

УДК 530.145:535.14

## СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКИ В ОКРУЖЕНИИ ПРОВОДНИКОВ

*Р.Х. Гайнутдинов, М.А. Хамадеев, М.Р. Мохебби Фар,  
А.А. Мутыгуллина*

### Аннотация

Проведено исследование квантовых флуктуаций одноэлектронного транзистора, состоящего из квантовой точки, взаимодействующей с проводниками. Показано, что подход, основанный на обобщенном динамическом уравнении, позволяет получить поправки к энергии системы, которые не могут быть выведены в рамках стандартного подхода.

**Ключевые слова:** одноэлектронный транзистор, собственно-энергетическая функция.

### Введение

На сегодняшний день исследование резонансной флюоресценции на искусственных атомах [1] и квантовых точках [2] представляет большой интерес. Как было предсказано Моллоу [3] и продемонстрировано в экспериментах на обычных атомах [4], при относительно высоких интенсивностях лазерного поля спектр флюоресценции представляет собой симметричный триплет, боковые компоненты которого отделены от центрального пика на величину, равную обобщенной частоте Раби. Однако спектр Моллоу, полученный недавно на искусственных объектах, содержащих только два уровня, демонстрирует сильное расхождение с предсказаниями квантовой оптики. Причиной этого расхождения может являться тот факт, что в стандартной теории не учитываются безызлучательные переходы между состояниями, «одетыми» лазерным полем [5]. Такие переходы происходят благодаря квантовым флуктуациям в «одетых» состояниях. Вместе с тем показано [6], что в случае, когда квантовая точка связана туннельными переходами с проводниками (случай одноэлектронного транзистора), квантовые флуктуации в такой системе могут быть эффективно сильными.

Одноэлектронный транзистор – это трехэлектродный туннельный транзистор, принцип работы которого основан на эффекте кулоновской блокады. Транзистор состоит из проводящего островка (квантовой точки) с малой собственной емкостью, соединенного с истоковым и стоковым электродами туннельными переходами, обладающими проводимостью и малой емкостью, и имеющего емкостную связь с электродом затвора, см. рис. 1. Созданные таким образом электростатические квантовые точки широко применяются в твердотельной электронике, спинтронике, квантовой оптике и т. д. Одноэлектронные транзисторы используются в качестве датчиков заряда, детекторов инфракрасного излучения и сверхчувствительных микроволновых детекторов [7, 8]. Кроме того, одноэлектронные транзисторы имеют большой потенциал для применения в оптике. К преимуществам этих устройств можно отнести возможность управления уровнями и спонтанным излучением квантовой точки, слабое взаимодействие с внешними полями, и, как следствие, слабую декогеренцию. Все это делает их хорошими кандидатами в качестве

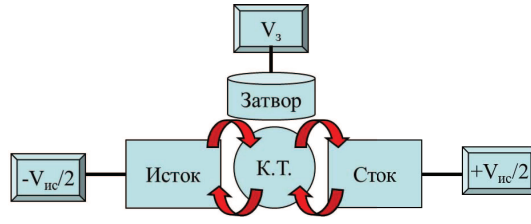


Рис. 1. Схема одноэлектронного транзистора

элементной базы для оптоинформатики. Цель настоящей работы – исследовать новые связанные с квантовыми флуктуациями в электростатических квантовых точках эффекты, которые могут проявлять себя при исследовании резонансной флюоресценции на одноэлектронных транзисторах.

### 1. Обобщенное динамическое уравнение

В нашем исследовании мы будем использовать формализм обобщенной квантовой динамики [9], в рамках которого было выведено обобщенное динамическое уравнение (ОДУ). В работе [9] было показано, что уравнение Шредингера не является самым общим динамическим уравнением, и было выведено более общее динамическое уравнение как следствие основополагающих физических принципов. Являясь эквивалентным уравнению Шредингера в случае, когда взаимодействие в системе является мгновенным, ОДУ позволяет описывать квантовую динамику в случае, когда взаимодействие становится нелокальным во времени. Формализм обобщенной квантовой динамики с самого начала позволяет учитывать то, что вклад в оператора Грина  $G(z)$ , возникающий при описании процессов, связанных с самодействием частиц, имеет ту же структуру, что и свободный оператор Грина  $G_0(z)$ . По этой причине естественно заменить  $G_0(z)$  оператором  $G_0^{(\nu)}(z)$ , появляющимся при описании эволюции системы, в которой частицы распространяются свободно или взаимодействуют с вакуумом. Следовательно,

$$\langle m' | G_0^{(\nu)}(z) | m \rangle = \frac{\langle m' | m \rangle}{z - E_m^{(0)} - C_m(z)}, \quad (1)$$

