

УДК 535.14

## КОНТРОЛИРУЕМОЕ ФАЗОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЫСОКОДОБРОТНОМ РЕЗОНАТОРЕ

*Г.П. Мирошниченко, А.И. Трифанов***Аннотация**

Рассмотрена оптическая реализация вероятностной операции контролируемого фазового преобразования трех квантовых мод электромагнитного поля в высокодобротном резонаторе. Необходимое взаимодействие между модами осуществлено посредством атома, пролетающего через резонатор. Для оценки времени взаимодействия и констант связи использован формализм условных операторов Крауса. Получены приближенные значения вероятности и качества фазового преобразования.

**Ключевые слова:** фазовый гейт, высокодобротный резонатор, ридберговский атом, условное состояние, оператор Крауса.

**Введение**

В современных информационных технологиях для хранения, передачи и обработки информации используются принципы квантовой механики [1] и квантовой оптики [2, 3]. Экспоненциальное ускорение в алгоритмах, использующих свойства квантовой единицы информации (кубита), защищенность квантовых каналов передачи и плотное кодирование являются яркими примерами преимущества квантовых информационных систем над системами, построенными на классических принципах [4]. В зависимости от выбора физической системы, в состоянии которой кодируется информация, рассматривают фотонные технологии, атомы и ионы в ловушках, технологии ЯМР, сверхпроводимость, квантовые точки и т. д. [5]. В основе квантовых оптических информационных технологий [6] лежит интерференция и взаимодействие квантовых мод электромагнитного поля, в состоянии которых закодирована информация [7, 8]. Преобразование квантовой информации происходит в логических устройствах – гейтах. Наиболее важными являются универсальные гейты, которые позволяют реализовать базис логических вычислений. В основе оптической реализации универсальных гейтов лежит операция контролируемого фазового сдвига на  $\pi$  (Controlled Phase Shift – CPS) [9]. Ее действие на систему из  $n$  кубитов описывается уравнением

$$Q_{\pi}^{(n)} |\alpha_1\rangle_1 |\alpha_2\rangle_2 \cdots |\alpha_n\rangle_n = \exp(-i\pi\delta_{\alpha_1}^1 \delta_{\alpha_2}^1 \cdots \delta_{\alpha_n}^1) |\alpha_1\rangle_1 |\alpha_2\rangle_2 \cdots |\alpha_n\rangle_n.$$

Здесь  $Q_{\pi}^{(n)}$  – оператор  $n$ -кубитового преобразования CPS,  $\alpha_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , – квантовые состояния отдельных кубитов в вычислительном базисе,  $\delta_j^k$  – дельта-символ Кронекера.

Одним из вариантов реализации операции CPS является обеспечение сильного нелинейного взаимодействия между квантовыми модами и атомом в высокодобротном резонаторе [10–12]. При этом рабочими являются переходы между ридберговскими состояниями атома (с главными квантовыми числами  $n = 50$  или  $n = 51$ ).

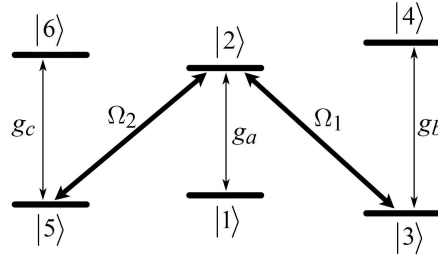


Рис. 1. Конфигурация атомных уровней с действующими квантовыми и классическими полями

Кубиты закодированы в фоковские состояния резонаторных мод, лежащих в интервале  $(0, 1)$ . Характерное время жизни атомных уровней составляет  $\sim 30$  мс, а время жизни фотона в резонаторе  $\sim 1$  мс, тогда как время взаимодействия между атомом и модами поля занимает около 10 мкс. Это позволяет получать и исследовать перепутанные атомно-полевые состояния [10], а также проводить исследования с использованием модели, в которой не учитываются ширины спонтанных распадов атомных уровней.

В результате внутррезонаторного взаимодействия атома с модой состояние всей системы является перепутанным. Для того чтобы оценить состояние моды после прекращения взаимодействия, можно измерить состояние атома в селективном детекторе (ионизационной камере). В этом случае результат можно описать с помощью полевого оператора (трансформера Крауса), который действует на исходное состояние поля резонатора и является либо оператором условной эволюции, либо оператором скачка. В настоящей работе данная схема используется для реализации трехкубитовой операции CPS. Используемый формализм позволяет получить простые аналитические выражения для элементов одного из трансформеров, осуществляющего операцию CPS, а также привести оценки значений времени взаимодействия и констант связи, необходимых для высокой вероятности и качества операции. Численные значения этих величин представлены в работе.

