	4,1	0,6	0,07	0,01	200

Необходимо проверить гипотезу о том, что эти данные подчиняется закону Пуассона, т. е. что

$$p(k) = p_k = \frac{\bar{k}^k \cdot e^{-\bar{k}}}{\bar{k}\,!}.$$

Мы видим, что для полного определения p_k нужно оценить параметр $\bar{k}$. Пусть этой оценкой будет выборочное среднее. Среднее $\bar{k}$ вычислим по формуле

$$\bar{k} = \frac{\sum_k k n_k}{\sum_k n_k}. \quad (31)$$

Таким образом

$$\bar{k} = (0 \cdot 109 + 1 \cdot 165 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1)/200 = 122/200 = 0.61$$

Тогда для ожидаемых частот получаем выражение

$$m_k = np_k = 200 \cdot (0.61)^k \cdot e^{-0.61} \cdot (k!)^{-1}.$$

Эти значения приведены в третьей строке табл. 2. Поскольку ожидаемые частоты для $k > 2$ малы, объединим последние четыре значения k и составим новую табл. 3.

Таблица 3.

k	0	1	2	>3
n_k	109	65	22	4
$m_k = np_k$	108,7	66,3	20,2	4,8

Для проверки гипотезы вычислим

$$u^2 = \sum_k \frac{(n_k - m_k)^2}{m_k} = \frac{0.3^2}{108.7} + \frac{(-1.3)^2}{66.3} + \frac{1.8^2}{20.2} + \frac{(-0.8)^2}{4.8} = 0.32.$$

Для оценки κ мы использовали одно соотношение (31), поэтому число степеней свободы равно $\nu = l - 1 - 1 = 2$. Следовательно, величина u^2 должна быть распределена примерно как χ_2^2.

Выясним теперь, не окажется ли величина u^2 столь большой, что исходная гипотеза (о распределении Пуассона) неправдоподобна. Из таблицы (см. приложение) значений χ^2 при различных P_{χ^2} в зависимости от числа степеней свободы ν [6] находим, что доверительной вероятности α = 0,95 (или 5%-му уровню статистической значимости) соответствует значение $\chi^2_{0.95;2} = 5.991$, т. е. величина u^2 должна находиться в пределах от 0 до 6.0. Поскольку значение u^2 попадает в этот интервал, проверяемая гипотеза принимается.

С другой стороны, если бы мы получили u^2 = 6,1 или больше, то должны были бы считать его значимым, поскольку, если гипотеза верна, то только в 5 случаях из 100 величина u^2 будет принимать столь большие значения.

5. Схема экспериментальной установки

Для изучения статистически распределенных событий – актов распада радиоактивных ядер – используется экспериментальная установка, основные узлы которой показаны на рис. 5.

В данной работе, в качестве источника гамма-квантов ***1*** используется радиоактивный препарат ^{137}Sc, размещенный в свинцовом коллиматоре. Счетчик Гейгера-Мюллера ***2*** служит для регистрации радиоактивного излучения. Универсальный узел сбора данных ***3*** Cassy Lab 2 с модулем многоканального анализатора MCA и соответствующее программное обеспечение используется для сбора и анализа экспериментальных данных.

Счетчики Гейгера-Мюллера широко применяются для регистрации различного рода радиоактивных и других ионизирующих излучений (β-частиц, γ-квантов и др.). Широкое применение счётчика Гейгера—Мюллера объясняется приемлемой чувствительностью, возможностью регистрировать разного рода излучения, сравнительной простотой и дешевизной установки.

Счётчик Гейгера—Мюллера - газоразрядный прибор для регистрации попавших в него ионизирующих частиц. Счетчик представляет собой газонаполненный конденсатор, который пробивается при пролете ионизирующей частицы через объём газа. Цилиндрический счётчик Гейгера—Мюллера состоит из металлической трубки или металлизированной изнутри стеклянной трубки, и тонкой металлической нити, натянутой по оси цилиндра. Нить служит анодом, трубка — катодом. Трубка заполняется разреженным газом, в большинстве случаев используют аргон, гелий и неон под давлением порядка сотен мм рт. ст.. Между катодом и анодом создается напряжение порядка 400В.

