Рекуррентные соотношения и асимптотика окрашенных многочленов Джонса

А.И. Аптекарев

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и МГУ им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики ♯

Международная научная конференция
"Алгебра, анализ и геометрия",
(г. Казань, 22 - 29 августа 2021 года)

♯ Поддержан Минобрнауки РФ соглашение №075-15-2019-1623

Статья

A.I. Aptekarev, T. V. Dudnikova and D. N. Tulyakov,

"Recurrence Relations and Asymptotics of
Colored Jones Polynomials",

LOBACHEVSKII JOURNAL OF MATHEMATICS, 11, 2021

План

★- Введение (рекуррентные соотношения и асимптотики)

★- Гипотеза объема - "окрашенные"многочлены Джонса

★- Асимптотика многочленов Джонса для узла 5_2
(общий подход, некоторые результаты)

Введение (рекуррентные соотношения и асимптотики)

Разностные уравнения (ограниченные коэфф.) - слабые асимптотики

$$Q_{n+1} = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(n) Q_{n-j} \, , \qquad \vec{Q}_{n+1} = A(n)\vec{Q}_n \, , \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_j(n) \equiv a_j(0), \, \forall \, n, j \quad \Longrightarrow \quad Q_n = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^n (C_{j,1} + \cdots + C_{j,l_j} n^{l_j - 1})$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ratio Asympt.:} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \lambda_j \qquad \text{(R.A.)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Main Term:} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Q_n| = \log \lambda_j \qquad \text{(W.A.)}$$

$$a_j(n) \underset{n \to \infty}{\to} \alpha_j, \, \forall j \quad \Longrightarrow \quad \text{Теорема (Пуанкаре):} \Rightarrow \text{(R.A.)}$$

[⋆] Poincare H. Sur les equations lineaires aux differentielles et aux differences finies, Amer. J. Math., 1885, vol. 7, 203-258.

[⋆] Perron O., Uber einen Satz des Herrn Poincare, J. Reine Angew. Math., 1909, v. 136, 17-37; Uber die Poincaresche lineare Differenrengleichung, J. Reine Angew. Math., 1910, v. 137, 6-64.

Разностные уравнения (ограниченные коэфф.) - сильные асимптотики

$$Q_{n+1} = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(n) Q_{n-j} \ , \qquad \vec{Q}_{n+1} = A(n)\vec{Q}_n \ , \quad n \in \mathbb{N},$$

Strong Asympt.: $\quad Q_n \simeq (\lambda_1)^n \ (\cdots) \qquad$ (S.A.)

[⋆] Birkhoff D. G., General Theory of Linear Difference Equations, Trans. Am. Math. Soc., 1911, vol. 12, pp. 243-284.

[⋆] Birkhoff D. G., Formal Theory of Irregular Linear Difference Equations, Acta mathematica, 1930, vol. 54, pp. 205-246.

[⋆] Birkhoff D. G., Trjitzinsky W. J., Analytic Theory of Singular Difference Equations, Acta mathematica, 1932, vol. 60, pp. 1-89.

Разностные уравнения (неограниченные коэфф.) - сжатые слабые асимптотики

$$Q_{n+1}(z) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(n,z) Q_{n-j}\ , \qquad \vec{Q}_{n+1} = A(n,z)\vec{Q}_n\ , \quad n \in \mathbb{N},$$

Пример:

$$P_{n+1}(z) = (z - a_n)\, P_n(z) + b_n P_{n-1} + \quad \cdots \quad + c_n P_{n-d}\ ,$$

Соглас. рост коэфф. рек. соотн.: $\exists \varphi(.)$: $\quad \varphi(n) \uparrow \infty, \quad n \to \infty$:

$$\frac{a_n}{\varphi(n)} \to \alpha\,, \quad \frac{b_n}{\varphi(n)^2} \to \beta\,, \quad \cdots \quad \frac{c_n}{\varphi(n)^{d+1}} \to \gamma \neq 0 \qquad |\alpha|, |\beta|, |\gamma| < \infty\,.$$

