УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 771–777 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.54

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КОНЕЧНАЯ ЛИСТНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*Л.А. Суан*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*
*Технологический университет Кантхо, г. Кантхо, 900000, Вьетнам*

**Аннотация**

Исследованы гармонические отображения круга на области, которые могут быть разрезаны на конечное число выпуклых подобластей. Получена оценка листности голоморфных отображений круга, составленного из аналитических компонент гармонической функции.Кроме того, рассмотрена гармоническая однолистная функция Кебе в качестве примера для иллюстрации достигнутых результатов.

**Ключевые слова:** гармоническая функция, однолистная функция, $n$-листная функция, выпуклая функция, конструкция сдвига

---

Пусть $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ – линейное пространство аналитических функций, определенных в $\mathbb{D}$ наделенное топологией локально равномерной сходимости. Через $\mathcal{B}$ обозначим класс функций $\omega \in \mathcal{A}$ таких, что $|\omega(z)| < 1$ при $z \in \mathbb{D}$.

Рассмотрим линейное пространство комплекснозначных гармонических функций $f = h + \overline{g}$, где $h$, $g \in \mathcal{A}$ и $g(0) = 0$, наделенное той же топологией. Отметим, что представление $f = h + \overline{g}$ является единственным и называется каноническим представлением гармонической функции $f$. Функция $h$ называется аналитической частью $f$, $g$ – ко-аналитической частью $f$. Будем говорить, что $f$ сохраняет ориентацию, если Якобиан $J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 > 0$ в $\mathbb{D}$. Так как $f_z(z) = h'(z)$ и $\overline{f_{\overline{z}}(z)} = g'(z)$, условие $J_f(z) > 0$ эквивалентно неравенству $|g'(z)| < |h'(z)|$, а значит, $h'(z) \neq 0$. Таким образом, можно определить функцию $\omega \in \mathcal{B}$, которая называется дилатацией функции $f$ по формуле $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$, где $h'(z) \neq 0$ в $\mathbb{D}$. Пусть $\mathcal{S}$ – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, аналитических и однолистных в $\mathbb{D}$.

Клуни и Шейл-Смолл [3] предложили метод «конструкции сдвига» для получения гармонического отображения с заданной дилатацией на область, выпуклую в одном направлении. Этот метод состоит в сдвиге заданного конформного отображения вдоль параллельных прямых. Область $\Omega \subset \mathbb{C}$ выпукла в направлении вещественной (соответственно, мнимой) оси, если ее пересечение с каждой горизонтальной (соответственно, вертикальной) прямой связано. Функция $f$ является выпуклой в направлении вещественной (соответственно, мнимой) оси, если она отображает круг $\mathbb{D}$ на область, выпуклую в направлении вещественной (соответственно, мнимой) оси. Конструкция сдвига обосновывается следующей теоремой.

**Теорема 1 [3].** *Сохраняющая ориентацию гармоническая функция* $f = h + \overline{g}$ *в* $\mathbb{D}$ *является однолистным отображением круга* $\mathbb{D}$*, выпуклым в направлении вещественной (мнимой) оси тогда и только тогда, когда* $h - g$ *(соответственно*

*$h+g$) является конформным отображением круга $\mathbb{D}$, выпуклым в направлении вещественной (соответственно мнимой) оси.*

Эта теорема может быть переформулирована следующим образом:

**Теорема 2 [4].** *Пусть функция $f = h+\overline{g}$ гармонична и локальна однолистна в $\mathbb{D}$. Тогда $f$ однолистна и область $f(\mathbb{D})$ выпукла тогда и только тогда, когда аналитическая функция $h+e^{i\alpha}g$ является однолистной и выпуклой в направлении $(\alpha+\pi)/2$ для каждого $\alpha$ $(0 \le \alpha < 2\pi)$.*

Пусть функция $f = h+\overline{g}$ гармонична и выпукла в круге $\mathbb{D}$. В статье [7] была выдвинута гипотеза о существовании $\alpha \in \mathbb{R}$ такого, что аналитическая функция $h+e^{i\alpha}g$ выпукла. Однако в нашей работе [6] мы показали, что эта гипотеза неверна.

В настоящей работе мы исследуем вопрос о максимальной листности функции $H+e^{i\alpha}G$, где $H$, $G$ являются соответственно аналитической и ко-аналитической частями $F$ для области, которую можно разрезать на $n$ выпуклых подобластей. Для этого нам понадобится.