Важной характеристикой счётчика является его эффективность. Не все γ-

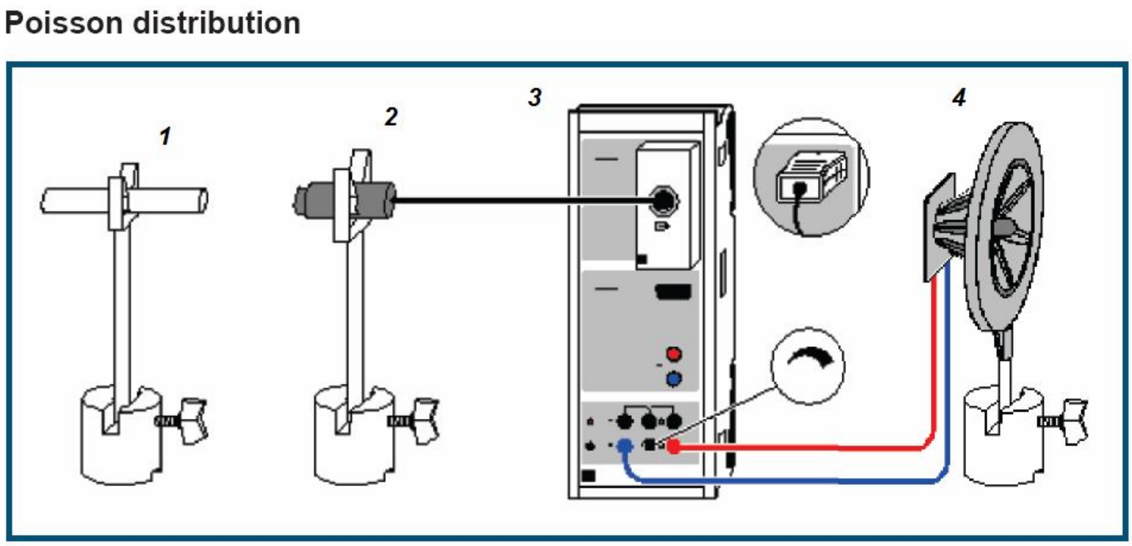

Рис. 5. Схема экспериментальной установки.

фотоны, попавшие на счетчик, дадут вторичные электроны и будут зарегистрированы, так как акты взаимодействия γ-лучей с веществом сравнительно редки, и часть вторичных электронов поглощается в стенках прибора, не достигнув газового объема. Эффективность счётчика зависит от толщины стенок счётчика, их материала и энергии γ-излучения. Наибольшей эффективностью обладают счётчики, стенки которых сделаны из материала с большим атомным номером Z, так как при этом увеличивается образование вторичных электронов. Кроме того, стенки счётчика должны быть достаточно толстыми. Толщина стенки счётчика выбирается из условия её равенства длине свободного пробега вторичных электронов в материале стенки. При большей толщине стенки вторичные электроны не пройдут в рабочий объем счётчика, и возникновения импульса тока не произойдет. Так как γ-излучение слабо взаимодействует с веществом, то обычно эффективность γ-счётчиков также мала и составляет всего 1-2 %. Чувствительность счётчика определяется составом газа, его объёмом, а также материалом и толщиной его стенок. Недостатком счётчика Гейгера—Мюллера является то, что он не даёт возможность идентифицировать частицы и определять их энергию.

Работа счетчика основана на ударной ионизации, γ-кванты, испускаемые радиоактивным изотопом, попадая на стенки счетчика, выбивают из него электроны. Электроны, двигаясь в газе и сталкиваясь с атомами газа, выбивают из атомов другие электроны и создают положительные ионы и свободные электроны. Электрическое поле между катодом и анодом ускоряет электроны до энергий, при которых начинается ударная ионизация. Возникает лавина ионов, и ток через счетчик резко возрастает. При этом на нагрузочном сопротивлении R (см. рис. 6) регистрирующей схемы образуется импульс напряжения, который подается в предварительный усилитель. Чтобы счётчик смог регистрировать следующую попавшую в него частицу, лавинный разряд нужно погасить. Это происходит автоматически. В момент появления импульса тока на сопротивлении R возникает большое падение напряжения, поэтому напряжение между анодом и катодом резко уменьшается — настолько, что разряд прекращается, и счетчик снова готов к работе.