Режим стабилизации: $\dfrac{P_n(z_n)}{\prod_{k=1}^n \varphi^{d-1}(k)}, \quad \dfrac{\varphi(n)}{z_n} \to t \in K_0, \quad A(n, z_n)$

$$\frac{1}{n}\log\left|\frac{P_n(z_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \varphi^{d-1}(k)}\right| = \int\limits_0^1 \log\left|\lambda_1\left(\frac{\varphi(n\xi)}{z_n}\right)\right| d\xi + \bar{\bar{o}}(1), \quad \{\lambda_j\}_{j=1}^{d+1}.$$

[$\star$] (d=2,3) А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Главный член асимптотики Планшереля–Ротаха для решений рекуррентных соотношений, Матем. сб., 205:12 (2014), 17–40

Пример: Асимптотики типа Планшереля-Ротача (ОМ)

Ортогональные Многочлены $-\ Q_n(x)\,,\quad x(n),\ n\to\infty$

[$\star$] M. Plancherel, W. Rotach, Sur les valeures asymptotiques des polynomes d'Hermite Commentarii Math. Helvetici, 1929, vol.1

$$H_{n+1}(x) \;=\; 2x\,H_n(x) \;-\; 2n\,H_{n-1}(x)\;, \qquad H_0=1\,,\quad H_{-1}=0\quad n\in\mathbb{N}.$$

H_n при $n\to\infty$ и

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & x \;=\; (2n+1)^{\frac12}\,\tau\,, & 1+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant C\,; \\
\text{b)} & x \;=\; (2n+1)^{\frac12}\;-\;2^{-\frac12}\;3^{-\frac13}\;n^{-\frac16}\;t\,, & t\in K\Subset\mathbb{C}\,; \\
\text{c)} & x \;=\; (2n+1)^{\frac12}\,\theta\,, & -1+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 1-\varepsilon\,.
\end{array}
$$

для фиксированных ε и C.

Методы глобальных асимптотических разложений

Метод матричной задачи Римана-Гильберта:

- ✓ $Y \in H^{d\times d}(\mathbb{C}\setminus\Delta)$, $\quad \exists Y_\pm$ on $\mathring{\Delta}$.
- ✓ $Y_+(\xi) = Y_-(\xi)W(\xi)$, $\quad \xi \in \mathring{\Delta}$.
- ✓ $Y(z) = \operatorname{diag}\{z^n, z^{-n}\}$, $\quad z \to \infty$ (нормировка в т. ∞)

"Сшивка"решений набора локальных BVP с решениями глобальной BVP.

[⋆] P. Deift and X. Zhou, Ann. of Math. 137 (1993), no. 2, 295–368.
[⋆] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), no. 12, 1491–1552.
[⋆] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), no. 11, 1335–1425.

(метод не пременим в большом классе задач)

Методы глобальных асимптотических разложений

<u>Метод асимптотических разложений базисов</u> решений рекуррентных соотношений (разностных уравнений):

$$Q_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(n,x) Q_{n-j}(x) \ , \qquad \vec{Q}_{n+1} = A(n,x)\vec{Q}_n \ , \quad n \in \mathbb{N},$$

Идея:

$$(V_{n+1}^{-1} A_n V_n) \ \rightarrow \ D_n := \mathrm{Diag}[V_{n+1}^{-1} A_n V_n] \,.$$

Базисные векторы - столбцы $B_n := V_n \prod_{k=k_0}^{n-1} D_k \ =: \ V_n \Pi_n.$

Проверка: $\quad A_n B_n = V_{n+1} V_{n+1}^{-1} A_n V_n \Pi_n = V_{n+1} \Pi_{n+1} = B_{n+1} \,.$

Диагонализация в зонах "разделенных с.з." матрицы $A(n,x)$ и в "переходных зонах" $(n,x) \in Z \subset \mathbb{C}^2$, с последующей "сшивкой".

