

УДК 531/534:[57+61]

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ОПЕРАЦИИ ПО ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИЮ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

*Ю.Г. Коноплев, В.И. Митряйкин, О.А. Саченков*

### Аннотация

Предложены математические модели дифференциации границ костной ткани на рентгенограммах тазобедренных суставов человека, полученных на сканирующем рентгеновском томографе; изменения реактивных усилий в суставах при ходьбе и беге; напряженно-деформированного состояния суставов в норме и при патологических изменениях. Приведены результаты расчетов, выполненных на основе предложенных математических моделей.

**Ключевые слова:** эндопротезирование, биомеханика, тазобедренный сустав, имплантат.

---

### Введение

В настоящее время в современных медицинских центрах выполняются высокотехнологичные операции с применением имплантатов. Разработка таких операций требует привлечения различных специалистов: рентгенологов, хирургов, биомехаников, технологов. Применение математического моделирования на этапах диагностики патологий, оценки течения болезни, выбора метода хирургического вмешательства позволяет качественно подобрать имплантат и дать рекомендации по его установке. Использование результатов математического моделирования позволяет увеличить сроки эксплуатации имплантата и улучшить послеоперационное состояние больного. Основополагающие результаты применения методов математического сопровождения различных операций приведены в работах В.М. Арановича, А.В. Аристамбековой, С.С. Гаврюшина, Р.С. Жмурко, Д.В. Иванова, Р.А. Каюмова, Г.Н. Колесникова, Ю.Г. Коноплева, Р.И. Мельцер, Е.А. Номеровской, А.О. Юрьяна и др.

В современной ортопедии выделяют большое разнообразие патологий суставов при ревматических заболеваниях. Особо тяжелым проявлением суставного синдрома ревматических болезней является поражение тазобедренных суставов (ТБС), которое сопровождается изменением опороспособности, ограничением движений. Причина болезни заключается в деформации головки бедренной кости, следствием чего становится нарушение ее кровоснабжения (рис. 1).

Основными методами лечения этой болезни являются консервативный и оперативный. Необходимость ранней хирургической коррекции возникающих деформаций и нарушений биомеханики ТБС признана подавляющим числом ортопедов. Идея разгрузки ТБС нашла свою реализацию в замене головки бедренной кости металлическим (титановый сплав) эндопротезом, который крепится в канале бедренной кости (рис. 1), в зоне вертлужной впадины устанавливается опора, в которой перемещается эндопротез.

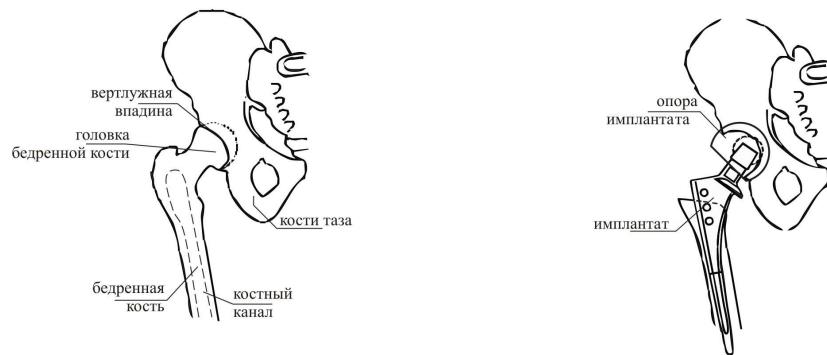


Рис. 1

Операция эндопротезирования является высокотехнологичной операцией, поэтому предоперационная подготовка заметно влияет на послеоперационное состояние пациента. При подготовке к эндопротезированию учитывается ряд анатомических параметров: вертикальный размер входа в вертлужную впадину, глубина вертлужной впадины, угол вертикального наклона вертлужной впадины (угол Шарпа), длина плеча бедренной кости, высота головки, шеечно-диафизарный угол, индекс сужения бедренного канала. Определение этих параметров проводится с использованием рентгеновских снимков, которые не в полной мере раскрывают картину состояния сустава, что может привести к некорректному подбору типоразмера имплантата и метода крепления.