## 1. Модель

Рассмотрим эволюцию системы, состоящей из шести атомных уровней с действующими на переходах резонансными классическими и квантовыми полями (рис. 1). Предположим, что атом до начала взаимодействия находится в основном состоянии  $|1\rangle_A$ . Атомные переходы  $|1\rangle_A \leftrightarrow |2\rangle_A$ ,  $|3\rangle_A \leftrightarrow |4\rangle_A$ ,  $|5\rangle_A \leftrightarrow |6\rangle_A$  взаимодействуют с квантовыми модами электромагнитного поля с частотами  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_c$  и константами связи  $g_a$ ,  $g_b$  и  $g_c$ . Классические поля с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и частотами Раби  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  действуют на переходах  $|2\rangle_A \leftrightarrow |3\rangle_A$  и  $|2\rangle_A \leftrightarrow |5\rangle_A$ . Оператор эволюции атомно-полевой системы  $U(t)$  найдем, решая задачу Коши

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = HU(t), \quad U(0) = I. \quad (1)$$

Здесь

$$H = -\hbar \sum_{s=1}^6 \Delta_j \sigma_{jj} - \hbar (g_a \sigma_{21} a_a + g_b \sigma_{43} a_b + g_c \sigma_{65} a_c + h.c.) - \hbar (\Omega_1 \sigma_{23} + \Omega_2 \sigma_{25} + h.c.)$$

есть гамильтониан атомно-полевой системы в дипольном и резонансном приближении, записанный в представлении взаимодействия,  $h.c.$  – эрмитово сопряжение,

$\sigma_{sk} = |s\rangle_A \langle k|$ ,  $s, k = 1, 2, \dots, 6$ , – атомные операторы,  $a_m$  и  $a_m^+$  – операторы рождения и уничтожения фотона в моде  $m$ ,  $m \in \{a, b, c\}$ . Далее,  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , – многофотонные отстройки, которые определяются через однофотонные отстройки  $\varepsilon_j$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0, & \Delta_2 &= \varepsilon_1, & \Delta_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, & \Delta_4 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \Delta_5 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_5, & \Delta_6 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_5 + \varepsilon_6. \end{aligned}$$

Однофотонные отстройки определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \omega_{12} - \omega_a, & \varepsilon_2 &= \omega_{23} - \omega_1, & \varepsilon_3 &= \omega_{34} - \omega_b, \\ \varepsilon_4 &= \omega_{25} - \omega_2, & \varepsilon_5 &= \omega_{56} - \omega_c, \end{aligned}$$

где  $\omega_{sk}$  – частота атомного перехода  $|s\rangle \leftrightarrow |k\rangle$ .

Будем искать решение уравнения (1), разложив оператор  $U(t)$  в следующую линейную комбинацию:

$$U(t) = \sum_{s,k=1}^6 |s\rangle_A \langle k| K_{sk}(t). \quad (2)$$

Здесь  $K_{sk}(t)$  – полевой оператор (трансформер) Крауса. Подставляя (2) в (1) и используя начальное условие для состояния атома, получаем однородную систему операторных дифференциальных уравнений ( $K_s(t) \equiv K_{s1}(t)$ ):

$$ih \begin{pmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 \\ \dot{K}_4 \\ \dot{K}_5 \\ \dot{K}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & g_a^* a_a^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_a a_a & \Delta_2 & \Omega_1^* & 0 & \Omega_2^* & 0 \\ 0 & \Omega_1 & \Delta_3 & g_b^* a_b^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_b a_b & \Delta_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2 & 0 & 0 & \Delta_5 & g_c^* a_c^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_c a_c & \Delta_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{pmatrix}.$$