[⋆] А.И.Аптекарев, Матем. сб., 183:5 (1992), 43–62;
[⋆] Д.Н.Туляков, Матем. сб., 200:5 (2009), 129–158;
[⋆] Д.Н.Туляков, Матем. сб., 201:9 (2010), 111–158;
[⋆] А.И.Аптекарев, Д.Н.Туляков, Труды ММО, 73,(2012),87–132

Пример: Совместно ОМ Эрмита $H_{\vec{n}}(x)$ $(d = 2)$

$H_{\vec{n}}(x)$, $\vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\deg H_{\vec{n}} = |\vec{n}| =: (n_1 + n_2)$

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\vec{n}}(x) x^{\nu} e^{-x^2 - ax}\, dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n_1 - 1, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\vec{n}}(x) x^{\nu} e^{-x^2 + ax}\, dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n_2 - 1, \end{cases} \qquad a \neq 0.$$

Рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} H_{(n+1,m)}(x) = (-a + x) H_{(n,m)}(x) - \dfrac{n+m}{2} H_{(n,m-1)}(x) - anH_{(n-1,m-1)}(x), \\ H_{(n+1,m+1)}(x) = (a + x) H_{(n+1,m)}(x) - \dfrac{n+m+1}{2} H_{(n,m)}(x) + anH_{(n,m-1)}(x), \end{cases}$$

[⋆] А.И. Аптекарев, С.Ю. Доброхотов, Д.Н. Туляков, А. Цветкова, “Асимптотики типа Планшереля-Ротаха для совместно ортогональных многочленов Эрмита и рекуррентные соотношения”, Изв. РАН. Сер. матем., 86:1 (2022) (в печати)

Совместно ОМ Эрмита $H_{n,n}(x)$, асимптотика $n \to \infty$

Режим Планшереля-Ротача $N \to \infty$, $\quad \overrightarrow{H_{n+1}} = \mathcal{A}_n \overrightarrow{H_n}$:

$$\frac{n}{N} \in K \Subset \mathbb{R}, \qquad \frac{x}{\sqrt{N}} \in \tilde{K} \Subset \mathbb{C}, \qquad \frac{a}{\sqrt{N}} \in \tilde{\tilde{K}} \Subset \mathbb{R}, \quad (*)$$

$$\mathcal{A}_n(x) = \begin{pmatrix} x^2 - a^2 - n - \frac{1}{2} & -xn & -a^2 n \\ x & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{H_n} = \begin{pmatrix} H_{(n,n)} \\ H_{(n,n-1)} - aH_{(n-1,n-1)} \\ H_{(n-1,n-1)} \end{pmatrix}.$$

Спектральная кривая $\{\Lambda_j\}_{j=1}^3$ - характерист. уравнение $\mathcal{A}_n$:

$$\Lambda: \quad \Lambda^3 + (a^2 + 2n - x^2)\Lambda^2 + (2a^2 n + n^2)\Lambda + a^2 n^2 = 0.$$

Точки ветвления $x \in \{\pm x_\pm\}$. Два режима:

$a > \sqrt{n} \to -x_+ < -x_- < +x_- < +x_+, \ \triangle_\pm := [\pm x_\mp < \pm x_\pm]$;

$a < \sqrt{n} \to$ мнимые: $-x_-, +x_-, \ \triangle := [-x_+ < x_+]$.

s - параметризация спектральной кривой:

$$\Lambda = (s^2 x^2 - a^2), \qquad n = \frac{1}{s}(1-s)(s^2 x^2 - a^2).$$

Теорема: Асимптотика $H_{(n,n)}(x)$ в режиме (*)

- Фиксируем $\varepsilon > 0$, $(n \gg 1)$ и обозначаем

$$\mathfrak{H}_n(x,a) = \Lambda_1^{n+1/2} e^{x^2(1-s)^2} \sqrt{\frac{s}{x^2 s^2 (2s-1) - a^2}}, \quad s = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 + n}.$$

- a) В зоне роста многочлена $H_{(n,n)}(x)$ (без нулей):

$$\Omega_1 := \{x : \operatorname{dist}(x, \triangle) > n^{\varepsilon}\} \cap \left\{x : \operatorname{dist}(x, 0) > n^{\varepsilon+1/3}\right\}, \quad n \in [\varepsilon a^2, (1-\varepsilon)a^2],$$

$$\Omega_2 := \{x : \operatorname{dist}(x, \triangle_+ \cup \triangle_+) > n^{\varepsilon}\}, \quad n > (1+\varepsilon)a^2,$$