где  $|m\rangle$  – собственные вектора свободного гамильтониана ( $H_0 |m\rangle = E_m^{(0)} |m\rangle$ ). Вклады, отвечающие за взаимодействия, описываются оператором  $G^{(I)}(z) = G_0^{(\nu)}(z)M(z)G_0^{(\nu)}(z)$ , тогда

$$G(z) = G_0^{(\nu)}(z) + G^{(I)}(z) = G_0^{(\nu)}(z) + G_0^{(\nu)}(z)M(z)G_0^{(\nu)}(z), \quad (2)$$

где оператор  $M(z)$  описывает процессы, в которых частицы взаимодействуют друг с другом. Уравнения относительно  $C(z)$  и  $M(z)$  могут быть выведены из ОДУ [10]. В частности, уравнение относительно собственно-энергетической функции  $C_m(z)$  выглядит следующим образом:

$$\frac{dC_m(z)}{dz} = -\langle m | M(z) \left( G_0^{(\nu)}(z) \right)^2 M(z) | m \rangle. \quad (3)$$

Решение этого уравнения позволяет по-новому взглянуть на задачу о нахождении энергетического спектра системы. Действительно, поскольку энергию системы можно определить из условия на полюс оператора Грина, то

$$z - E_m^{(0)} - C_m(z) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) позволяет получать новые поправки к энергиям. Другими словами, поправки к «голой» энергии состояния  $E_m^{(0)}$  будут определяться значением функции  $C_m(z)$  в точке, являющейся решением уравнения (4). При этом мы можем получить стандартное выражение для собственной энергии, если положим  $z = E_m^{(0)}$ . В этом случае реальная часть  $C_m(E_m^{(0)})$  будет определять стандартный лэмбовский сдвиг. Уравнение (4) позволяет получать нетривиальные поправки даже в том случае, если их нельзя рассматривать как малые, и решать задачу непертурбативно.

Предложенный нами подход позволяет исследовать новые эффекты, которые возникают при квантовых флуктуациях в квантовой точке, путем обмена электронами с проводниками. В качестве первого шага мы будем предполагать, что туннелирование будет не слишком интенсивным. Это делает возможным решать задачу пертурбативно. Так, в лидирующем порядке, положив  $M^{(0)}(z) = H_I$ , где  $H_I$  – гамильтониан взаимодействия, для  $C_m^{(0)}(z)$  имеем

$$\frac{dC_m^{(0)}(z)}{dz} = -\langle m | H_I (G_0(z))^2 H_I | m \rangle. \quad (5)$$

Таким образом, чтобы исследовать новые эффекты в лидирующем порядке, необходимо построить гамильтониан системы.

## 2. Собственно-энергетические функции одноуровневой квантовой точки

Рассмотрим модель одноуровневой квантовой точки, в которой гамильтониан системы описывается формулой [11]

$$H = H_{\text{qd}} + H_{\text{tun}} + H_{\text{lead}}, \quad (6)$$

где  $H_{\text{qd}}$  – гамильтониан, описывающий квантовую точку,  $H_{\text{tun}}$  – гамильтониан, который описывает процессы туннелирования между квантовой точкой и проводниками, и  $H_{\text{lead}}$  – гамильтониан, описывающий проводники. Гамильтониан  $H_{\text{qd}}$  в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием может быть представлен в виде

$$H_{\text{qd}} = \sum_{\sigma j} \varepsilon_j d_{j\sigma}^\dagger d_{j\sigma} + \sum_{\sigma\sigma'ij} U_{ij} n_{i\sigma} n_{j\sigma'}, \quad (7)$$

где оператор числа частиц  $n_{j\sigma} = d_{j\sigma}^\dagger d_{j\sigma}$  выражается через операторы рождения (уничтожения) электрона  $d_{j\sigma}^\dagger d_{j\sigma}$  со спином  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  на уровне  $j = g, e$ ;  $\varepsilon_j$  – энергия связи, а  $U_{ij}$  – энергия отталкивания двух электронов. Гамильтониан, ответственный за туннелирование, имеет вид

$$H_{\text{tun}} = \sum_{\alpha, \vec{k}, \sigma} V_{\alpha j} C_{\alpha, \vec{k}, \sigma}^\dagger d_{j\sigma} + H.c., \quad (8)$$