Сделаем упрощающее предположение и примем  $\Delta_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ . Далее, проводя элементарные преобразования с учетом коммутационных соотношений, получим однородное дифференциальное уравнение шестого порядка для оператора  $K_1(t)$

$$K_1^{(6)}(t) - pK_1^{(4)}(t) + qK_1^{(2)}(t) - rK_1(t) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $p$ ,  $q$ ,  $r$  – постоянные операторозначные коэффициенты:

$$p = |g_a|^2 a_a^+ a_a + |g_b|^2 a_b^+ a_b + |g_c|^2 a_c^+ a_c + |\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2,$$

$$\begin{aligned} q &= |g_b|^2 \left( |\Omega_2|^2 + |g_a|^2 a_a^+ a_a \right) a_b^+ a_b + \\ &+ |g_c|^2 \left( |\Omega_1|^2 + |g_a|^2 a_a^+ a_a \right) a_c^+ a_c + |g_b|^2 |g_c|^2 a_b^+ a_b a_c^+ a_c, \end{aligned}$$

$$r = |g_a|^2 |g_b|^2 |g_c|^2 a_a^+ a_a a_b^+ a_b a_c^+ a_c.$$

Заметим, что операторы  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и  $K_1(0)$  диагональны в базисе состояний Фока. Отсюда следует, что  $K_1(t)$  диагонален в любой момент времени. Этот оператор является оператором эволюции и сохраняет число фотонов в каждой моде. Он может быть использован для реализации операции CPS. Следует отметить, что операторы  $K_{s \neq 1}(t)$  являются операторами скачков и не сохраняют числа фотонов.

Воспользуемся тем, что  $K_1(t)$  диагонален, и будем искать решение (3) в виде

$$K_1(t) = \sum_{n=1}^3 B_n \cos(\Lambda_n t).$$

Здесь  $\Lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , – операторозначные корни соответствующего характеристического уравнения:

$$\Lambda^6 - p\Lambda^4 + q\Lambda^2 - r = 0,$$

а коэффициенты  $B_n$  находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + B_3 = 1, \\ B_1\Lambda_1^2 + B_2\Lambda_2^2 + B_3\Lambda_3^2 = |g_a|^2 a_a^+ a_a, \\ B_1\Lambda_1^4 + B_2\Lambda_2^4 + B_3\Lambda_3^4 = |g_a|^2 \left( |g_a|^2 a_a^+ a_a + |\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 \right) a_a^+ a_a. \end{cases} \quad (4)$$

Положим  $|g_a|^2 = |g_b|^2 = |g_c|^2 = |g|^2$  и получим для элементов  $K_1(t)_{l,l} = \langle l | K_1(t) | l \rangle_F$  ( $|l\rangle_F = |\alpha_a \alpha_b \alpha_c\rangle_F$ ,  $\alpha_m \in \{0, 1\}$ ,  $m \in \{a, b, c\}$ ,  $l = 0, 1, \dots, 7$ , – десятичная запись, соответствующая состоянию резонаторного поля в вычислительном базисе) следующие выражения:

$$K_1(t)_{00} = K_1(t)_{11} = K_1(t)_{22} = K_1(t)_{33} = 1, \quad (5)$$

$$K_1(t)_{44} = b_{44}^1 + b_{44}^2 \cos\left(\sqrt{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + |g|^2} \cdot t\right),$$

$$K_1(t)_{55} = b_{55}^1 + b_{55}^2 \cos(\alpha_1 \cdot t) + b_{55}^3 \cos(\alpha_2 \cdot t),$$

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ |\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + 2|g|^2 \pm \sqrt{\left(|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2\right)^2 + 4|g|^2 |\Omega_2|^2} \right]},$$

$$K_1(t)_{66} = b_{66}^1 + b_{66}^2 \cos(\beta_1 \cdot t) + b_{66}^3 \cos(\beta_2 \cdot t),$$

$$\beta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ |\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + 2|g|^2 \pm \sqrt{\left(|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2\right)^2 + 4|g|^2 |\Omega_1|^2} \right]},$$

$$K_1(t)_{77} = b_{77}^1 \cos(\gamma_1 \cdot t) + b_{77}^2 \cos(\gamma_2 \cdot t) + b_{77}^3 \cos(\gamma_3 \cdot t),$$

$$\gamma_1 = |g|,$$

$$\gamma_{2,3} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ |\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + 2|g|^2 \pm \sqrt{\left(|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2\right) \left(|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + 4|g|^2\right)} \right]}.$$

Здесь  $b_{ii}^n$  – элементы матрицы  $B_n$  из системы (4). Выражения для матричных элементов операторов  $K_{s \neq 1}(t)$  можно получить, используя линейные комбинации  $K_1(t)$  и его производных.