Важным критерием правильности установки имплантата является сохранение симметрии со здоровым суставом и сохранение нормальных анатомических параметров. Внедрение в практику метода компьютерной томографии (КТ) [1] существенно повысило качество диагностики заболеваний ТБС. В то же время мало публикаций, посвященных использованию КТ в комплексе мероприятий, проводимых как на этапе подготовки к оперативному лечению, так и при контроле послеоперационного состояния. Цель настоящей работы – разработка математических методов для создания трехмерной модели ТБС на базе КТ, позволяющей эффективно подобрать эндопротез, провести кинематический и силовой расчеты, исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) эндопротеза и зон его крепления с учетом индивидуальных особенностей пациента.

### 1. Реконструкция геометрии

Для реконструкции геометрии ТБС использовались томограммы пациентов, полученные на компьютерном томографе фирмы General Electric. Изучаемая область ТБС была сканирована с шагом 3 мм, в результате чего получено 70 снимков для каждого пациента. Томограмма одного поперечного среза ТБС показана на рис. 2. Более светлые участки на томограмме соответствуют зонам с повышенной плотностью (костная ткань), темные участки соответствуют мягким тканям. Изображения, полученные на КТ, содержат образы не только костной, но и мягких тканей. Для обработки этих изображений, дифференциации костной ткани применялся метод вейвлет-преобразований, основанный на разложении сигнала (в нашем случае изображения) по базису пространства  $L_2(R)$ , сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. С помощью интегральных расширений и сдвигов мы можем описать все частоты (в нашем случае – это градиент серого

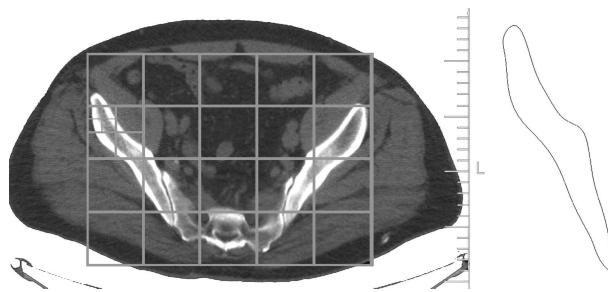


Рис. 2

на изображении), имея единственный вейвлет  $\psi(x)$ . При этом каждая функция  $f \in L_2(R)$  может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \psi_j k(x).$$

Таким образом, каждая из функций указанного базиса характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени). В качестве ортогонального вейвлета была использована функция Хаара. Преобразование Хаара является разделимым и может быть записано в матричном виде следующим образом:

$$R = HFH^T,$$

где  $F$  – матрица изображения,  $H$  – матрица преобразования,  $R$  – результат преобразования, а верхний индекс  $T$  означает операцию транспонирования матрицы. Матрица преобразования Хаара состоит из базисных функций Хаара  $h_k(z)$ . Эти функции определены на непрерывном замкнутом интервале  $z \in [0, 1]$  при  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ :

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad z \in [0, 1],$$

$$h_k(z) = h_{pq} = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{N}} = \begin{cases} 1, & \text{если } (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p, \\ -1, & \text{если } (q-0.5)/2^p \leq z \leq q/2^p, \\ 0, & \text{если } z \in [0, 1]. \end{cases}$$

В двумерном случае необходимо иметь двумерную масштабирующую функцию  $\varphi(x, y)$  и три двумерных вейвлет-функции  $\psi_H(x, y)$ ,  $\psi_V(x, y)$  и  $\psi_D(x, y)$ . Каждая функция представляет собой произведение одномерной масштабирующей функции  $\varphi$  и соответствующей вейвлет-функции  $\psi$ . Если исключить те произведения, которые приводят к «одномерным результатам», то оставшиеся образуют разделимые масштабирующие функции:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

