Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2019, №1, с. 86–88 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное В.В. Шурыгиным

П.В. БИБИКОВ

О КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНО УСТОЙЧИВОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Аннотация. Изучается вопрос классификации полиномиальных гамильтонианов с невырожденной линейно устойчивой особой точкой на двумерной комплексной плоскости относительно действия группы полиномиальных симплектоморфизмов. С каждым гамильтонианом ассоциируется набор полиномов от трех переменных, являющихся компонентами гамильтониана в нормальной форме Биркгофа, а также конечная группа, являющаяся группой Галуа конечномерного расширения полей, порожденного данными полиномами. В терминах этих объектов формулируется и доказывается критерий эквивалентности двух полиномиальных гамильтонианов.

Ключевые слова: гамильтониан, симплектоморфизм, полиномиальный автоморфизм, нормальная форма Биркгофа, группа Галуа.

УДК: 514.164

Рассмотрим гамильтонову систему на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (q,p) и симплектической структурой ω. Предположим, что гамильтониан H является полиномом: $H \in \mathbb{C}[q,p]$. Рассмотрим группу симплектоморфизмов SPol плоскости $\mathbb{C}^2$, сохраняющую полиномиальные гамильтонаины (иначе говоря, рассмотрим группу полиномиальных преобразований, обратные к которым также полиномиальны). В предположении справедливости гипотезы о якобиане $\mathrm{SPol} := \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2) \cap \mathrm{Symp}(\mathbb{C}^2)$ есть просто группа полиномиальных симплектоморфизмов.

Будем рассматривать гамильтоновы системы с невырожденной линейно устойчивой особой точкой. Без ограничения общности будем считать, что это точка $(0,0)$. Такие системы соответствуют гамильтонианам H, которые обращаются в нуль с кратностью два и для которых оператор $A_H := \omega^{-1} d_0 H$ имеет чисто мнимый простой спектр.

На пространстве таких гамильтонианов действует группа SPol_0 полиномиальных симплектоморфизмов, сохраняющих точку нуль. Нашей целью является получение критерия эквивалентности двух гамильтонианов общего положения относительно действия группы SPol_0.

Несмотря на алгебраическую постановку вопроса, основным для нас будет язык теории дифференциальных уравнений и дифференциальных инвариантов [1]. Пусть J^k — пространство k-джетов голоморфных функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. Обозначим через $\mathcal{E} \subset J^2$ множество (уравнение) 2-джетов гамильтонианов с невырожденной линейно устойчивой особой точкой нуль. Пусть также $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{2+l}$ — l-е продолжение этого уравнения.

Поступила в редакцию 20.09.2018. После доработки 20.09.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант мол_а_дк №16-31-60018).

Действие группы SPol_0 канонически поднимается до действия на всех уравнениях $\mathcal{E}^{(l)}$. Обозначим соответствующие группы через $\mathrm{SPol}_0^{(l+2)}$.

Напомним, что дифференциальным инвариантом действия группы $\mathrm{SPol}_0^{(l+2)}$ на уравнении $\mathcal{E}^{(l)}$ называется $\mathrm{SPol}_0^{(l+2)}$-инвариантная функция на $\mathcal{E}^{(l)}$, полиномиальная по координатам пространства J^{l+2}. Алгебру дифференциальных инвариантов действия SPol_0 на $\mathcal{E}$ можно описать следующим образом [2].

Выберем канонические координаты (являющиеся координатами Дарбу для симплектической формы ω) q, p на плоскости $\mathbb{C}^2$ и положим $\tau = q^2 + p^2$. Тогда гамильтониан H имеет в точке $(0,0)$ формальную нормальную форму Биркгофа [3]

$$j_0^\infty(H) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \tau^k.$$

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов свободно порождается дифференциальными инвариантами $B_1, B_2, \ldots$.*

Замечание. Координатная запись инвариантов Биркгофа B_k крайне громоздка. Хотя $B_1 = H_{11}H_{22} - H_{12}^2$ — просто гессиан, но уже

$$\begin{aligned} B_2 = {}& (3H_{22}H_{2222} - 5H_{222}^2)H_{11}^4 + (-3H_{12}^2H_{2222} + (30H_{122}H_{222})H_{12} + 6H_{22}^2H_{1122} + \\ &+ (-9H_{122}^2 - 6H_{112}H_{222})H_{22})H_{11}^2 + (12H_{22}^2H_{1112} + (-24H_{112}H_{222} + 6H_{22}H_{1122} - \\ &- 36H_{122}^2)H_{12}^2 + (-12H_{22}^2H_{1122} + (54H_{122}H_{112} + 6H_{222}H_{111})H_{22})H_{12} + \\ &+ 3H_{22}^2(-3H_{112}^2 - 2H_{122}H_{111} + H_{22}H_{1111}))H_{11} - 12H_{12}^4H_{1122} + \\ &+ (36H_{122}H_{112} + 12H_{22}H_{1112} + 4H_{222}H_{111})H_{12}^3 - 3H_{22}(12H_{112}^2 + H_{22}H_{1111} + \\ &+ 8H_{122}H_{111})H_{12}^2 + 30H_{22}^2H_{12}H_{112}H_{111} - 5H_{22}^3H_{111}^2 \end{aligned}$$

(здесь индексы 1 и 2 обозначают частные производные функции H по координатам q и p соответственно).