## 2. Результаты и заключение

Ранее отмечалось, что  $K_1(t)$  может быть использован для реализации операции  $Q_\pi^{(3)}$ . Для этого его матричные элементы в некоторый момент времени (обозначим его  $t_{\text{int}}$ ) должны удовлетворять следующим требованиям:

$$K_1(t_{\text{int}})_{00} = \dots = K_1(t_{\text{int}})_{66} = 1, \quad K_1(t_{\text{int}})_{77} = -1, \quad K_1(t_{\text{int}})_{i,j \neq i} = 0.$$

В нашем распоряжении имеется несколько контролируемых параметров (частоты Раби, константы связи, время взаимодействия), подбирая величины которых можно получить требуемые значения матричных элементов. Заметим, что часть из них удовлетворяется автоматически (5). Чтобы упростить задачу, положим следующее соотношение между частотами Раби классических полей и константами связи:

$$|\Omega_1| = |\Omega_2| = |\Omega| \gg |g_a| = |g_b| = |g_c| = |g|.$$

Тогда с точностью до первого порядка малости величины  $|g|/|\Omega|$  можно получить следующую оценку для времени взаимодействия:

$$t_{\text{int}} = \frac{\sqrt{2\pi}|\Omega|}{|g|^2} (1 + 2k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Оценим вероятность и качество операции  $Q_\pi^{(3)}$ , реализуемой посредством оператора  $K_1(t)$ . Обозначим через  $P(t)$  вероятность детектировать атом в состоянии  $|1\rangle_A$ :

$$P(t) = \text{Tr}_F \{K_1(t) \rho_f(0) K_1^\dagger(t)\} = \sum_{s=0}^7 \rho_f(0)_{ss} |K_1(t)_{ss}|^2, \quad (7)$$

где  $\rho_f(0)$  – матрица плотности резонаторного поля в начальный момент времени. Подставим (6) в (7) и найдем, насколько величина  $P(t_{\text{int}})$  отличается от единицы:

$$1 - P(t_{\text{int}}) = \frac{2|g|^2}{|\Omega|^2} \sum_{s=4}^7 \rho_f(0)_{ss}.$$

Здесь мы усреднили члены, осциллирующие с частотой  $|\Omega|$ . На рис. 2 для случая  $\rho_f(0) = |\xi\rangle_F \langle\xi|$ ,  $|\xi\rangle_F = \frac{1}{2} |1\rangle_a (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)_{bc}$  представлена зависимость  $1 - P(t)$ . Для оценки условного качества (conditional fidelity [9]) воспользуемся выражением

$$F(t) = \sqrt{\text{Tr}_F (\rho_Q \cdot \rho_f^c(t))},$$

где  $\rho_f^c(t)$  – условная матрица плотности резонаторного поля после измерения

$$\rho_f^c(t) = \frac{K_1(t) \rho_f(0) K_1^\dagger(t)}{\text{Tr}_F \{K_1(t) \rho_f(0) K_1^\dagger(t)\}},$$

$\rho_Q = Q_\pi^{(3)} \rho_f(0) Q_\pi^{(3)\dagger}$  – результат идеального преобразования  $Q_\pi^{(3)}$  начального состояния  $\rho_f(0)$ .

Легко проверить, что  $F(t_{\text{int}}) = 1$  с точностью до второго порядка величины  $|g|/|\Omega|$ . На рис. 3 показана зависимость условного качества от времени в случае  $\rho_f(0) = |\xi\rangle_F \langle\xi|$ .

Мы рассмотрели оптическую реализацию вероятностной операции контролируемого фазового преобразования трехкубитового состояния, закодированного в трех квантовых модах резонатора. Число фотонов в каждой моде ограничивалось значениями 0 или 1. Взаимодействие осуществлялось посредством атома, пролетающего через резонатор. В результате измерения состояния атома в селективном детекторе возникало условное полевое состояние, которое отличалось от начального на фазовый множитель. Для оценки времени и констант связи мы использовали формализм условных операторов Крауса, преимуществом которого является отсутствие необходимости рассматривать отдельно все инвариантные подпространства

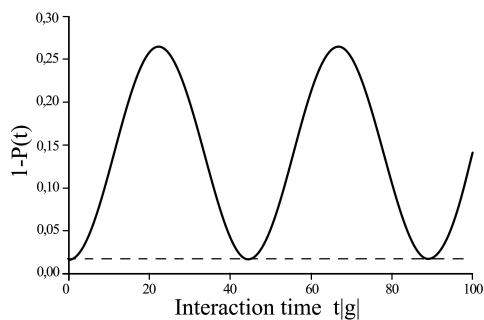


Рис. 2. Зависимость вероятности *не детектировать* атом в состоянии  $|1\rangle_A$  от времени взаимодействия (сплошная линия) и ее аналитическая оценка, вычисленная для момента времени  $t = t_{\text{int}}$ ;  $|\Omega| = 10 |g|$ ,  $\Delta_j = 0$