Справедливо

$$H_{(n,n)}(x) = \mathfrak{H}_n(x,a)\,(1 + o(1)).$$

- b) В зоне осциляции многочлена $H_{(n,n)}(x)$ (где нули):

$$\mathcal{D}_1 := \{x : \operatorname{dist}(x, \{x_\pm\}) > n^{\varepsilon}\} \cap \left\{x : \operatorname{dist}(x, 0) > n^{\varepsilon+1/3}\right\}, \ n \in [\varepsilon a^2, (1-\varepsilon)a^2],$$

$$\mathcal{D}_2 := \{x : \operatorname{dist}(x, \{-x_\pm, x_\mp\}) > n^{\varepsilon}\}, \quad n > (1+\varepsilon)a^2,$$

Справедливо

$$H_{(n,n)}(x) = \left(\mathfrak{H}_n(x) + \overline{\mathfrak{H}_n(x)}\right)\left(1 + o(1)\right).$$

Теорема: Асимптотика $H_{(n,n)}(x)$ в режиме (*)

- Фиксируем $\varepsilon > 0$, $(n \gg 1)$ и обозначаем

$$\mathfrak{H}_n(x,a) = \Lambda_1^{n+1/2} e^{x^2(1-s)^2} \sqrt{\frac{s}{x^2 s^2 (2s-1) - a^2}}, \quad s = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 + n}.$$

- a) В зоне роста многочлена $H_{(n,n)}(x)$ (без нулей):

$$\Omega_1 := \{x : \operatorname{dist}(x, \triangle) > n^{\varepsilon}\} \cap \left\{x : \operatorname{dist}(x, 0) > n^{\varepsilon+1/3}\right\}, \quad n \in [\varepsilon a^2, (1-\varepsilon)a^2],$$

$$\Omega_2 := \{x : \operatorname{dist}(x, \triangle_+ \cup \triangle_+) > n^{\varepsilon}\}, \quad n > (1+\varepsilon)a^2,$$

Справедливо

$$H_{(n,n)}(x) \; = \; \mathfrak{H}_n(x,a)\,(1 + o(1))\,.$$

- b) В зоне осциляции многочлена $H_{(n,n)}(x)$ (где нули):

$$\mathcal{D}_1 := \{x : \operatorname{dist}(x, \{x_{\pm}\}) > n^{\varepsilon}\} \cap \left\{x : \operatorname{dist}(x, 0) > n^{\varepsilon+1/3}\right\}, \; n \in [\varepsilon a^2, (1-\varepsilon)a^2],$$

$$\mathcal{D}_2 := \{x : \operatorname{dist}(x, \{-x_{\pm}, x_{\mp}\}) > n^{\varepsilon}\}, \quad n > (1+\varepsilon)a^2,$$

Справедливо

$$H_{(n,n)}(x) \; = \; \left(\mathfrak{H}_n(x) + \overline{\mathfrak{H}_n(x)}\right)\left(1 + o(1)\right).$$

Теорема: Асимптотика $H_{(n,n)}(x)$ в режиме (*)

- Фиксируем $\varepsilon > 0$, $(n \gg 1)$ и обозначаем

$$\mathfrak{H}_n(x,a) = \Lambda_1^{n+1/2} e^{x^2(1-s)^2} \sqrt{\frac{s}{x^2 s^2 (2s-1) - a^2}}, \quad s = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 + n}.$$

- a) В зоне роста многочлена $H_{(n,n)}(x)$ (без нулей):

$$\Omega_1 := \{x : \operatorname{dist}(x, \triangle) > n^{\varepsilon}\} \cap \left\{x : \operatorname{dist}(x, 0) > n^{\varepsilon+1/3}\right\}, \quad n \in [\varepsilon a^2, (1-\varepsilon)a^2],$$

$$\Omega_2 := \{x : \operatorname{dist}(x, \triangle_+ \cup \triangle_+) > n^{\varepsilon}\}, \qquad n > (1+\varepsilon)a^2,$$