Двумерное дискретное вейвлет-преобразование может быть реализовано с помощью операций фильтрации и прореживающей выборки. Использование указанного математического аппарата с применением фильтрации при распознавании изображений на томограммах позволяет выделять границы костной ткани и градировать ткани по визуальной плотности. Составляющие приближения самого мелкого масштаба дискретного вейвлет-преобразования удаляются путем обращения в нуль

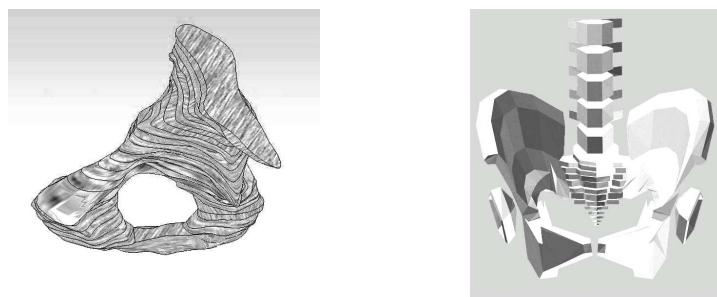


Рис. 3

этих значений. Вычисление обратного преобразования с использованием измененных коэффициентов приводит к выделению контуров на восстановленном изображении и позволяет получить массив точек для последующей аппроксимации контура [1, 2].

Нами был проведен анализ изображений костной ткани для определения ее пористости; полученные данные можно использовать для коррекции механических характеристик костной ткани. Контуры костей ТБС аппроксимировались сплайнами, по которым строилась поверхность ТБС. Характерными проблемными зонами при реконструкции являются области вертлужной впадины и области запирательного отверстия (левое изображение на рис. 3).

## 2. Модель таза

Для определения характера влияния геометрии сустава на биомеханическое состояние ТБС была построена параметрическая модель (правое изображение на рис. 3), для которой задаются габаритные и анатомические параметры (угол вертикального соответствия, шеечно-диафизарный угол, угол Шарпа и т. п.). На основе параметрической модели исследуется биомеханика ТБС при элементарных движениях. Основной задачей являлось определение силовой картины, возникающей в суставе при движении, особенно в области вертлужной впадины. Движениям головок бедренных костей сопутствуют аналогичные движения тел и верхних суставных отростков, через которые эти движения передаются на поясничный отдел позвоночного столба. Биомеханику нижних конечностей человека можно классифицировать с позиции соответствия структуры и функции. При этом можно выделить периоды опоры ноги по динамическим признакам: фаза амортизации и фаза отталкивания. Кинематическую цепь нижней конечности будем трактовать как кривошипно-ползунный механизм, переводящий возвратно-поступательные движения стопы через голень в возвратно-вращательные движения таза через бедро, которые, в свою очередь, переходят в восходящие попеременные разнонаправленные торсионные движения согнутой пологой спирали позвоночного столба [3–5].

Была построена кинематическая модель сустава и изучено влияние работы мышц на движения, причем мышцы были заменены упругими элементами. Для определения кинематических характеристик сустава использовался пакет программ ADAMS. При составлении расчетной схемы основным внешним фактором является масса ( $S$ ), которая передается на сустав по позвоночному столбу, при этом в области вертлужной впадины появляется реактивная сила ( $R$ ) и момент ( $M$ ) (на рис. 4). Эта схема может быть уточнена, если учитывать силы взаимодействия, возникающие в суставе (в реальности роль этих сил играют мышцы и связки). При моделировании использовалась узловая схема человека (на рис. 5