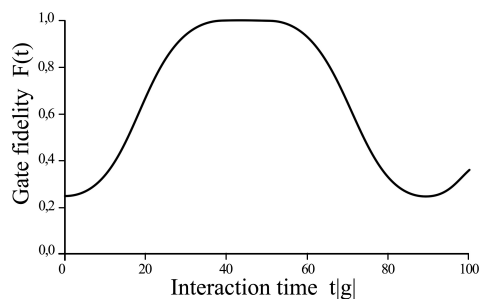


Рис. 3. Зависимость от времени качества операции  $Q_\pi^{(3)}$ ;  $|\Omega| = 10 |g|$ ,  $\Delta_j = 0$

атомно-полевых состояний гамильтониана системы [11, 12]. В случае резонансного взаимодействия с его помощью были найдены простые аналитические выражения для элементов операторов условной эволюции поля. Мы показали, что один из этих операторов является диагональным в базисе Фока и идеально подходит для реализации фазового преобразования, а также привели оценки для вероятности и качества требуемой операции.

Работа поддержана грантом Правительства Санкт-Петербурга для студентов, аспирантов вузов и академических институтов, расположенных на территории Санкт-Петербурга, в рамках Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/9425), Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 годы (гос. контракт № П689; проект НК-526П/24).

### Summary

*G.P. Miroshnichenko, A.I. Trifanov.* Controlled Phase Transformation of Quantum States of an Electromagnetic Field in a High-Quality Cavity.

This paper deals with the optical realization of a probabilistic operation of controlled phase transformation of three quantum modes of an electromagnetic field in a high-quality cavity. The required interaction between the modes is reached by a Rydberg atom passing through the cavity. The conditional Kraus operators formalism is used to estimate the atom-field interaction

time and the coupling constants. Approximate values of the phase transformation probability and fidelity are obtained.

**Keywords:** phase gate, high-quality cavity, Rydberg atom, conditional state, Kraus operator.

### Литература

1. *Peres A.* Quantum Theory: Concepts and Methods. – New York; Boston; Dordrecht; London; Moscow: Kluwer Acad. Pub., 2002. – 464 p.
2. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 896 с.
3. *Клышко Д.Н.* Фотонная и нелинейная оптика. – М.: Наука, 1980. – 259 с.
4. *Стин Э.* Квантовые вычисления. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 100 с.
5. *Ladd T.D., Jelezko F., Laflamme R., Nakamura Y., Monroe C., O'Brien J.L.* Quantum computers // *Nature*. – 2010. – V. 464. – P. 45–53.
6. *O'Brien J.L.* Optical quantum computing // *Science*. – 2007. – V. 318. – P. 1567–1570.
7. *Кликин С.Я.* Квантовая информация // *Усп. физ. наук*. – 1999. – Т. 169, № 5. – С. 507–527.
8. *O'Brien J.L., Furusawa A., Vukovi J.* Photonic quantum technologies // *Nature Photonics*. – 2009. – V. 3, No 12. – P. 687–695.
9. *Ottaviani C., Rebic S., Vitali D., Tombesi P.* Quantum phase-gate operation based on nonlinear optics: Full quantum analysis // *Phys. Rev. A*. – 2006. – V. 73, No 1. – P. 010301-1–010301-4.
10. *Raimond J.M., Brune M., Haroche S.* Colloquium: Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity // *Rev. Mod. Phys.* – 2001. – V. 73, No 3. – P. 565–582.
11. *Zubairy M.S., Kim M., Scully M.O.* Cavity-QED-based quantum phase gate // *Phys. Rev. A*. – 2003. – V. 68, No 3. – P. 033820-1–033820-6.
12. *Chang J.-T., Zubairy M.S.* Three-qubit phase gate based on cavity quantum electrodynamics // *Phys. Rev. A*. – 2008. – V. 77, No 1. – P. 012329-1–012329-8.

Поступила в редакцию  
29.03.11

---

**Мирошниченко Георгий Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, г. Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: [gpmirosh@gmail.com](mailto:gpmirosh@gmail.com)

**Трифанов Александр Игоревич** – аспирант кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, г. Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: [alextrifanov@gmail.com](mailto:alextrifanov@gmail.com)