Справедливо

$$H_{(n,n)}(x) = \mathfrak{H}_n(x,a)\,(1 + o(1)).$$

- b) В зоне осциляции многочлена $H_{(n,n)}(x)$ (где нули):

$$\mathcal{D}_1 := \{x : \operatorname{dist}(x, \{x_\pm\}) > n^{\varepsilon}\} \cap \left\{x : \operatorname{dist}(x, 0) > n^{\varepsilon+1/3}\right\}, \; n \in [\varepsilon a^2, (1-\varepsilon)a^2],$$

$$\mathcal{D}_2 := \{x : \operatorname{dist}(x, \{-x_\pm, x_\mp\}) > n^{\varepsilon}\}, \qquad n > (1+\varepsilon)a^2,$$

Справедливо

$$H_{(n,n)}(x) = \left(\mathfrak{H}_n(x) + \overline{\mathfrak{H}_n(x)}\right)\left(1 + o(1)\right).$$

Гипотеза объема - "окрашенные"многочлены Джонса

Трехмерные многообразия $\mathbb{M}^3$ и их обьемы

◇ Гипотеза Тёрстона:

о 8-ми геометрических структурах для частей $\mathbb{M}^3$

[⋆] W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, kleinian groups, and hyperbolic geometry, Bull. AMS 6 (1982), no.3, 357-381.

[⋆] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, (2003), arXiv: math/0303109v1.

◇ Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ и узел K в ней $K \subset \mathbb{S}^3$

Теорема Тёрстона:

$\{K\} = \{$Гиперболические: $(\mathbb{S}^3 \setminus K) \subset \mathbf{H}^3$, торические, сателлитные$\}$

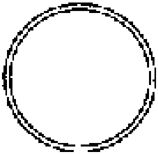
◇ Гиперболический обьем и симплектическая норма Громова

$$(\mathbb{S}^3 \setminus K) \subset \mathbf{H}^3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K) \; = \; \mathrm{vol}(\triangle)\, \|\mathbb{S}^3 \setminus K\|.$$

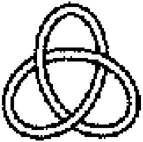
[⋆] M. Gromov, "Volume and bounded cohomology", Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 56, 5–100 (1982).

Узлы K:

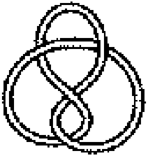
"Не узел"



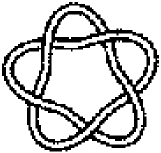
3_1



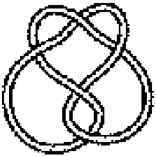
4_1



5_1



5_2



Узлы многочлены Джонса[1] и их окраска[2]:

$J(K,q) \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ – инвариант узла K в сфере $\mathbb{S}^3$.

$J_N(K,q)$ связан с N-мерными представлениями $SU(2)$.

$$J_1(K,q) = 1\,, \qquad J_2(K,q) = J(K,q)\,,$$
$$J_3(K,q) = J(K^2,q) - 1\,, \qquad J_4(K,q) = J(K^3,q) - 2J(K,q)\,, \ldots$$

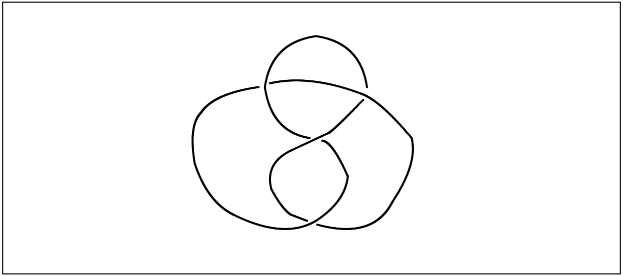


Рис.: Узел восьмёрки 4_1, $J(4_1,q) = q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2}$.

[1] V.F.R. Jones, Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 12, 103–111 (1985).

[2] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121 (1989), no.3, 351-399.

Гипотеза объема[5] $\mathbb{M}^3 := \mathbb{S}^3 \setminus K$:

◇ $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log |V_N(K, q = e^{\frac{2\pi i}{N}})| = \mathrm{vol}(\mathbb{M}^3) \ \ \left(= \ \mathrm{vol}(\triangle)\|\mathbb{M}^3\|\ \right).$$

Нормировка: $V_N(K,q) = \frac{J_N(K,q)}{J_N(O,q)}$, $\qquad J_N(O,q) = \frac{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$.