**Определение 1 [5].** Функция $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ называется $p$-листной в области $D$, если она не принимает значения больше $p$ раз в $D$ и существует некоторое $w_0$ такое, что $F(z) = w_0$ имеет ровно $p$ решений в $D$, когда корни подсчитываются в соответствии с их кратностями.

Теорема 2 справедлива также и для любой подобласти круга $\mathbb{D}$. Имеет место следующая

**Лемма 1.** *Для любой области $D$ в круге $\mathbb{D}$, если функция $F = H+\overline{G}$ однолистна в $D$ и область $F(D)$ выпукла, то функция $\Phi = H+e^{i\alpha}G$ также однолистна в $D$ и область $\Phi(D)$ выпукла в направлении $(\alpha+\pi)/2$.*

**Доказательство.** Предположим, что функция $F = H+\overline{G}$ однолистна в $D$ и область $F(D)$ выпукла. Пусть $\varphi$ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область $D$. Область $F(D) = F(\varphi(\mathbb{D})) = (F\circ\varphi)(\mathbb{D}) = (H\circ\varphi+\overline{G\circ\varphi})(\mathbb{D})$ является выпуклой. Так как $F$ однолистна в $D$, то $F\circ\varphi$ однолистна в $\mathbb{D}$.

По теореме 2 область

$$(H\circ\varphi+e^{i\alpha}G\circ\varphi)(\mathbb{D}) = \Big((H+e^{i\alpha}G)\circ\varphi\Big)(\mathbb{D}) = (H+e^{i\alpha}G)\Big(\varphi(\mathbb{D})\Big) = (H+e^{i\alpha}G)(D)$$

выпукла в направлении $(\alpha+\pi)/2$.

Поэтому функция $\Phi\circ\varphi$ однолистна в $\mathbb{D}$, то есть функция $\Phi$ однолистна в $D$. $\square$

Нам понадобится также следующее

**Определение 2.** Область $\Omega$ называется $n$-выпуклой областью, если ее можно разрезать на $n$ выпуклых подобластей.

Пусть $\Omega$ – $n$-выпуклая область, которая разрезана на $n$ выпуклых подобластей $\Omega_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Пусть $F = H+\overline{G}$ – гармоническое и локально однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на $n$-выпуклую область $\Omega$ (см. рис. 1) и $D_k = F^{-1}(\Omega_k) \in \mathbb{D}$. Обозначим $\widetilde{D}_k = D_k \bigcup \gamma_k$, где $\gamma_k = \partial D_k \backslash \partial\mathbb{D}$.

Имеет место

**Лемма 2.** *Функция $\Phi(z) = H(z)+e^{i\alpha}G(z)$ однолистна в $\widetilde{D}_k$ для всех $k$.*

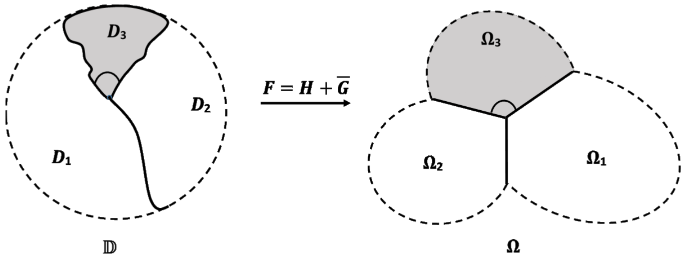


Рис. 1. $F$ отображает круг $\mathbb{D}$ на область $\Omega$ (случай $n = 3$)

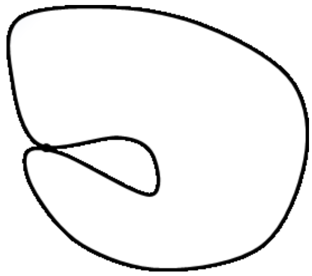

Рис. 2. Кривая $\Phi(\gamma_k)$

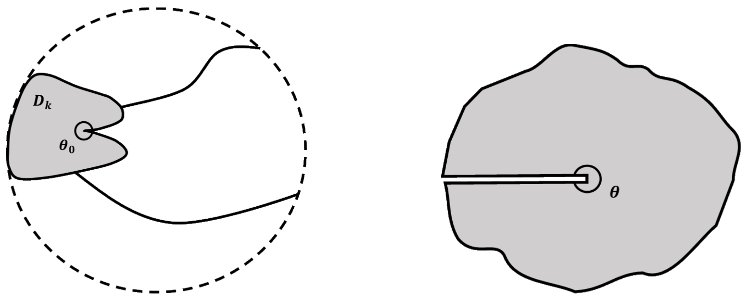


Рис. 3. Область $D_k$ и ее образ $\Phi(D_k)$

**Доказательство.** Так как $F(D_k) = \Omega_k$ – выпуклая область, в силу теоремы 2 и леммы 1 функция $\Phi(z) = H(z) + e^{i\alpha}G(z)$ однолистна в $D_k$.