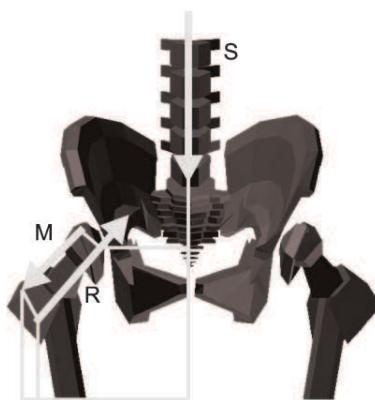


Рис. 4

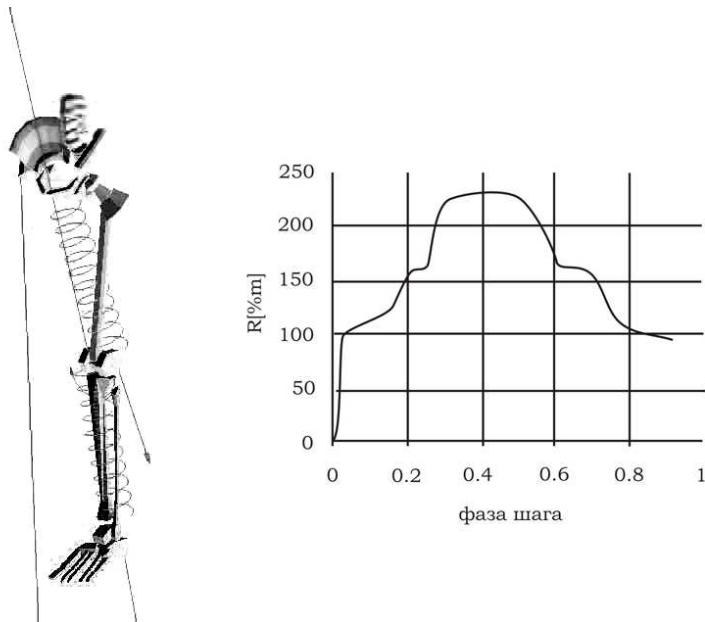


Рис. 5

показана часть кинематической модели, соответствующая поясу нижних конечностей). Данная схема достаточно хорошо описывает кинематику человека, суставы моделировались двумя типами шарниров – с одной и тремя степенями свободы, мышцы моделировались пружинами (с податливостью 1 мм/Н), члены тела – жесткими телами [6–10]. Размеры и масса человека нормировались, а массы частей тела задавались согласно общим массовым распределениям.

Расчет выполнялся с корректировкой математической модели экспериментальными данными на основе раскадровки видеоматериала отснятой походки человека. Время, соответствующее полному циклу шага от одного касания ногой опоры до другого, было разбито на 8 равных частей; началу каждого временного отрезка correspondовало определенное положение тела, по которому корректировались положение суставов, углы наклона элементов верхнего и нижнего поясов конечностей.

На рис. 5 приведены значения вертикальной составляющей усилия, возникающей в суставе (вклад остальных составляющих мал). Максимальные усилия

в суставе приходятся на одноопорную фазу ходьбы (25% для нормального состояния ТБС и 35–50% для несимметрично расположенных конечностей). Результаты расчетов сравнивались с опубликованными другими авторами. При одинаковых задаваемых параметрах максимальные усилия в суставах отличались не более чем на 10%. Полученные значения реактивных сил при расчете динамики сустава применялись для расчета НДС ТБС.

### 3. Напряженно-деформированное состояние

Расчеты НДС проводились на основе метода конечных элементов (МКЭ) с применением САЕ-пакета ANSYS. Поскольку структура кости неоднородна и составляющие ее кортикальная, субхондральная и губчатая ткани различны по прочностным свойствам, для построения модели использовались различные типы КЭ. Для губчатой кости – 8-узловой изопараметрический шестигранник (с линейной аппроксимацией), для кортикальной – мембранный 4-узловой элемент. При построении КЭ модели таза предпочтителен 20-узловой изопараметрический шестигранник. Усилия, создаваемые связками и мышцами таза, а также связками и головками бедренных костей, заменяли эквивалентными нагрузками в соответствии с данными предыдущих расчетов [8–11]. Были проведены расчеты параметрической модели ТБС при различных анатомических параметрах. При двухопорном положении наиболее напряженной с наружной стороны таза является надацетабулярная зона. На внутренней поверхности таза область локализации напряжений несколько выше крыла подвздошной кости. При этом лобковые кости являются малоагруженными элементами.