где  $V_{\alpha j}$  – матричные элементы, которые не зависят от импульса и спина,  $C_{\alpha, \vec{k}, \sigma}^\dagger (C_{\alpha, \vec{k}, \sigma})$  – оператор рождения (уничтожения) электрона со спином  $\sigma$  и импульсом  $\vec{k}$  в проводнике  $\alpha$ ,  $\alpha = l, r$ . Гамильтониан, описывающий проводники, задается выражением

$$H_{\text{lead}} = \sum_{\alpha, \vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\alpha, \vec{k}} C_{\alpha, \vec{k}, \sigma}^\dagger C_{\alpha, \vec{k}, \sigma}. \quad (9)$$

Разница химических потенциалов двух проводников определяется потенциалом смещения  $\mu_l - \mu_r = -eV$ . Мы будем предполагать, что при туннельном транспорте

электронов через квантовую точку плотность состояний в проводниках  $\rho_\alpha$  остается постоянной, и константа связи  $R_{\alpha j}$  будет определяться выражением  $R_{\alpha j} = 2\pi\rho_\alpha |V_{\alpha j}|^2$ .

В работе [6] с помощью гамильтониана (6) было решено ОДУ (5) и получены собственно-энергетические функции одноуровневой квантовой точки:  $C_0(z)$ , учитывающая квантовые флуктуации с уровня без электронов,  $C_\sigma(z)$  – с одним электроном и  $C_d(z)$  – с двумя электронами. Принимая во внимание то, что та часть функции  $C_\sigma(z)$ , которая не зависит от свойств проводника, была включена в энергию пустого уровня, мы приходим к выражениям

$$C_0(z) = 2 \sum_{\alpha} \frac{R_{\alpha}}{2\pi} \int dE \frac{f_{\alpha}(E)}{z - \varepsilon + E}, \quad (10)$$

$$C_{\sigma}(z) = - \sum_{\alpha} \frac{R_{\alpha}}{2\pi} \int dE \left[ \frac{-f_{\alpha}(E)}{z - E} + \frac{f_{\alpha}(E)}{z - 2\varepsilon - U + E} \right], \quad (11)$$

$$C_d(z) = 2 \sum_{\alpha} \frac{R_{\alpha}}{2\pi} \int dE \frac{-f_{\alpha}(E)}{z - \varepsilon - E}, \quad (12)$$

где

$$f_{\alpha}(E) = \left( 1 + \exp \left( \frac{E - \mu_{\alpha}}{k_B T} \right) \right)^{-1} \quad (13)$$

является распределением Ферми (предполагается, что резервуары находятся в равновесии). Если предположить, что решения (10)–(12) слабо зависят от  $z$ , то согласно (4) можно получить приближенные значения сдвигов уровней:  $\Delta E_0^{(ap)} = C_0(E_0^{(0)})$ ,  $\Delta E_{\sigma}^{(ap)} = C_{\sigma}(E_{\sigma}^{(0)})$  и  $\Delta E_d^{(ap)} = C_d(E_d^{(0)})$ , где  $E_0^{(0)}$ ,  $E_{\sigma}^{(0)}$  и  $E_d^{(0)}$  – энергии соответствующих состояний без учета квантовых флуктуаций. Можно заметить, что приближенные сдвиги совпадают со сдвигами, полученными в рамках стандартного подхода [11]. Однако очевидно, что зависимость собственно-энергетической функции (10)–(12) от  $z$  достаточно сильная, поэтому следует решать уравнение (4) точно. В частности, собственно-энергетическая поправка к разности энергий, которую приобретает квантовая точка, когда на нее помещается электрон, определяется выражением

$$\delta\varepsilon = C_{\sigma}(E_{\sigma}) - C_0(E_0), \quad (14)$$

где  $E_0$  и  $E_{\sigma}$  – решения уравнений типа (4). На рис. 2 представлена зависимость данной поправки от химического потенциала проводников (симметричный случай). Из рисунка видно, что при определенных параметрах точное решение может существенно отличаться от приближенного, и стандартный подход становится неприменим.