Действительно, предположим, что функция $\Phi(z)$ неоднолистна на $\gamma_k$. Тогда существуют $z_1, z_2 \in \gamma_k$ такие, что $z_1 \neq z_2$ и

$$\Phi(z_1) = \Phi(z_2). \tag{1}$$

Поскольку область $F(D_k) = \Omega_k$ выпукла, то по лемме 1 функция

$$\Phi(z) = H(z) + e^{i\alpha}G(z)$$

выпукла в направлении $(\alpha + \pi)/2$ в $D_k$.

Из тождества (1) видим, что кривая $\Phi(\gamma_k)$ касается самой себя (см. рис. 2).

Такая ситуация возможна лишь в случае разреза (см. рис. 3). Этот факт следует из того, что область является выпуклой в направлении вещественной оси. Однако если $\Phi(D_k)$ выпукла в направлении вещественной оси, то $\Phi(D_k)$ должна иметь вид, приведенный на рис. 3. Очевидно, что $\theta = 2\pi$.

Пусть $\theta_0$ – прообраз угла $\theta = 2\pi$ при конформном отображении $\Phi$ в $D_k$, тогда угол $\theta_0$ равен $2\pi$. Так как $F$ – отображение, гармоническое в $D_k$, то, согласно [4, с. 23], $F$ – локально аффинное отображение. Следовательно, образ угла $\theta_0$ при отображении $F$ также равен $2\pi$. Это невозможно, ибо $\Omega_k$ – выпуклая область. $\square$

Теперь сформулируем наш основной результат.

**Теорема.** *Пусть $F = H + \overline{G}$ – гармоническое и локально однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на область $\Omega$. Если $\Omega$ – $n$-выпуклая область, то функция $\Phi(z) = H(z) + e^{i\alpha}G(z)$ не более чем $n$-листна в круге $\mathbb{D}$.*

**Доказательство.** Положим

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{\Omega}_k, \quad \widetilde{\Omega}_k = \Omega_k \bigcup (\partial\Omega_k \backslash \partial\Omega), \quad \Omega_i \bigcap \Omega_j = \emptyset, \quad \forall\, i \neq j,$$

где $\Omega_k$ – выпуклая область, и пусть $\widetilde{D}_k = F^{-1}(\widetilde{\Omega}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$\Phi(\mathbb{D}) = \Phi(\bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{D}_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \Phi(\widetilde{D}_k).$$

В силу леммы 2 функция

$$\Phi(z) = H(z) + e^{i\alpha}G(z)$$

однолистна в $\widetilde{D}_k$.

Поэтому $\Phi(z)$ не более чем $n$-листна в круге $\mathbb{D}$. Теорема доказана. $\square$

В следующем примере мы используем доказанную теорему для оценки листности аналитической функции $\Phi(z)$.

**Пример.** Рассмотрим гармоническую однолистную в $\mathbb{D}$ функцию Кебе

$$K(z) = H(z) + \overline{G(z)} = \frac{z - z^2/2 + z^3/6}{(1-z)^3} + \overline{\frac{z^2/2 + z^3/6}{(1-z)^3}}.$$

Известно, что $K(\mathbb{D})$ – вся комплексная плоскость, за исключением луча на отрицательной вещественной оси от $-1/6$ до $-\infty$ [2, с. 228]. Поэтому область $K(\mathbb{D})$ – 2-выпукла.

Далее,

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= H(z) + e^{i\alpha}G(z) = \frac{(e^{i\alpha}+1)z^3 + 3(e^{i\alpha}-1)z^2 + 6z}{6(1-z)^3} = \\
&= \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\Big((e^{i\alpha}+1)z^3 + 3(e^{i\alpha}-1)z^2 + 6z\Big)z^n = \\
&= \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\Big((e^{i\alpha}+1)z^{n+3} + 3(e^{i\alpha}-1)z^{n+2} + 6z^{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$a_2 = \frac{1}{2}(5 + e^{i\alpha}),$$

а значит,

$$|a_2| = \frac{1}{2}\sqrt{26 + 10\cos\alpha}. \tag{2}$$

В силу теоремы Бибербаха [1], если $\Phi(z) \in \mathcal{S}$, то $|a_2| \le 2$. Но из равенства (2) следует, что $|a_2| > 2$ для $\alpha \ne \pi$. Поэтому функция $\Phi(z)$ неоднолистна в $\mathbb{D}$. Кроме того, так как область $K(\mathbb{D})$ – 2-выпукла, то, по теореме доказанной выше, функция $\Phi(z)$ не более чем 2-листна.