Эта теорема была ранее доказана для действия группы диффеоморфизмов, сохраняющих точку нуль (в этом случае она следует из теоремы о нормальной форме Биркгофа [3]). Однако для группы SPol_0 алгебра дифференциальных инвариантов будет такой же. Действительно, группа SPol_0 действует на плоскости $\mathbb{C}^2$ бесконечно транзитивно (например, [4]), поэтому орбиты групп $\mathrm{SPol}_0^{(l+2)}$ всюду плотны в орбитах группы диффеоморфизмов, сохраняющих нуль и действующих на многообразии $\mathcal{E}^{(l)}$, а значит, наборы дифференциальных инвариантов этих двух групп совпадают.

Отметим, что эта алгебра дифференциальных инвариантов не является конечно порожденной в смысле Ли–Трессе [2].

Теперь докажем критерий эквивалентности двух полиномиальных гамильтонианов.

Для полиномиального гамильтониана H степени d рассмотрим инварианты Биркгофа $B_1, B_2, \ldots, B_k$, где $k = [d/2]$. Будем говорить, что гамильтониан H находится в *общем положении*, если ограничения инвариантов $B_1(H)$ и $B_2(H)$ функционально независимы в открытой по Зарисскому области плоскости $\mathbb{C}^2$.

Для гамильтониана H общего положения найдутся такие многочлены $\mathcal{F}_H^m$, что

$$\mathcal{F}_H^m(B_1(H), B_2(H), B_m(H)) = 0.$$

Будем считать, что степени многочленов $\mathcal{F}_H^m$ минимальны, а сами они определены с точностью до умножения на ненулевую константу. При таких предположениях многочлены $\mathcal{F}_H^m$ единственны.

Далее, свяжем с гамильтонианом H конечную группу $\mathcal{G}(H)$. Через $\mathbb{C}(B_1, B_2)$ обозначим поле, порожденное инвариантами B_1 и B_2 (рассматриваемыми как обычные переменные), а через $\mathcal{F}_H(B_1, B_2)$ — поле, порожденное корнями многочленов $\mathfrak{F}_H^m$ над полем $\mathbb{C}(B_1, B_2)$ для всех $m = 3, \ldots, k$. Тогда расширение полей $\mathcal{F}_H(B_1, B_2) \supset \mathbb{C}(B_1, B_2)$ является расширением Галуа. Обозначим через $\mathcal{G}(H)$ группу Галуа этого расширения.

Заметим, что уравнения $\mathfrak{F}_H^3 = \ldots = \mathfrak{F}_H^m = 0$ можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений на неизвестную функцию H, для которой группа SPol_0 является группой симметрий, а все полиномиальные гамильтонаины, SPol_0-эквивалентные H, являются ее решениями. Поэтому эта система зависит не от выбора гамильтониана H, а от выбора его SPol_0-орбиты. Следовательно, группа $\mathcal{G}(H)$ также зависит только от SPol_0-орбиты H. Отметим также, что для фиксированных B_1, B_2 общего положения система $\mathfrak{F}_H^3 = \ldots = \mathfrak{F}_H^m = 0$ как система полиномиальных уравнений имеет в точности $|\mathcal{G}(H)|$ решений, на которых транзитивно действует группа $\mathcal{G}(H)$.

Теорема 2. *С точностью до действия группы $\mathcal{G}(H)$ два гамильтониана H и $\widetilde{H}$ общего положения являются SPol_0-эквивалентными, если и только если $\deg H = \deg \widetilde{H} = d$ и $\mathfrak{F}_H^m = \mathfrak{F}_{\widetilde{H}}^m$ для всех $m = 3, \ldots, [d/2]$.*

Литература

[1] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, 28 (ВИНИТИ, М., 1988), 5–289 (ВИНИТИ, М., **28**, 1988).

[2] Kruglikov B., Lychagin V. *Global Lie–Tresse theorem*, Select. Math., New Ser., DOI 10.1007/s00029-015-0220-z (2016).

[3] Birkhoff G.D. *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloqium Publ. IX, Amer. Math. Soc. (1927).

[4] Arzhantsev I., Flener H., Kaliman S., Kutzshebauch F., Zaidenberg M. *Infinite transivity in affine varieties*, arxiv:1210.6937.

Павел Витальевич Бибиков

Институт проблем управления Российской академии наук,
ул. Профсоюзная, д. 65, г. Москва, 117997, Россия,

`e-mail:` tsdtp4u@proc.ru

P.V. Bibikov

On classification of polynomial Hamiltonians with non-degenerated linear-stable singular point

Abstract. We study the classification of polynomial Hamiltonians with the non-degenerated linear-stable singular point on the two-dimensional complex plane with respect to the action of the group of polynomial symplectic automorphisms. For each Hamiltonian one can associate the set of polynomials in three variables and the finite group. These variables are the components of the Birkhoff normal form of our Hamiltonian, and this group is the Galois group of the finite-dimensional extension of the fields, which is generated by our polynomials. Using these objects we provide the equivalence criterion for two polynomial Hamiltonians.

Keywords: hamiltonian, symplectomorphism, polynomial automorphism, Birkhoff normal form, Galois group.

Pavel Vital'evich Bibikov

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sceinces,
65 Profsoyuznaya str., Moscow, 117997 Russia,

`e-mail:` tsdtp4u@proc.ru