Картина распределения напряжений таза меняется при переходе к одноопорному положению. Максимальные значения напряжений увеличиваются в несколько раз. Наиболее нагруженной становится область подвздошной кости, где интенсивность напряжений возрастает приблизительно в 7–10 раз. Локализация напряжений в наружной части таза смещается к заднему краю вертлужной впадины. Возрастает и напряжение в ветвях лобковой кости. Интенсивные растягивающие нагрузки испытывают крестцово-буторная и крестцово-костистая связки, которые замыкают силовые линии нагрузления таза.

Проводились исследования НДС ТБС с установленным имплантатом при различных анатомических параметрах. Ниже представлена часть результатов для двухопорного состояния. Для проверки адекватности модели были выполнены расчеты НДС для различных габаритных параметров (моделировались ТБС пациентов различного пола и возраста, с патологиями и без). Так, максимальные напряжения в вертлужной области при изменении межостного расстояния безымянных костей и глубина вертлужной впадины возрастают незначительно; максимальные напряжения в безымянных костях при изменении глубины вертлужной впадины, межостного расстояния безымянных костей также находятся в допустимой области, как и максимальные напряжения в лобковых костях. Полученные данные свидетельствуют об адекватности модели и не противоречат опубликованным данным [11, 12].

Были проведены расчеты при значениях медицинских параметров, имитирующих некорректную установку эндопротеза. Так, на рис. 6 приведены результаты расчетов, при которых варьировался угол вертикального соответствия (угол  $DOB$ ). В нормальном состоянии этот угол принимает значения 80–90°. Расчеты показывают, что при приближении указанного угла к верхней границе максимальные напряжения возрастают и стремятся к критическому значению, при выходе значения параметра за нормальные значения напряжения в области вертлужной

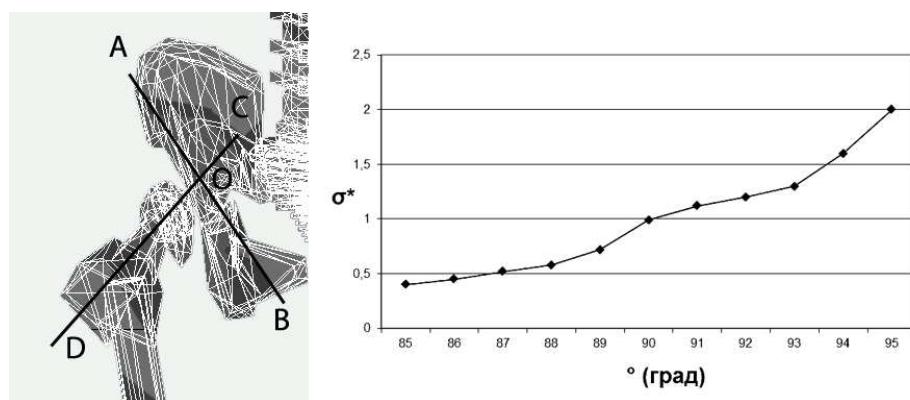


Рис. 6

впадины значительно возрастают, что говорит о возможности нарушения механизма подпитки костной ткани (некроз) или возникновения разрушения (трещины).

### Заключение

В статье описан метод выделения костной ткани ТБС на основе рентгенограмм КТ для реконструкции геометрии сустава с применением вейвлет-преобразования. Была построена трехмерная твердотельная параметрическая модель ТБС, позволяющая рассчитывать динамическое состояние сустава при элементарных движениях с учетом различных параметров (упругость мышц и связок, инерциальные характеристики тела). На основе этой модели были определены направления и величины реактивных сил. Построенная модель была использована для изучения напряженно-деформируемого состояния сустава при различных анатомических параметрах. Проводились расчеты для нормальных и патологических случаев анатомии сустава, определены зоны допустимых напряжений и опасные зоны. Осуществлялись исследования НДС сустава при явных патологиях и некорректных вариантах установки имплантата, определены зоны концентрации напряжений. Полученные результаты могут послужить основой для выработки рекомендаций по правильной установке имплантата.

Авторы выражают глубокую благодарность за сотрудничество ведущему рентгенологу Республиканской клинической больницы (г. Казань) Р.Х. Закирову.