Следовательно, функция $\Phi(z)$ – 2-листна для всех $\alpha \ne \pi$.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук И.Р. Каюмову за полезное обсуждение результатов статьи.

## Литература


1. *Bieberbach L.* Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln // S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. – 1916. – P. 940–955.
2. *Brilleslyper M.A., Dorff M.J., McDougall J.M., Rolf J.S., Schaubroeck L.E., Stankewitz R.L., Stephenson K.* Explorations in Complex Analysis. – Washington: Math. Association of America, 2012. – 425 p.
3. *Clunie J.G., Sheil-Small T.* Harmonic univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. – 1984. – V. 9. – P. 3–25.
4. *Duren P.* Harmonic Mappings in the Plane. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 226 p. – doi: 10.1017/CBO9780511546600.
5. *Goodman A.W.* An invitation to the study of univalent and multivalent functions // Int. J. Math. Math. Sci. – 1979. – V. 2, No 2. – P. 163–186. – doi: 10.1155/S016117127900017X.
6. *Kayumov I.R., Ponnusamy S., Xuan L.A.* Rotations of convex harmonic univalent mappings // Bull. Sci. Math. – 2019. – doi: 10.1016/j.bulsci.2019.01.007.
7. *Ponnusamy S., Kaliraj A.S.* On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings // Proc. Math. Sci. – 2015. – V. 125, No 3. – P. 277–290. – doi: 10.1007/s12044-015-0236-5.


Поступила в редакцию
15.08.18

**Суан, Ле Ань**, аспирант кафедры математического анализа; преподаватель
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
Технологический университет Кантхо
ул. Нгуен Ван Ку, д. 256, г. Кантхо, 900000, Вьетнам
E-mail: *laxuan@ctuet.edu.vn*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.**
**SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
**(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

**2018, vol. 160, no. 4, pp. 771–777**

## Harmonic Mappings and Finite Valency of Analytic Functions

*L.A. Xuan*

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
*Can Tho University of Technology, Can Tho, 900000, Vietnam*
E-mail: *laxuan@ctuet.edu.vn*

Received August 15, 2018

### Abstract

The harmonic mappings of a circle into domains that can be cut into a finite number of convex subdomains has been studied. An estimate of the valency of holomorphic mappings of a circle composed of analytical components of the harmonic function has been obtained. In addition, the Keobe harmonic univalent function has been considered to illustrate the results of the research.

**Keywords:** harmonic function, univalent function, $n$-valent function, convex function, shear construction

**Acknowledgments.** We are grateful to Professor I.R. Kaymov, Doctor of Physics and Mathematics, for his valuable advice during the discussion of the results described in this paper.

### Figure Captions

Fig. 1. $F$ maps $\mathbb{D}$ circle into $\Omega$ domain (in case of $n = 3$).

Fig. 2. $\Phi(\gamma_k)$ curve.

Fig. 3. $D_k$ domain and its $\Phi(D_k)$ image.

### References

1. Bieberbach L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1916, pp. 940–955. (In German)

2. Brilleslyper M.A., Dorff M.J., McDougall J.M., Rolf J.S., Schaubroeck L.E., Stankewitz R.L., Stephenson K. *Explorations in Complex Analysis.* Washington, Math. Assoc. Am., 2012. 425 p.

3. Clunie J.G., Sheil-Small T. Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I.*, 1984, vol. 9, pp. 3–25.

4. Duren P. *Harmonic Mappings in the Plane.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2004. 226 p. doi: 10.1017/CBO9780511546600.

5. Goodman A.W. An invitation to the study of univalent and multivalent functions. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1979, vol. 2, no. 2, pp. 163–186. doi: 10.1155/S016117127900017X.

6. Kayumov I.R., Ponnusamy S., Xuan L.A. Rotations of convex harmonic univalent mappings. *Bull. Sci. Math.*, 2019. doi: 10.1016/j.bulsci.2019.01.007.

7. Ponnusamy S., Kaliraj A.S. On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings. *Proc. Math. Sci.*, 2015, vol. 125, no. 3, pp. 277–290. doi: 10.1007/s12044-015-0236-5.

---

***Для цитирования*:** *Суан Л.А.* Гармонические отображения и конечная листность аналитических функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 771–777.

***For citation*:** Xuan L.A. Harmonic mappings and finite valency of analytic functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 771–777. (In Russian)