Схема включения счетчика приведена на рис. 6. Напряжение между собирающим электродом и анодом счетчика подается от высоковольтного источника узла *3*. Конденсатор ***C*** разделяет цепь питания и входную цепь. Сопротивление ***R*** ограничивает ток через счетчик в момент разряда. Количественно правильная регистрация может производиться счетчиком после исследования его счетной характеристики, которая дает зависимость скорости счета от приложенного напряжения при постоянной интенсивности ионизирующего излучения. Для большинства счетчиков существует так называемое плато, которое лежит приблизительно от 360 до 460 В, в этом диапа-

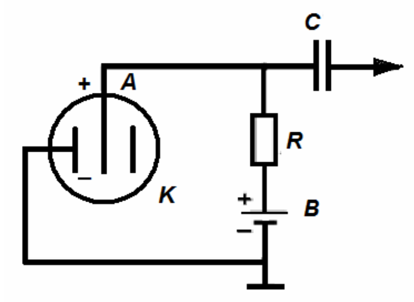

Рис. 6. Схема включения счетчика Гейгера-Мюллера.

зоне небольшие колебания напряжения не влияют на скорость счета.

Сформированные в течение разряда импульсы со счетчика ***2*** подаются в узел сбора данных *3* Cassy Lab 2 для последующего статистического анализа экспериментальных данных.

6. **Порядок выполнения лабораторной работы**

В лабораторной работе измеряется число зарегистрированных счетчиком γ-квантов в течение равных промежутков времени. По результатам определенного числа измерений строится экспериментальное распределение и сравнивается с теоретическим, вычисленным на основании закона Пуассона или Гаусса при высокой интенсивности ионизирующего излучения.

Перед началом работы проверьте наличие всех необходимых узлов установки (рис. 5) и соединения между счетчиком Гейгера-Мюллера *2* и узлом сбора данных *3* Cassy Lab 2. Расположите источник ***1*** в средней части оптической станины. Визуально проверьте целостность защиты радиоактивного источника, при обнаружении видимых дефектов сообщите об этом преподавателю.

Внимание! *Самостоятельное вскрытие свинцового кожуха радиоактивного препарата запрещено и является нарушением законодательства РФ в области радиационной безопасности. Доступ к содержимому кожуха, включающему радиоактивный источник, имеет только персонал лаборатории, относящийся к группе А.*

Включите компьютер и запустите программное обеспечение Cassy Lab 2 и через пункт Help загрузите настройки к работе «Распределение Пуассона». Для этого в окне Cassy Lab 2 выбрать следующие опции: “Experiment examples”, “Physics”, “Atomic and Nuclear Physics” и “Poisson distribution”.

В окне “Poisson distribution” выбрать ”Load Settings” и проследить за загрузкой файлов драйверов лабораторной работы. После загрузки появится окно “Save changes?», на что ответить «Нет». После этого снова появится меню CASSYs, которое надо закрыть выбрав опцию “Close”. Настройки загружены.

В главном меню Cassy Lab 2 во второй строке выбрать опцию “Standart» или “Distribution” для проведения измерений статистического характера распада радиоактивного препарата ^{137}Cs или для получения гистограммы/функции для распределения Пуассона и Гаусса, соответственно. Для запуска измерений в меню Cassy Lab 2 выберите опцию «Measurement”, а затем “Start” (запуск осуществляется также нажатием на клавишу F9). При этом программа начнет проводить измерения, формируя в левой части экрана таблицу с показаниями числа зарегистрированных актов распада радиоактивного препарата за определенное время измерений (указывается преподавателем), а в центральной части экрана будет выведен график этих данных. В правой части экрана высвечивается информационное табло, позволяющее изменять шкалу графика. После набора требуемой статистики (указывается преподавателем), счет прекращается с помощью обращения к пункту меню “Start”/F9, и накопленные данные сохраняются для последующей обработке в формате «\Рабочий стол\Номер_группы\Фамилия_ИО».

Выполнение задания №1 осуществляется при нахождении радиоактивного источника в средней части оптической станины, задания №2 (распределение Пуассона) при наибольшем расстоянии между источником и детектором, а задание №3 (распределение Гаусса) при нахождении источника непосредственно перед детектором.

7. Задания лабораторной работы

Задание №1.