◇ Проверка[3] для 4_1. Имеем $V_N(4_1; q = e^{2\pi i/N}) = \sum_{m=0}^{\infty} (q)_m (q^{-1})_m$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{N} \log V_N(4_1;\ e^{2\pi i/N}) = Vol(S^3 \backslash 4_1) = 2\,Vol(\triangle)\ ,$$

$$Vol(\triangle) = \Im\, Li_2(\exp\{i\pi/3\}) = 1.015\ldots\ , \qquad Li_2(x) := -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt\ .$$

◇ Рекуррентные соотношения для окрашенных мн-нов Джонса[4]:

$$\forall K \qquad \sum_{j=0}^{d} b_j(q^n, q)\, V_{(n+j)}(K, q) = 0. \quad (!)$$

[3] L.D. Faddeev, R.M. Kashaev, Modern Phys. Lett. 5 (1994), , 427-434
[4] S. Garoufalidis and T. T. Q. Lê, Geom. Topol. 9, 1253-1293 (2005).
[5] R. M. Kashaev, Lett. Math. Phys. 39 (1997), 269-275

★- Асимптотика многочленов Джонса

для узла 5_2

(общий подход, некоторые результаты)

Рекуррентные соотношения для $V_n(5_2, q)$

Input: для многочленов $\dot{J}_n(q) := (q^n - 1)\, V_n(5_2, q)$ имеем:

$$\sum_{j=0}^{3} a_j(n,q)\, \dot{J}_{n+j}(q) + b(n,q) = 0\ ,$$

$$a_0 = q^{7\,n+9}\,(q^{2\,n+4} - 1)\,(q^{2\,n+5} - 1)\,;$$

$$a_1 = q^{2\,n+5}\,(q^{2\,n+5} - 1)\,(q^{2\,n+2} - 1)\,\big(1 - q^{n+1} \\ -(q-1)\,(q^2-1)\,q^{2\,n+1} + (q^3+1)\,q^{3\,n+2} + 2\,q^{4\,n+5} - q^{5\,n+6}\big)\ ;$$

$$a_2 = q\,(q^{2\,n+4} - 1)\,(q^{2\,n+1} - 1)\,\big(q^{5\,n+9} - q^{4\,n+7} \\ -(q-1)\,(q^2-1)\,q^{3\,n+4} + (q^3+1)\,q^{2\,n+2} + 2\,q^{n+2} - 1\big)\ ;$$

$$a_3 = (q^{2\,n+1} - 1)\,(q^{2\,n+2} - 1);$$

$$b = -q^{4+2\,n}(1 + q^{1+n})(1 + q^{2+n})(q^{1+2\,n} - 1)(q^{3+2\,n} - 1)(q^{5+2\,n} - 1).$$

Наша цель: асимптотика многочленов $\dot{J}_n(q)$ при $n \to \infty$ и $q \to 1$, $(q^n = z \in \mathcal{K} \Subset \overline{\mathbb{C}})$, точнее $z = 2\pi i$

Асимптотический базис однородной задачи

- $\overrightarrow{Q}_{n+1} = \mathcal{A}_n \overrightarrow{Q}_n \,, \quad \overrightarrow{Q}_n := \begin{pmatrix} Q_{n+2} \\ Q_{n+1} \\ Q_n \end{pmatrix} \,, \quad \mathcal{A}_n := \begin{pmatrix} \frac{a_2}{a_3} & \frac{a_1}{a_3} & \frac{a_0}{a_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$

- Подставим: $q^n =: z \,, \; q =: 1 \quad \rightarrow \quad \det(\mathcal{A}_n - I\,\lambda) = 0,$

получим уравнение <u>спектральной кривой</u>:

$$\lambda^3 + (z^5 - z^4 + 2z^2 + 2z - 1)\lambda^2 - z^2(z^5 - 2z^4 - 2z^3 + z - 1)\lambda + z^7 = 0 \,.$$

точки ветвления на ед. окр.: $z_{1,2} = -0.74222 \pm I\,0.67016$,
а также $\lambda_0(\pm 1) = \lambda_1(\pm 1) = \lambda_2(\pm 1)$.