### Заключение

Таким образом, показано, что подход к проблеме квантовых флуктуаций в одноэлектронных транзисторах, основанный на формализме обобщенной квантовой динамики, позволяет получать новые поправки к энергиям системы, которые не могут быть выведены из стандартной теории. Для получения указанных поправок необходимо решить ОДУ, с помощью которого можно определить функции  $C(z)$  и  $M(z)$ . Энергия в данном случае будет определяться через условие на полюс оператора Грина, которое зависит от собственно-энергетической функции  $C(z)$ . Такой способ определения энергии находит свое выражение в уравнении (4). Из

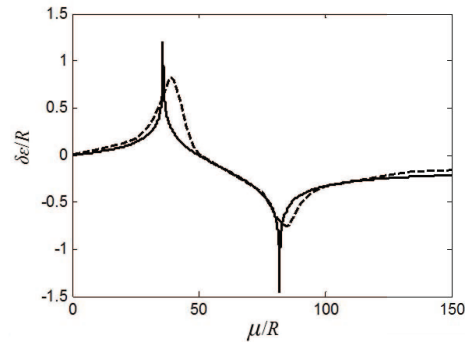


Рис. 2. Собственно-энергетическая поправка в зависимости от параметра  $\mu$  при нулевой температуре. Сплошной линией показан результат, полученный в рамках стандартного подхода, пунктирной – с помощью решения ОДУ

результата, получаемого решением этого уравнения, в приближении слабо меняющейся функции  $C(z)$  можно получить стандартные выражения для собственно-энергетических сдвигов и ширин уровней. Но если в окрестности точки  $z = E_m^{(0)}$  производная функции является достаточно большой, данное приближение становится неприменимым. Применяя подход, основанный на ОДУ, даже в лидирующем порядке удается обнаружить новые эффекты. Вместе с тем можно ожидать, что в следующих порядках обнаруженные эффекты могут оказаться гораздо сильнее, что можно будет использовать для контроля безызлучательных переходов между «одетыми» состояниями.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности.

### Summary

*R.Kh. Gainutdinov, M.A. Khamadeev, M.R. Mohebbifar, A.A. Mutygullina.* Self-Energy Function of States of a Quantum Dot Tunnel Coupled to Leads.

Quantum fluctuations of a single-electron transistor consisting of a quantum dot tunnel coupled to noninteracting leads are investigated. It is shown that an approach based on the generalized dynamical equation allows to obtain corrections for the system energies that can not be deduced from the standard theory.

**Keywords:** single-electron transistor, self-energy function.

### Литература

1. *Astafiev O., Zagoskin A.M., Abdumalikov A.A. Jr., Pashkin Yu.A., Yamamoto T., Inomata K., Nakamura Y., Tsai J.S.* Resonance fluorescence of a single artificial atom // *Science*. – 2010. – V. 327. – P. 840–843.
2. *Vamivakas A.N., Zhao Y., Lu C.-Y., Atatüre M.* Spin-resolved quantum-dot resonance fluorescence // *Nature Phys.* – 2009. – V. 5 – P. 198–202.
3. *Mollow B.R.* Power spectrum of light scattered by two-level systems // *Phys. Rev.* – 1969. – V. 188. – P. 1969–1975.
4. *Wu F.Y., Grove R.E., Ezekiel S.* Investigation of the spectrum of resonance fluorescence induced by a monochromatic field // *Phys. Rev. Lett.* – 1975. – V. 35, No 21. – P. 1426–1429.

5. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1997. – 651 p.
6. *Gainutdinov R.Kh., Khamadeev M.A., Mohebbifar M.R., Mutygullina A.A.* Tunneling-induced self-energy shift of energy levels of a quantum dot // J. Phys.: Conf. Ser. – 2015. – V. 613. – Art. 012002, P. 1–5.
7. *Om K., Manjit K.* Single electron transistor: Applications & problems // Int. J. VLSI Design & Commun. Syst. – 2010. – V. 1, No 4. – P. 24–29.
8. *Kumar A., Dubey D.* Single electron transistor: Applications and limitations // Advance in Electronic and Electric Engineering. – 2013. – V. 3, No 1. – P. 57–62.
9. *Gainutdinov R.Kh.* Nonlocal interactions and quantum dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32, No 30. – P. 5657–5677.
10. *Gainutdinov R.Kh.* The decay and energy of unstable bound states // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – V. 22, No 3. – P. 269–286.
11. *Splettstoesser J., Governale M., Konig J.* Tunneling-induced renormalization in interacting quantum dots // Phys. Rev. B. – 2012. – V. 86, No 3. – Art. 035432, P. 1–7.

Поступила в редакцию  
16.09.15

---

**Гайнутдинов Ренат Хамитович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики и нанофотоники, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Renat.Gainutdinov@kpfu.ru*

**Хамадеев Марат Актасович** – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры оптики и нанофотоники, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Marat.Khamadeev@kpfu.ru*

**Мохебби Фар Мохамед Реза** – аспирант кафедры оптики и нанофотоники, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *mmohhebifar@gmail.com*

**Мутыгуллина Айгуль Ахмадулловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Aigul.Mutygullina@kpfu.ru*