### Summary

*Yu.G. Konoplev, V.I. Mitryaikin, O.A. Sachenkov. Application of Mathematical Modeling in Preparation for Hip Arthroplasty.*

In this article, we propose a mathematical model of the bone-tissue differentiation on the radiographs of a human hip joint obtained by X-ray computed tomography. We also describe a model of the changes in the reaction forces of the hip joint during walking and running and a model of the stress-deformed state of the joint in normal and pathological cases. The results of the calculations based on these mathematical models are presented.

**Key words:** arthroplasty, biomechanics, hip joint, implant.

### Литература

1. Закиров Р.Х., Зарипов Р.А., Митряйкин В.И., Саченков О.А. Применение рентгеновской компьютерной томографии и математического моделирования при эдопротезировании тазобедренного сустава // Человек в экстремальных условиях: человеческий фактор и профессиональное здоровье: Материалы Шестого Междунар. науч.-практ. конгресса Ассоц. авиац.-косм., морской, экстрим. и экол. медицины России. – М.: Изд-во НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН, 2008. – С. 147–148.
2. Закиров Р.Х., Коноплев Ю.Г., Митряйкин В.И., Саченков О.А. Математическое моделирование в задачах биомеханики тазобедренного сустава // Материалы XV Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – М.: Изд-во МАИ, 2009. – Т. 2. – С. 148–149.
3. Иванов Г.Ф. Основы нормальной анатомии человека: в 2 т. – М.: Медгиз, 1949. – Т. 1. – 318 с.
4. Лесгафт П.Ф. Архитектура таза // Лесгафт П.Ф. Избранные труды по анатомии. – М.: Медицина, 1968. – С. 36–65.
5. Лесгафт П.Ф. Теория простых суставов // Лесгафт П.Ф. Избранные труды по анатомии. – М.: Медицина, 1968. – С. 146–162.
6. Bejek Z., Paroczai R., Illyes A., Kiss R.M. The influence of walking speed on gait parameters in healthy people and in patients with osteoarthritis // Knee Surg. Sports Traumatol. Arthrosc. – 2006. – V. 14, No 7. – P. 612–622.
7. Vogt L., Banzer W., Pfeifer K., Galm R. Muscle activation pattern of hip arthroplasty patients in walking // Res. Sports Med. – 2004. – V. 12, No 3. – P. 191–199.
8. Conza N.E., Rixen D.J., Plomp S. Vibration testing of a fresh-frozen human pelvis: The role of the pelvic ligaments // J. Biomechanics. – 2007. – V. 40, No 7. – P. 1599–1605.
9. Majumder S., Roychowdhury A., Pal S. Simulation of hip fracture in sideways fall using a 3D finite element model of pelvis-femur-soft tissue complex with simplified representation of whole body // Med. Eng. Phys. – 2007. – V. 29, No 10. – P. 1167–1178.
10. Cereatti A., Donati M., Camomilla V., Margheritini F., Cappozzo A. Hip joint centre location: An ex vivo study // J. Biomechanics. – 2009. – V. 42, No 7. – P. 818–823.
11. Lee J.D., Chen Y., Zeng X., Eskandarian A., Oskard M. Modeling and simulation of osteoporosis and fracture of trabecular bone by meshless method // Int. J. Eng. Sci. – 2007. – V. 45, No 2–8. – P. 329–338.
12. Anderson A.E., Peters C.L., Tuttle B.D., Weiss J.A. Subject-specific finite element model of the pelvis: development, validation and sensitivity studies // J. Biomech. Eng. – 2005. – V. 127, No 3. – P. 364–373.

Поступила в редакцию  
17.11.10

---

**Коноплев Юрий Геннадьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Yuri.Konoplev@ksu.ru*

**Митряйкин Виктор Иванович** – доктор технических наук, профессор, старший преподаватель кафедры № 4 Казанского высшего военного командного училища.

**Саченков Оскар Александрович** – аспирант кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *4works@bk.ru*