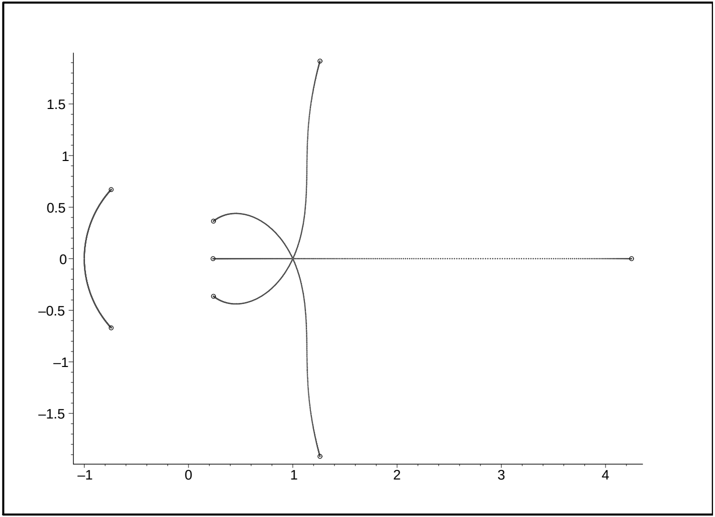
- Дорожная карта: Зона "разделенных"с.з.;

$$(V_{n+1}^{-1} A_n V_n) \;\rightarrow\; D_n := \mathrm{Diag}[V_{n+1}^{-1} A_n V_n] \,.$$

Зона "близких"с.з.; "Сшивки"базисов в зонах перекрытий.

Множество Γ и точки ветвления для $\lambda(z)$

$$\Gamma := \left\{ z \ : \ |\lambda_i(z)| = |\lambda_j(z)|\,,\ i,j = 0,1,2,\ i \neq j \right\} \tag{3.1}$$



Асимптотический базис в зоне "разделения"

Новые параметры (движение по окружности):

$$\mathrm{subs}(q^n = e^{tH},\ q = e^{H/N}, \mathcal{A}_n) =: \mathbf{A}(N,t,H) \quad H = 2\pi i.$$

На входе разложение по малому параметру $1/N$

$$\mathcal{A}_n =: \mathbf{A}(N,t,H) \;=\; \mathbf{A}_0(e^{tH}) + \frac{1}{N}\mathbf{A}_1(t,H) + \frac{1}{N^2}\mathbf{A}_2(t,H) + \dots$$

Ищем разложение базиса в зоне "разделения"

$$B(z) \;:\quad \mathbf{A}\cdot B(z) = B(q\,z), \quad z \;=\; q^n,\;\; n \;=\; t\,N$$

Базис ищется в виде

$$B(z) =: V(z)\,\Pi(z)$$

где $$(V_{n+1}^{-1}\mathbf{A}V_n) \;\to\; D_n := \mathrm{Diag}[V_{n+1}^{-1}\mathbf{A}V_n]$$

и $$\Pi(z) := \textstyle\prod_k^n D_k.$$

Теорема о разложении базиса в зоне "разделения"

1) $\exists$ формальные ряды

$$V(z) = V_0(z) + \frac{1}{N} V_1(z,H) + \frac{1}{N^2} V_2(z,H) + \dots$$

$$\Pi(z) = \exp\left(\frac{N}{H} d_{-1}(z) + d_0(z,H) + \frac{1}{N} d_1(z,H) + \dots\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{N}{H} d_{-1}(z) + d_0(z,H)\right) \left(I + \frac{1}{N} \widetilde{d}_1(z,H) + \dots\right).$$

Коэффициенты $V_j, d_j, \widetilde{d}_j$ — алг. функции по z и мн-ны от H,

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \qquad d_{-1} = \mathrm{diag}\left(\int^z \ln(\lambda_j(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta}\right).$$

2) При $z \to 1$, $\exists c: \ V_k = \underset{=}{O}(z-1)^{c-2k}$, d_k, $\widetilde{d}_k$ — аналогично.

Поэтому асимптотическое разложение справедливо при

$$|z-1| \gtrsim N^{\varepsilon - 1/2}, \quad \text{т.е.} \quad n \gtrsim N^{\varepsilon + 1/2}.$$