Цель задания – изучить влияние числа измерений и временного интервала счета $\Delta\tau$ на точность определения среднего значения $\bar{x}$, среднеквадратичного отклонения $\sigma \approx S_x$ и среднеквадратичного отклонения $\bar{\sigma}$ среднего арифметического значения $\bar{x}$.

Запустить программное обеспечение Cassy Lab 2 и загрузить с рабочего стола файл настроек для данной лабораторной работы. Произвести регистрацию числа импульсов с счетчика Гейгера-Мюллера, накопленных пересчетным устройством за заданный Вами промежуток времени $\Delta\tau$. Результат каждого измерения добавляется в таблицу на экране монитора. По рекомендации преподавателя задайте некоторый интервал времени счета $\Delta\tau$. После каждого измерения вычислить текущие значения $\bar{x}$ (формула 25), $\sigma \approx S_x$ (26) и $\bar{\sigma}$ (27). Проследите, как изменяются значения этих величин по мере увеличения числа измерений N в выборке. Число измерений следует увеличивать до «стабилизации» интервалов изменения значений $\bar{x}$ и S_x. Повторите измерения для более коротких временных интервалов $\Delta\tau$. Составьте таблицу значений $\bar{x}$, S_x и

$S_{\bar{x}}$, полученных при разных Δτ и N. Определите «активность» источника (в распадах в секунду) с указанием погрешности измерений при каждом временном интервале, выразите результат измерений (число γ-квантов за 1 сек) в интервальной форме типа $X = X + \Delta X$. Постройте количественные графики изменения $\bar{x}$, S_x и $S_{\bar{x}}$, от числа измерений. Сделайте вывод об оптимальном числе измерений в каждой выборке.

Задание №2.

Цель задания – изучение распределения Пуассона, идентификация аналитической модели закона распределения случайных событий при малой скорости счета γ-квантов.

Запустить программное обеспечение Cassy Lab 2 и загрузить с рабочего стола файл настроек для данной лабораторной работы, если это ещё не сделано. Произвести регистрацию числа импульсов со счетчика Гейгера-Мюллера, накопленных за некоторый небольшой интервал времени Δτ. Установить время измерений такое, чтобы в среднем регистрировалось от 2 до 5 импульсов. Произвести измерения скорости счета γ-квантов с выводом гистограммы измеренных величин. С помощью критерия χ^2 проверить предположение о распределении случайных величин по закону Пуассона. Указать статистическую значимость полученных оценок.

На графиках с экспериментальными гистограммами построить теоретические гистограммы. Экспериментальная и теоретическая гистограммы должны быть нормированы к полному числу измерений.

Задание №3.

Цель задания – изучение нормального распределения (Гаусса), идентификация модели закона распределения случайных событий при высокой скорости счета γ-квантов.

Запустить программное обеспечение Cassy Lab 2 и загрузить с рабочего стола файл настроек для данной лабораторной работы, если это ещё не сделано. Произвести регистрацию числа импульсов со счетчика Гейгера-Мюллера, накопленных за некоторый интервал времени Δτ, такой, чтобы в среднем регистрировалось не менее 20-30 импульсов. Произвести измерения скорости счета γ-квантов. По результатам измерений построить гистограммы распределения импульсов. С помощью критерия χ^2 проверить предположение о распределении случайных величин по закону Гаусса. Указать статистическую значимость полученных оценок.

На графиках с экспериментальными гистограммами построить теоретические гистограммы, используя формулу (6).

Контрольные вопросы

1. Как устроен и работает счетчик Гейгера? Начертите схему включения счетчика и объясните принцип ее работы.
2. Определение среднего значения случайной величины. Что характеризует дисперсия случайной величины?
3. Абсолютная и относительная флуктуации случайной величины.
4. Как оценить среднеквадратическое отклонение $S_{\bar{x}}$ (формула 27) по рисунку гистограммы (на какой высоте и т. п.)?
5. Чему равно среднеквадратическое отклонение, если функция распределения имеет вид столика шириной a?
6. Оценить максимальное значение среднеквадратическое отклонения, если гистограмма состоит из одного бина шириной a, содержащего 100 событий.
7. Когда значения, задаваемые формулами (25-27) - $\bar{x}$, S_x, $S_{\bar{x}}$ больше: при измерениях с интервалом счета 1 мсек и числом измерений в выборке 1 000 или при измерениях с интервалом счета 100 мсек и числом измерений в выборке 50?
8. Как провести идентификацию аналитической модели закона распределения в случае, когда гистограмма состоит из бинов различной длины?
9. Объясните содержание закона Пуассона и перечислите условия его возникновения и условия применимости.
10. Связь между распределениями Пуассона и Гаусса, При каких условиях распределение Пуассона переходит в закон Гаусса и какими свойствами в таком случае оно обладает?
11. Закон Гаусса. Физический смысл параметров.
12. Объясните смысл нормального закона и запишите его плотность вероятности.
13. Абсолютная и относительная погрешности измерения случайной величины, распределенной по закону Гаусса.
14. Как связаны среднее значение и дисперсия для случайных величин, распределенных по закону Пуассона?
15. Как показать, используя таблицу χ^2, подтверждают ли проведенные измерения предполагаемое распределение (Пуассона) гамма-квантов при распаде радиоактивного препарата ?
16. Напишите формулы для вычисления: распределения Пуассона; дисперсии для распределения Пуассона; критерия Пирсона χ^2.
17. Распределение χ^2. Проверка гипотез о законе распределения с помощью критерия χ^2.
18. Радиоактивный источник с большим запасом ядер ^{137}Sc имеет среднюю активность 1 распад в 1 мсек. Какова вероятность, что в течение 1 мсек произойдет 2

распада? С какой вероятностью распад произойдет в течение интервала 0,5 мсек?

19. Какое минимальное количество ядер ^{137}Sc в источнике необходимо для определения периода полураспада с точностью 1 год за время измерения 1 час?

Библиографический список к лабораторной работе

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: учеб. пособие [Текст] / И. В. Савельев // СПб.: Лань, 2005. – Т. 3. – 271 с.
2. Povh, B. Particles and Nuclei [Text] / B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche // Springer, 2006 – p. 391.
3. Колпаков, П.Е. Основы ядерной физики [Текст]: учебное пособие для пед. инс-тов / П.Е. Колпаков // Москва: Просвещение, 2001. – 401 с.
4. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок [Текст] / Дж. Тейлор // М.: Мир, 1995. – 215 с.
5. Гольданский, В.И. Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц [Текст] / В.И. Гольданский, А.В. Куценко, М.И. Подгоредкий // М.: Физматгиз, 1959. – 411 с.
6. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко // М., Гостехтеориздат, 1954. – 587 с.
7. Абрамов, А.И. Основы экспериментальных методов ядерной физики [Текст] / А.И.Абрамов, Ю.А.Казанский. Е.С.Матусевич // М.: Энергоатомиздат, 1985. – 653 с.
8. Худсон, Д. Статистика для физиков [Текст] / Д. Худсон // М.: МИР, 1967. – 293 с.
9. Кунце, Х.-И. Методы физических измерений [Текст] / Х.-И. Кунце // М.: Мир, 1989. – 178 с.
10. Сергеев, А. Г. Метрология. Учеб. пособие. [Текст] / Сергеев А. Г., Крохин В. В // М: Логос, 2001. – 310 с.

ВЫПИСКА ИЗ ПРОТОКОЛА № 4

от 17 июня 2013

заседания Учебно-методической комиссии Института физики КФУ

ПРИСУТСТВОВАЛИ: проф. Таюрский Д.А. (председатель комиссии), доц. Шерстюков О.Н. (зам. председателя комиссии), Хуснутдинов Н.Р., Ильясов К.А., Воронина Е.В., Тюрин В.А., Корчагин П.А., Дуглав А.В., Мокшин А.В., Гарнаева Г.И., Шиманская Н.Н., Соколова М.Г.

СЛУШАЛИ: рекомендацию в печать учебно-методического пособия «Исследование статистического характера распада радиоактивных ядер. Распределение Пуассона» (авторы: Вагизов Ф.Г., Дулов Е.Н.)

ПОСТАНОВИЛИ: на основании положительной рецензии к.ф.-м.н., с.н.с. КИББ КНЦ РАН Манапова Р.А. рекомендовать вышеуказанное учебно-методическое пособие к опубликованию в электронном виде на сайте Института физики.

Председатель Учебно-методической комиссии
Института физики, профессор Таюрский Д.А.